Dispense del Corso di Matematica 2023/24

Introduzione

Alberto Peretti

Indice

---

1 Motivazioni e obiettivi

Ho raccolto gli argomenti di questo corso in un certo numero di dispense, disponibili in rete.

Le dispense sono scaricabili in due formati diversi. Nella pagina del corso trovi un file per ogni dispensa. Nelle pagine e–learning le trovi tutte raccolte in un unico file, corredate da un indice generale ed un indice analitico, che possono agevolarne la consultazione.

L'esperienza maturata in questi ultimi anni mi porta alla convinzione che molti studenti arrivino a frequentare il corso di Matematica con molte carenze su argomenti basilari che dovrebbero essere stati acquisiti alla scuola secondaria. Non sempre la colpa è interamente degli studenti. Sicuramente incide un purtroppo diffuso disordine con cui la materia viene spesso svolta alla scuola secondaria, anche a causa di continui avvicendamenti di insegnanti diversi.

In questo corso mi trovo quindi il non facile compito di portare in primo luogo gli studenti al livello che dovrebbero avere alla fine della scuola secondaria e, successivamente, portarli ad approfondire gli argomenti tipici di un corso universitario.

Nei corsi successivi (Statistica in particolare, poi Matematica finanziaria e alcuni insegnamenti dell'area economica) sono richieste alcune semplici nozioni di matematica di base e a volte anche argomenti più avanzati. Si pone quindi il problema che studenti poco attrezzati sulle basi devono affrontare in poco tempo anche questioni più delicate, con i risultati che si possono intuire. Spesso accade che l'unico modo che rimane allo studente per superare l'ostacolo è quello di imparare a memoria le cose, senza realmente capirne la sostanza.

Con questo corso cerco quindi di raggiungere questo doppio obiettivo: richiamare le basi, facendo in modo che queste restino acquisite, arrivando poi a toccare anche argomenti più avanzati.

Ovviamente tra le basi e gli argomenti avanzati ci sono molte conoscenze che stanno nel mezzo e che devono logicamente essere affrontate (la matematica è una sequenza di conoscenze, in cui le precedenti sostengono quelle che seguono).

Devo riuscire a fare questo in una cinquantina di ore di lezioni, diciamo teoriche, e 36 ore di esercitazioni.

Penso che l'unico modo di riuscire nell'intento sia quello di affrontare i vari argomenti con un grado di dettaglio più blando rispetto a quanto si faceva fino a qualche tempo fa, puntando soprattutto a dare agli studenti conoscenze operative, più che profondità teorica. Certamente la teoria non può essere tralasciata e anzi molti studenti continueranno ad avere l'impressione che ci sia "tanta teoria", ma vi assicuro che ho fatto il possibile per rendere operativi i concetti. Più di così, non sarebbe più matematica.

Ho diviso il corso in quattro parti, in base alle affinità degli argomenti.

La prima parte riguarda questioni che dovreste avere già visto alla scuola secondaria. Non è solo un ripasso: questi argomenti fanno parte integrante del programma del corso di Matematica.[1]

Non serve che vi dica ora quali sono gli argomenti delle quattro parti, li vedremo un po' alla volta.[2]

In questa lezione introduttiva ho raccolto alcuni concetti preliminari elementari, un po' di simbologia altrettanto elementare, qualche esempio di uso del simbolo di sommatoria e qualche nozione di calcolo combinatorio.

Cominciamo con qualche riga di carattere più generale e poi un po' di simbologia essenziale. Ovviamente con il procedere del corso verranno via via definiti altri nuovi simboli.

1.1 Definizioni, Teoremi, ...

Avete senz'altro già incontrato questi termini, ma desidero parlarne brevemente per fare un po' di chiarezza e sgombrare il campo da possibili equivoci. La matematica non è fatta di formule e non è certamente fatta di calcolo. Il calcolo è il prodotto più "volgare" della matematica, il prodotto di quotidiano utilizzo.

Il grosso della matematica è fatto di risultati teorici relativi a oggetti tipicamente altrettanto teorici. Questi risultati si chiamano *teoremi* (quelli importanti). Un teorema è un risultato che si può *dimostrare*, a partire da concetti e risultati precedentemente definiti e dimostrati. I concetti vengono definiti appunto attraverso le *definizioni*.

La matematica definisce rigorosamente ogni concetto che studia, qualche volta si limita ad ammetterne l'esistenza, molte volte ne fissa alcune proprietà. Quando un concetto è stato definito non lo si può più modificare, non si può dire "pensavo che avesse anche quest'altra proprietà". Se è così occorre cambiare la sua definizione.

I teoremi dimostrano che, date certe *ipotesi* (ben precise anch'esse), allora valgono certe conseguenze, che si dicono la *tesi* del teorema. È fondamentale capire che quelle conseguenze valgono in quelle ipotesi: non si può credere che si abbiano le stesse conseguenze senza quelle ipotesi o in altre ipotesi. È un classico errore, che molti studenti commettono, ricordare magari bene la tesi di un teorema ma dimenticare in quali ipotesi essa è vera. Troverete spesso detto "si può dimostrare che ...". Ho scelto di non presentare le dimostrazioni dei teoremi (tranne pochissimi casi). Scelta drastica, forse criticabile, ma purtroppo il numero di ore del corso è finito e oltretutto di due sole cifre.

In queste dispense troverete qua e là anche *proposizioni*: sono risultati, non così importanti da essere chiamati teoremi, ma della stessa natura, cioè affermazioni che possono essere dimostrate.

Nell'esposizione ho sparso moltissime *osservazioni* e molti *esempi*: è importante che li affrontiate con la stessa attenzione con cui affrontate il resto.

Un consiglio: non limitatevi a leggere queste dispense. Fatelo pure in una prima fase, per avere un'idea di che cosa c'è, ma poi ricominciate daccapo con la volontà di riflettere su quanto leggete, facendovi continuamente domande per capire anche quello che non c'è scritto. È stato uno dei miei obiettivi quello di corredare definizioni, teoremi, procedimenti di calcolo, ... con molti spunti di riflessione che solitamente non si trovano nei testi di matematica perché ritenuti forse ovvi e quindi "lasciati al lettore". E non è per mancanza di fiducia nei vostri confronti, ma solo perché in questi ultimi anni mi sono reso conto che non è proprio possibile (oltre che corretto) pensare che gli studenti arrivino da soli a porsi questioni che sono magari ovvie, ma per chi lavora con la matematica da vent'anni.

La matematica, oltre che di teoremi, definizioni, ... è fatta anche di simbologia. Meglio, non è che quest'ultima sia essa stessa matematica, ma è per così dire il linguaggio con cui vengono spesso espresse le nozioni matematiche. È doveroso richiamare ora qualche prima notazione indispensabile.

1.2 Simbologia di base

Tra un po' richiamerò la simbologia riguardante gli insiemi. Prima però focalizzo l'attenzione sui simboli di disuguaglianza, che talvolta non sono intesi correttamente dagli studenti.

[1] Dopo anni in cui, anche in altre sedi universitarie, ho provato a ripassare questi argomenti, in precorsi o altro, dandoli poi per scontati e non richiedendo quindi agli studenti di provarmi che essi sono stati acquisiti, da quando sono a Vicenza mi sono deciso ad inserire tali argomenti nel programma d'esame, nella speranza che gli studenti capiscano che sono cose da studiare (o ristudiare) con molta attenzione. Spero con questo di evitarvi un sacco di problemi in seguito.

[2] Il programma completo è disponibile in rete nella pagina del corso.

- Il simbolo "$<$" significa "minore"; se scrivo $a < b$ significa che il numero a è minore del numero b
- Il simbolo "$\leq$" significa "minore o uguale"; se scrivo $a \leq b$ significa che il numero a è minore oppure uguale al numero b. Attenzione: la disuguaglianza $a \leq b$ è vera quindi se $a < b$ oppure se $a = b$. [3]
- Analogamente con i simboli "$>$" e "$\geq$", che significano rispettivamente "maggiore" e "maggiore o uguale".

Osservazione Talvolta, scrivendo $a < b$, si legge "a strettamente minore di b", per far notare che non sono uguali. Si dice anche che è una disuguaglianza stretta. Invece $a \leq b$ è una disuguaglianza larga.

Se scrivo $x > 0$, posso leggere "x maggiore di zero" oppure "x positivo". Se scrivo $x \geq 0$, posso leggere "x maggiore o uguale a zero" oppure "x non negativo".

Osservazione Abituatevi a saper leggere ed utilizzare questi simboli nei due versi: se voglio dire ad esempio che a è maggiore o uguale a b, posso scrivere indifferentemente $a \geq b$ oppure $b \leq a$.

1.3 Simboli logici

Sono molto comodi per una scrittura più sintetica alcuni simboli, che chiamerò simboli logici.

A volte userò i simboli logici di congiunzione e disgiunzione "$\wedge$" e "$\vee$". Sono i celebri *and*/*or*, molto utilizzati anche in informatica.

Il simbolo $\wedge$ significa *e* (congiunzione forte), il simbolo $\vee$ significa *o* (*oppure*) (congiunzione debole).

Ad esempio, se n è un numero naturale,[4] scrivendo

$$n > 5 \quad \wedge \quad n < 10$$

affermo che n è maggiore di 5 e nello stesso tempo minore di 10, quindi che è compreso tra 6 e 9 (ossia può essere 6, 7, 8 oppure 9). Scrivendo

$$n < 10 \quad \vee \quad n > 10$$

affermo che n è minore oppure maggiore di 10 (quindi che n non è 10). La scrittura equivale quindi a $n \neq 10$. Si noti che, invece, se scriviamo $n < 10 \ \wedge \ n > 10$, chiediamo che n sia minore e nello stesso tempo maggiore di 10, cosa che risulta impossibile.

A volte farò uso di altri due importanti simboli (detti *quantificatori*): "$\exists$" e "$\forall$".

Il simbolo $\exists$ vuol dire "*esiste almeno un*";[5] il simbolo $\forall$ vuol dire "*per ogni*".

Avverto subito che confondere questi due simboli (e cioè confondere il significato di ciò che si afferma) costituisce un grave errore in matematica, come dovrebbe essere anche nella vita di tutti i giorni.[6]

Tra poco vediamo qualche esempio di utilizzo dei quantificatori in proposizioni di carattere matematico. Vediamone prima però qualche esempio nella vita comune.

Consideriamo la proposizione "in TV c'è almeno un programma che mi piace". È evidente che c'è di mezzo il quantificatore $\exists$. Qual è la negazione di tale proposizione? Naturalmente è: "non c'è alcun programma che mi piace", e cioè che "tutti i programmi non mi piacciono,"[7] dove chiaramente si ha a che fare con il quantificatore $\forall$.

Se ritengo falsa la proposizione "in TV mi piacciono tutti i programmi", è perché "c'è almeno un programma che non mi piace";[8] anche qui notiamo che i due quantificatori si scambiano: nella prima c'è il $\forall$, nella negazione c'è l'$\exists$.

Qualche esempio matematico di utilizzo dei simboli logici lo presenterò più avanti (devo prima fornire un veloce ripasso sulla simbologia degli insiemi e sugli insiemi numerici fondamentali, cosa che farò tra breve).

È opportuno ora riflettere brevemente su qualche esempio di implicazione, dato che nel seguito incontreremo numerosi casi in cui un risultato matematico rilevante viene espresso attraverso un'implicazione. Non essere perfettamente consapevoli di che cosa significa implicazione può portare a gravi fraintendimenti.

Il simbolo "$\Longrightarrow$" significa "implica".

Se scrivo $P \Longrightarrow Q$, dove P e Q sono due proprietà di un certo oggetto, due condizioni, in generale due proposizioni, significa che la proprietà P implica la proprietà Q, cioè che se P è vera, allora è vera anche Q.

Se dico "vado al mare se non piove" sto affermando che "se non piove allora vado al mare". Ci sono altri modi equivalenti per esprimere questa affermazione, modi classici della matematica. Uno di questi è dire che "non piove" è *condizione sufficiente* perché io vada al mare, e cioè: perché io vada al mare basta che non piova.

[3] Quindi, ad esempio, le due scritture $2 < 3$ e $2 \leq 3$ sono vere entrambe.
[4] I numeri naturali, che formano il primo insieme numerico fondamentale, sono 1,2,3,4,. . . .
[5] Per dire *esiste soltanto un* si scrive $\exists!$.
[6] È ben diverso dire (e fare): mi lavo tutti i giorni dell'anno oppure mi lavo almeno un giorno dell'anno.
[7] Mi raccomando, non si pensi che la negazione sia "c'è almeno un programma che non mi piace".
[8] Analogamente a prima, non si deve pensare che la negazione sia "dei programmi non ce n'è uno che mi piaccia".

Si rifletta un po' per capire che ciò equivale a dire che "se non vado al mare allora piove".[9]

Altra proposizione può essere "vado al mare solo se fa bello". Qui "fa bello" è *condizione necessaria* perché io vada al mare, cioè ci vado solo in questo caso. Equivale a dire che "se vado al mare allora necessariamente fa bello". Equivale anche a dire che "se non fa bello allora non vado al mare".

Si faccia attenzione che "se non piove vado al mare" *non equivale* a dire "se piove allora non vado al mare": in altre parole la prima vuol dire che se non piove ci vado sicuramente, ma potrei anche andarci se piove.

Gli esempi illustrano questa situazione generale: se indichiamo con P e Q due condizioni, due proprietà, due proposizioni, etc. e con non$P$ e non$Q$ le rispettive negazioni, allora nell'implicazione

$$P \Longrightarrow Q$$

possiamo dire che:

- P è *condizione sufficiente* per la verità di Q
- Q è *condizione necessaria* per la verità di P [10]
- L'implicazione equivale all'implicazione (detta *contronominale*) non$Q \Longrightarrow$ non$P$.

Osservazione Naturalmente, come conseguenza di questo ultimo punto, se vale l'implicazione $P \Longrightarrow$ non$Q$, essa equivale a $Q \Longrightarrow$ non$P$. [11]

Se, oltre a valere $P \Longrightarrow Q$, vale anche l'implicazione inversa, cioè $Q \Longrightarrow P$, si dice che vale la *doppia implicazione*, o che una è vera *se e solo se* è vera l'altra, e si scrive $P \Longleftrightarrow Q$. In questo caso quindi si dice anche che una è condizione necessaria e sufficiente per l'altra.

In matematica si incontrano spesso proposizioni che sono implicazioni (e le più importanti si chiamano *teoremi*). Vediamo qualche semplice esempio di implicazioni matematiche.

Esempi Si consideri l'implicazione seguente, relativa ai numeri naturali:

$$n \text{ è divisibile per } 4 \Longrightarrow n \text{ è divisibile per } 2.$$

Essa è certamente vera, dato che se un numero è divisibile per 4, significa che è un multiplo di 4, e quindi è multiplo di 2. Ovviamente non vale l'implicazione inversa, dato che ad esempio 6 è divisibile per 2 ma non per 4.[12]

Si consideri l'implicazione, relativa ad un numero naturale n:

$$n \text{ è pari } \Longrightarrow n^2 \text{ è pari.}$$

Si tratta di un'implicazione vera, in quanto, se n è divisibile per 2 allora n^2 è divisibile per 4 e quindi è pari. Vale anche il viceversa? Non è immediato come prima, ma la risposta è sì. Si provi a trovare una giustificazione rigorosa. Possiamo scrivere quindi

$$n \text{ è pari } \Longleftrightarrow n^2 \text{ è pari} \quad (\text{e quindi anche } n \text{ è dispari} \Longleftrightarrow n^2 \text{ è dispari}).$$

Si considerino le due implicazioni, relative ai numeri naturali:[13]

$$n \text{ è primo} \Longrightarrow n^2+1 \text{ è primo} \quad \text{oppure} \quad n \text{ è primo} \Longrightarrow n^2+2 \text{ è primo}$$

È facile trovare un controesempio per entrambe, e quindi verificare che sono false. Invece l'implicazione

$$n \text{ è pari, } n > 2 \Longrightarrow n = p_1 + p_2, \text{ con } p_1 \text{ e } p_2 \text{ primi,}$$

pur non essendo mai stata smentita, ancora non si sa se sia vera o falsa. (È la celebre *congettura di Goldbach.*)

[9] Si tratta di un'implicazione logica, non di implicazione causale: l'ultima implicazione non significa che se non vado al mare allora causo la pioggia.

[10] Si potrebbe dire anche "P è vera solo se è vera Q".

[11] Se piove allora non vado al mare equivale a dire se vado al mare allora non piove. Ovviamente si tratta sempre di implicazioni logiche, non di implicazioni di causa: cioè l'ultima implicazione non significa che se vado al mare allora faccio sì che non piova.

[12] Questo, cioè il 6, viene detto un *controesempio*. Si tratta di un esempio che prova che una certa affermazione non è vera, in questo caso l'affermazione "n è divisibile per $2 \Longrightarrow n$ è divisibile per 4". Ovviamente basta *un solo* controesempio per provare che un certo fatto non è vero.

[13] Si ricordi che un numero naturale n maggiore di uno è *primo* se è divisibile solo per 1 e per n. I primi numeri primi sono 2,3,5,7,11,13,...

2 Insiemi

Ora vediamo alcune nozioni di base riguardanti gli insiemi. Non esiste una vera e propria definizione formale di insieme. Il concetto si assume “intuitivo”: si tratta di un qualunque gruppo di oggetti, numeri, etc. Gli oggetti che costituiscono un insieme si dicono gli *elementi* dell'insieme. Gli elementi si indicano solitamente con lettere minuscole, gli insiemi con lettere maiuscole. Si dice allora che un elemento a appartiene all'insieme A e si scrive, come noto,

$$a \in A.$$

La scrittura

$$a, b \in A$$

dice che a e b sono elementi dell'insieme A. Per dire che c non è elemento di A, cioè che c non appartiene ad A, si scrive

$$c \notin A.$$

Talvolta (non sempre) è possibile definire un insieme elencando i suoi elementi. Ad esempio, se voglio dire che l'insieme A è costituito dagli elementi a, b, c, d e che l'insieme B è costituito dai numeri naturali da 1 a 10, posso scrivere

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{e} \quad B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}.$$ [14]

Nel secondo caso non vengono elencati proprio tutti gli elementi, intendendo con i puntini che anche tutti i numeri (naturali) compresi tra 3 e 10 fanno parte dell'insieme B.

Se l'insieme è *infinito*[15] non è possibile definirlo elencando tutti i suoi elementi. Possiamo però ad esempio ancora scrivere

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

intendendo con i puntini tutti i numeri naturali che vengono dopo il 4. Questa può essere presa quale "definizione intuitiva" dell'insieme dei **numeri naturali**.

È comodo definire anche un insieme che non ha elementi: si chiama **insieme vuoto** e si indica con il simbolo $\emptyset$.

Un insieme si può definire indicando una o più proprietà dei suoi elementi. Ad esempio la scrittura

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$$ [16]

dice che l'insieme A è dato da tutti i numeri naturali che sono minori o uguali di 100. È molto più comodo che non elencare tutti i numeri naturali da 1 a 100. Si poteva anche, come visto, scrivere $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

Altro esempio: si ha

$$\{n \in \mathbb{N} : n^2 < 100\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Si faccia sempre attenzione alla differenza tra $<$ e $\leq$.

Se A e B sono due insiemi, può succedere che A sia contenuto in B, cioè che ogni elemento di A appartenga anche a B. Si dice allora che A è *sottoinsieme* di B e si scrive

$$A \subset B.$$

Esempio Ad esempio abbiamo che $\{3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}$. L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque altro insieme, quindi, se A è un insieme, possiamo scrivere $\emptyset \subset A$.

Se scriviamo $A = B$ intendiamo che i due insiemi sono uguali e questo significa che si ha contemporaneamente $A \subset B$ e $B \subset A$, cioè che ogni elemento di A sta anche in B e viceversa ogni elemento di B sta anche in A.

Osservazione Tutti i simboli visti finora possono essere usati nei due versi. Quindi si può trovare talvolta scritto $A \ni a$ (vuol dire $a \in A$), oppure $A \supset B$ (vuol dire $B \subset A$).

[14] Attenzione che l'ordine in cui scrivo gli elementi non è rilevante, quindi $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$.
[15] Un insieme è finito se ha un numero finito di elementi, è infinito se ne ha infiniti.
[16] La scrittura si legge così: A è l'insieme degli n appartenenti ad $\mathbb{N}$ tali che n è minore o uguale di 100. In particolare i due punti “:” si leggono con “tale/i che”.

2.1 Intersezione, Unione, Differenza, Complementare

Definizione Dati due insiemi A e B, di chiama **intersezione** di A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A e a B, cioè ad entrambi. Si scrive

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Definizione Dati due insiemi A e B, di chiama **unione** di A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A oppure a B, cioè ad almeno uno dei due. Si scrive

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

Esempio A titolo di esempio, se

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\} \quad \text{e} \quad B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 5\}$$

allora

$$A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{e} \quad A \cup B = \mathbb{N}.$$

Può succedere che due insiemi non abbiano elementi in comune. In questo caso si scrive $A \cap B = \emptyset$. Ad esempio, si ha

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è divisibile per } 6\} = \emptyset.$$

Definizione Se A e B sono insiemi, si chiama **differenza** $A \setminus B$ l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.

Esempio Se A è l'insieme dei numeri naturali pari e B è l'insieme dei naturali divisibili per 6, allora $A \setminus B$ è l'insieme dei numeri naturali che sono divisibili per 2 ma non per 3.

Se voglio scrivere i numeri naturali diversi da 1 posso scrivere $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Definizione Se A è un sottoinsieme dell'insieme X, si chiama **insieme complementare** di A (in X) l'insieme degli elementi di X che non appartengono ad A.

Esempio Ad esempio, nell'insieme $\mathbb{N}$, il complementare dei numeri pari è l'insieme dei numeri dispari. Il complementare dei numeri primi è l'insieme fatto dai numeri che si possono scrivere come prodotto di due numeri entrambi maggiori di 1.

Il complementare di X in X è l'insieme vuoto ed il complementare del vuoto è tutto l'insieme X.

Osservazione Si può dire che il complementare di A in X è l'insieme differenza $X \setminus A$. Per indicare l'insieme complementare di A in X possiamo scrivere $X \setminus A$ oppure usare il simbolo A^c, sottintendendo l'insieme X che contiene A.

Sono interessanti due formule che riguardano l'unione, l'intersezione e il complementare di insiemi, le cosiddette *leggi di De Morgan*. Esse dicono che

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \text{e} \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Sostanzialmente affermano che il complementare dell'intersezione è uguale all'unione dei complementari e che il complementare dell'unione è uguale all'intersezione dei complementari. È un utile esercizio verificare la validità di queste formule attraverso la rappresentazione degli insiemi con i soliti diagrammi.

2.2 Insieme delle parti

Definizione Dato un insieme A, si chiama **insieme delle parti di** A l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.[17]

Osservazione L'insieme delle parti di A è detto anche **insieme potenza di** A, e si indica con $\mathscr{P}A$ o con 2^A. Il motivo della seconda notazione viene illustrato tra breve.

Esempio Se $A = \{1, 2, 3\}$, allora si ha

$$\mathscr{P}A = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\Big\}.$$

[17] Si ricordi che, dato un insieme A, esso, tra i suoi sottoinsiemi, ha l'insieme vuoto e l'insieme A stesso. Possiamo quindi scrivere $\emptyset \in \mathscr{P}A$, dato che $\emptyset \subset A$ e analogamente $A \in \mathscr{P}A$, dato che $A \subset A$. Si noti che qui la convenzione di indicare con lettere minuscole gli elementi dell'insieme non può essere rispettata, dato che gli elementi dell'insieme delle parti sono insiemi.

Si osservi la notazione: occorrono le parentesi graffe esterne, dato che $\mathscr{P}A$ è un insieme, e le parentesi graffe interne, dato che gli elementi di $\mathscr{P}A$ sono a loro volta insiemi.

Osservazione L'insieme delle parti si dice anche insieme potenza perché, se A è un insieme di n elementi, allora $\mathscr{P}A$ ha esattamente 2^n elementi (nell'esempio precedente $\mathscr{P}A$ ha $8 = 2^3$ elementi). Per questo motivo $\mathscr{P}A$ viene indicato anche con 2^A.

Esempio Si può considerare l'insieme delle parti di un insieme infinito, come ad esempio le parti di $\mathbb{N}$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. [18] Ad esempio l'insieme dei numeri pari è un elemento di $2^{\mathbb{N}}$.

2.3 Insiemi numerici fondamentali

Molto spesso in questo corso avremo a che fare con insiemi numerici, cioè insiemi i cui elementi sono numeri. Abbiamo già incontrato e usato l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Completiamo le definizioni degli altri *insiemi numerici fondamentali.*

Altro importante insieme numerico è l'insieme dei **numeri interi**:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Possiamo dire che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

L'insieme dei **numeri razionali** si può invece definire come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$ [19]

Si tratta dei numeri detti anche *frazioni*, che avete incontrato già alle scuole elementari. L'insieme $\mathbb{Q}$ è un insieme abbastanza ricco di proprietà.[20]

Per sviluppare però concetti matematici ad un buon livello le frazioni non sono sufficienti, per un motivo non del tutto evidente nella vita di tutti i giorni, ma noto peraltro all'uomo da più di duemila anni. Cerco di evidenziare tale motivo senza scendere troppo in profondità.

Una delle funzioni pratiche più comuni dei numeri è la possibilità che essi ci danno di fare delle misure delle cose, cioè di quantificare alcune caratteristiche degli oggetti che ci circondano. Tale necessità nacque fin dagli albori dell'umanità, non appena alcuni nostri progenitori dovettero contare ad esempio il numero di pecore in loro possesso. E fin qui bastavano i numeri naturali. Quando i nostri antenati non furono più nomadi ma cominciarono a coltivare il terreno, ecco che nacque la necessità di misurare l'estensione di un campo. E qui la questione è già molto più complicata.

Se vogliamo misurare le lunghezze, non è evidente che le frazioni non bastano. Però i matematici antichi si posero questa domanda: se un quadrato ha il lato che misura 1 (non importa che sia un palmo, una yarda o un metro), quanto misura la sua diagonale? Non è difficile provare (chi è curioso venga a ricevimento a chiedermelo) che non ci sono frazioni che possano esprimere tale misura. Uno può accontentarsi e dire: misura circa 1,41 (palmi, yarde o metri). Il matematico si chiede qual è il valore esatto e per esprimere tale valore ha inventato i numeri reali.[21]

I numeri reali, che peraltro voi avete già incontrato alla scuola secondaria, completano, per così dire, i numeri razionali e ci permettono di esprimere in modo esatto le misure (delle lunghezze, delle aree, dei volumi). Ribadisco che i numeri reali sono uno strumento teorico, astratto; di essi si possono però dare ottime approssimazioni con numeri razionali.

Per scendere un po' più in concreto e cercare di "vedere" un numero reale,[22] posso ricordare che i numeri razionali sono quelli che si possono scrivere in forma decimale (con la virgola per intenderci) con un numero finito di cifre dopo la virgola o con un numero infinito di cifre ma che si ripetono periodicamente da un certo punto in poi (i cosiddetti numeri periodici).

I numeri reali invece sono rappresentabili con infinite cifre dopo la virgola,[23] senza che ci siano periodicità. Dei numeri $\sqrt{2}, \pi, e$, che sono tra i numeri reali più famosi, si può dare una rappresentazione decimale soltanto approssimata, nel senso che non si possono conoscere tutte le loro cifre decimali.

L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$. Sulla struttura dei reali diremo più avanti. Le loro proprietà più importanti dovrebbero però essere note agli studenti dalla scuola secondaria.

[18] Ovviamente l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ ha infiniti elementi.

[19] La scrittura si legge: $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni $\frac{m}{n}$ in cui m ed n sono numeri interi ed n non è zero.

[20] Si pensi ad esempio che in $\mathbb{Q}$ la divisione si può quasi sempre fare, mentre non è così in $\mathbb{Z}$. Oppure, ma la questione è solo apparentemente diversa, un'equazione di primo grado ha sempre soluzione se questa la cerchiamo in $\mathbb{Q}$, mentre questo non è vero in $\mathbb{Z}$.

[21] Che i numeri reali esistano veramente o che siano un'invenzione è una domanda mal posta.

[22] Noi in effetti non vediamo i numeri, nemmeno quelli naturali, vediamo la loro rappresentazione. Il numero naturale è un concetto, un'idea, e così (a maggior ragione) i numeri interi, razionali, reali, ...

[23] Sarebbe meglio dire "sarebbero rappresentabili", dato che non possiamo in concreto scrivere infinite cifre decimali. Nemmeno con il calcolatore più potente al mondo sarà mai possibile rappresentare un numero reale non razionale fornendo tutte le sue cifre decimali. Nel calcolo usiamo sempre approssimazioni dei numeri reali, cioè usiamo in realtà solo numeri razionali.

Insiemi numerabili e insiemi non numerabili

Qui tocchiamo soltanto una questione difficile. Ne parlo, anche se brevemente, perché questa sarà una questione importante quando incontrerete nel corso di Statistica la teoria della Probabilità.

L'insieme $\mathbb{N}$ è un insieme infinito, così come lo è l'insieme $\mathbb{R}$. Può sembrare strano chiedersi quale tra i due insiemi ha più elementi, ma è una domanda sensata e difficile. Occorre precisare però come possiamo fare per stabilire quale dei due insiemi è più numeroso. Con gli insiemi finiti è facile: basta confrontare il numero di elementi dell'uno con quello dell'altro. Con gli insiemi infiniti possiamo dire che hanno "lo stesso numero di elementi" se possiamo mettere in **corrispondenza biunivoca** gli elementi di un insieme con quelli dell'altro.[24] Se questo non è possibile allora uno dei due insiemi è più numeroso dell'altro.

Prendiamo in considerazione ad esempio i numeri naturali ($\mathbb{N}$) e l'insieme dei naturali pari, che indico con $\mathbb{P}$. Sono due insiemi infiniti. Consideriamo la corrispondenza che associa ad ogni numero naturale il suo doppio e ad ogni numero pari la sua metà. Non è difficile convincersi che si tratta di una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$. Conclusione: i numeri naturali sono tanti quanti i numeri pari. La cosa può per certi versi sembrare strana, dato che è pur vero che i numeri pari sono un sottoinsieme dei numeri naturali. Ma questo è perché noi siamo abituati ad insiemi finiti, per i quali non può succedere che, se B è sottoinsieme di A, ci sia una corrispondenza biunivoca tra A e B. Per gli insiemi infiniti può quindi essere che un insieme è in corrispondenza biunivoca con una sua parte.

Definizione Gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali si dicono **insiemi numerabili**. Gli insiemi infiniti che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ si dicono **insiemi non numerabili**.[25]

Veniamo ora alle cose più interessanti. Si può dimostrare che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ possono essere messi in corrispondenza biunivoca, e quindi i naturali sono tanti quanti gli interi.[26]

Anche $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ possono essere messi in corrispondenza biunivoca, come prova una celebre dimostrazione di Cantor. Quindi in altre parole $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono insiemi numerabili, al pari di $\mathbb{N}$

Invece $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{R}$ **non** possono essere messi in corrispondenza biunivoca, come prova un'elegantissima e brevissima dimostrazione di Cantor.[27]

Il fatto che l'insieme $\mathbb{R}$ non sia numerabile rende più complicate le cose ad esempio quando si vuole definire la probabilità. Però definirla sui reali è in certi campi assolutamente necessario.

Considerando che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che $\mathbb{Q}$ è numerabile ed $\mathbb{R}$ invece è non numerabile, si intuisce che la non numerabilità di $\mathbb{R}$ è dovuta alla non numerabilità dei numeri reali che non sono razionali: questi si chiamano *numeri irrazionali*.

Ora per concludere questa sezione vediamo ancora qualche esempio di uso dei simboli logici.

- Per definire l'inclusione tra insiemi possiamo scrivere

  $$B \subset A \quad \text{significa che} \quad \forall b \in B, \quad b \in A$$

  (si legge: "per ogni b appartenente a B, b appartiene ad A").

- La proposizione

  $$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$$

  si legge: "esiste almeno un x reale tale che x^2 è uguale a -1", ed è chiaramente falsa. La sua negazione, che è ovviamente vera, è: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq -1$.

  Osservazione Continuo ad utilizzare i due punti con il significato di "tale che". Farò sempre uso di questa notazione.

[24] Vuol dire che ad ogni elemento del primo insieme possiamo associare un elemento del secondo e, viceversa, ad ogni elemento del secondo possiamo associare uno del primo. Dobbiamo questa idea, cioè questo modo di confrontare gli insiemi infiniti, al grande matematico tedesco Georg Cantor, il padre della moderna teoria degli insiemi.

[25] Gli elementi di un insieme numerabile possono essere elencati, cioè disposti uno dopo l'altro, quelli non numerabili no, cioè un qualunque tentativo di elencarli ne lascia fuori alcuni.

[26] Una semplice legge di corrispondenza biunivoca tra i naturali e gli interi è ad esempio

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -(n-1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \qquad \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

[27] La dimostrazione usa il fatto che una possibile rappresentazione dei reali è quella degli allineamenti decimali (periodici e non periodici). Se tale rappresentazione viene fatta in base 2, cioè usando solo le cifre 0 e 1, ad ogni reale è associata una sequenza (spesso infinita) di 0 e 1. Bene, Cantor dimostra che i numeri naturali non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con le sequenze di 0 e 1.

- La proposizione
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$$
si legge: "per ogni x reale, x^2 è positivo", ed è falsa. La sua negazione è: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$.[28] La negazione è vera, dato che la rende vera $x = 0$.

- La proposizione
$$\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$$
si legge: "esiste almeno un r razionale tale che r^2 è uguale a 2", e dovrebbe essere noto allo studente che è falsa.

- Invece la proposizione
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad r^2 \in \mathbb{Q},$$
che si legge: "per ogni r razionale, r^2 è ancora razionale", è vera.

- La proposizione
$$\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$$
si legge: "esiste almeno un x reale che non è razionale", ed è vera (tutti i numeri irrazionali ne sono un esempio).

- La proposizione
$$\exists! x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$$
si legge: "esiste un solo x reale che non è razionale", ed è appunto falsa (gli irrazionali sono infiniti).

- La proposizione
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad r \in \mathbb{R}$$
si legge: "per ogni r razionale, r è anche reale", ed è vera.

- Si consideri la proposizione
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : m > n.$$
Essa è vera e dice in pratica che i numeri naturali sono infiniti. Quale sarebbe la sua negazione?[29]

- Infine la proposizione
$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0 \quad \exists! x \in \mathbb{R}, x \geq 0 : x^n = y$$
si legge: "per ogni numero naturale n e per ogni y reale non negativo, esiste un unico reale non negativo x che elevato alla n mi dà y". La proposizione è vera ed è ciò su cui si fonda la definizione, che rivedremo più avanti, di radice n-esima di un numero reale non negativo.

Quali ulteriori esempi di utilizzo dei simboli logici, rivediamo alcune definizioni insiemistiche viste poco fa.

▷ *Intersezione di insiemi.* Possiamo definire l'intersezione di A e B con
$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$
(si legge: $A \cap B$ è l'insieme degli x tali che x sta in A e anche in B).

▷ *Unione di insiemi.* Possiamo definire l'unione di A e B con
$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$
(si legge: $A \cup B$ è l'insieme degli x tali che x sta in A oppure in B).

▷ *Differenza di insiemi.* Possiamo scrivere
$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$
(si legge: $A \setminus B$ è l'insieme degli x tali che x sta in A ma non sta in B).

[28] Si noti e si ricordi bene che la negazione di $x > 0$ è $x \leq 0$, dato che sono tre le possibilità: x positivo, negativo o nullo.
[29] La negazione, che è falsa, sarebbe che c'è un n maggiore o uguale di tutti gli altri numeri naturali, e cioè in simboli:
$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \text{ si ha } m \leq n.$$
Si noti che la negazione si ottiene scambiando i quantificatori e scrivendo la negazione delle condizioni presenti ($\forall$ diventa $\exists$, $\exists$ diventa $\forall$ e $m > n$ diventa $m \leq n$.)

Da ultimo, un paio di implicazioni. Si consideri l'implicazione

$$A \cup B = A \Longrightarrow B \subset A.$$

Essa è vera, in quanto può essere dimostrata.[30]

Lo studente dimostri che vale in realtà la doppia implicazione, cioè $A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$.

Si consideri l'implicazione

$$x < 10 \Longrightarrow x^2 < 100.$$

Qui occorre chiarire una cosa fondamentale: in quale insieme numerico consideriamo l'implicazione. Lo studente osservi che, se la consideriamo in $\mathbb{N}$ (cioè se $x \in \mathbb{N}$), l'implicazione è vera mentre, se la consideriamo in $\mathbb{R}$ (o anche solo in $\mathbb{Z}$), essa è falsa e invito gli studenti a trovare un controesempio.

2.4 Intervalli della retta reale

Anticipo una notazione riguardante particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: gli *intervalli*. Nel corso, parlando di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, avremo quasi sempre a che fare con intervalli.

Supponiamo che a e b siano due numeri reali fissati, con $a \le b$. Per indicare gli intervalli, userò le seguenti notazioni, con il significato a fianco riportato:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a \ \land \ x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \ge a \ \land \ x \le b\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x \le b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \ge a \ \land \ x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a \ \land \ x \le b\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \le b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \ge a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \le b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Osservazione Si faccia attenzione che $+\infty$ e $-\infty$ non rappresentano numeri reali. Non c'è quindi il numero reale $+\infty$ o il numero reale $-\infty$ e non si può scrivere $x = +\infty$ o $x = -\infty$.

Osservazione Gli intervalli non costituiscono tutti i possibili sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, cioè in altre parole ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che non sono intervalli (come dovrebbe essere ovvio). Esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che non sono intervalli sono

$$\mathbb{N} \quad , \quad \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Q} \quad , \quad (0, 1) \cup (1, 2).$$ [31]

Si noti che l'intersezione di due intervalli è sempre un intervallo (oppure l'insieme vuoto), mentre l'unione di due intervalli può essere un intervallo oppure no. Anche la differenza di due intervalli può essere un intervallo oppure no. Lo studente provi a costruire alcuni esempi e ragionare su quanto affermato.

Osservazione Gli intervalli del tipo

$$(a, b) \quad , \quad [a, b] \quad , \quad [a, b) \quad , \quad (a, b]$$

sono intervalli *limitati*. Quelli del tipo

$$(a, +\infty) \quad , \quad [a, +\infty) \quad , \quad (-\infty, b) \quad , \quad (-\infty, b) \quad , \quad (-\infty, +\infty)$$

sono intervalli *illimitati*. Non ci si confonda tra i concetti di *illimitato* e *infinito*. Potremmo dire che *limitato/illimitato* si riferisce all'"estensione" dell'insieme mentre *finito/infinito* si riferisce al numero dei suoi elementi. Un intervallo $[a, b]$ (se $a < b$) è ad esempio limitato e infinito. Un intervallo del tipo $[a, +\infty)$ invece è illimitato e infinito.

[30] Se $A \cup B = A$, allora $A \cup B \subset A$, e quindi ogni elemento dell'insieme $A \cup B$, sia che stia in A, sia che stia in B, deve appartenere ad A, e questo prova che $B \subset A$.

[31] Si noti che quest'ultimo è l'unione di due intervalli, non un intervallo: sono due cose diverse.

3 Sommatorie e altro

In questa sezione presento una notazione importante in matematica e in genere in tutte le sue applicazioni. È una notazione formale molto utile, con la quale è bene prendere un po' di confidenza: il simbolo di somma e le scritture dette sommatorie. Gli studenti le utilizzeranno intensamente in particolare nel corso di Statistica. Dedico qualche riga anche all'analogo simbolo di prodotto.

3.1 Simbolo di somma (sommatorie)

Il simbolo

$$\sum_{i=m}^{n} \text{ESPRESSIONE}_i$$

con m, n naturali e $n \geq m$, si legge "sommatoria per i che va da m a n di ESPRESSIONE_i".

Indica che si deve procedere alla somma dei valori dell'espressione (ESPRESSIONE_i) che segue il simbolo e che dipende dall'indice i, per i valori indicati dell'indice. Quindi

$$\sum_{i=m}^{n} \text{ESPRESSIONE}_i = \text{ESPRESSIONE}_m + \text{ESPRESSIONE}_{m+1} + \ldots + \text{ESPRESSIONE}_n.$$

Ad esempio

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad , \quad \sum_{i=3}^{5} \frac{i}{1+2i} = \frac{3}{1+6} + \frac{4}{1+8} + \frac{5}{1+10} = \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} = \frac{920}{693}.$$

Le quantità a_i e $\frac{i}{1+2i}$, che figurano nelle precedenti scritture, si dicono l'*argomento della sommatoria*, mentre la variabile i, che prende i valori naturali successivi indicati nel simbolo, si dice *indice* della sommatoria.

Al posto di i si possono trovare altre lettere: $h, j, k, m, n, \ldots$.

Quando l'argomento è costante (indipendente dall'indice), come ad esempio in $\sum_{i=1}^{n} a$, la scrittura indica la somma di un certo numero di addendi uguali, cioè il prodotto dell'argomento per il numero di addendi. Così ad esempio abbiamo

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ volte}} = na \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{i=m}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n-m+1 \text{ volte}} = (n-m+1)a.$$ [32]

Nel caso in cui l'argomento contenga una parte costante sono possibili semplificazioni o riscritture della sommatoria. Ad esempio con

$$\sum_{k=1}^{N} a x_k \quad \text{(l'argomento è la costante } a \text{ per } x_k\text{)},$$

volendo questo dire $ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_N$, è possibile raccogliere la costante a e fare $a(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$. Quindi possiamo scrivere direttamente

$$\sum_{k=1}^{N} a x_k = a \sum_{k=1}^{N} x_k \quad \text{(}a \text{ si porta fuori del segno di sommatoria).}$$

Attenzione però che invece con

$$\sum_{k=1}^{N} (a + x_k),$$

che significa $(a + x_1) + (a + x_2) + \ldots + (a + x_N)$ si ha invece

$$\sum_{k=1}^{N} (a + x_k) = Na + \sum_{k=1}^{N} x_k.$$

È chiaro che in generale possiamo scrivere

$$\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{N} b_k \quad \text{(proprietà commutativa dell'addizione).}$$

[32] Il numero di interi compresi tra m ed n è dato da $n - m + 1$.

Si noti che invece non possiamo fare lo stesso se l'argomento è il prodotto di a_k per b_k. Cioè **non vale** l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{N}(a_k b_k) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \sum_{k=1}^{N} b_k.$$

È facile convincersi di questo: ad esempio non è vero che sia $a_1b_1 + a_2b_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$.

Osservazione A volte, se non è rilevante riportare gli estremi dell'indice, quindi i valori che l'indice assume (o questi sono sottintesi), si può scrivere la sommatoria semplicemente ad esempio con $\sum_k x_k$.

L'uso del simbolo di somma ha lo scopo di sintetizzare scritture che potrebbero essere lunghe e noiose da scrivere per esteso: può quindi ad esempio servire ad "accorciare" la scrittura di un polinomio di grado n, quando n è grande oppure quando n è generico.[33]

Un polinomio di grado n nella variabile x è un'espressione del tipo

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \text{ , con } a_n \neq 0,$$ [34]

dove $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri reali fissati, quindi noti, e x è una "variabile" i cui valori sono in un insieme numerico, in genere $\mathbb{R}$.

Usando il simbolo di somma si può scrivere

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ , con } a_n \neq 0.$$

Ad esempio

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 101x^{100} = \sum_{k=0}^{100}(k+1)x^k$$

oppure, che è lo stesso,

$$\sum_{h=1}^{101} hx^{h-1} \quad \text{(vedi la sottosezione che segue).}$$

3.1.1 Cambio di variabile in una sommatoria

Approfitto di questo esempio per presentare una tecnica che a volte incontrerete, quello che si può chiamare un *cambio di variabile* in una sommatoria. Consideriamo l'espressione

$$\sum_{n=1}^{N} nx^{n+1}.$$

Se poniamo $n + 1 = k$, da cui otteniamo $n = k - 1$, la sommatoria diventa

$$\sum_{k=2}^{N+1}(k-1)x^k.$$

3.1.2 Doppia sommatoria

Potrete incontrare nei vostri studi anche scritture come la seguente, in cui figurano una doppia sommatoria e un doppio indice:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}.$$

L'argomento della doppia sommatoria, cioè il termine $a_{i,j}$, sta ad indicare un'espressione che dipende sia da i sia da j (potrebbe essere ad esempio qualcosa come $i + j$ oppure $\frac{i}{i+j}$).

La doppia sommatoria comporta che per ogni valore di i da 1 ad n (l'indice esterno) occorre sviluppare la seconda sommatoria per j da 1 ad n (o per j da 0 ad m). Quindi ad esempio

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{6} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3}(a_{i,4} + a_{i,5} + a_{i,6}) \\ &= (a_{1,4} + a_{1,5} + a_{1,6}) + (a_{2,4} + a_{2,5} + a_{2,6}) + (a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6}).\end{aligned}$$

[33] Naturalmente per poter fare questo occorre che i coefficienti del polinomio si possano scrivere attraverso una funzione dell'indice.
[34] Se fosse $a_n = 0$ il polinomio non sarebbe più di grado n.

Osservazione Nel primo caso, anziché scrivere le due sommatorie $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, si può anche accorciare la scrittura con $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}$. Nel secondo caso questo non si può fare perché i valori che assume l'indice j non sono gli stessi dell'indice i. A volte si tralascia la virgola tra i e j e si scrive $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Non si tratta però del prodotto tra i e j.

Un caso interessante di uso della doppia sommatoria, caso che lo studente ritroverà nel corso di Statistica, è il seguente:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j .$$

Si osservi che nella sommatoria interna (quella di indice j), la quantità x_i è costante, in quanto non dipende dall'indice (che è j). Allora, come già visto prima, possiamo portare x_i fuori dalla sommatoria interna e scrivere

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\right).$$

Ora però possiamo osservare che nell'argomento della sommatoria esterna la quantità costituita dalla sommatoria in j è costante e quindi questa quantità può essere portata fuori dalla sommatoria in i. Si ottiene quindi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j, \tag{1}$$

cioè il prodotto delle due sommatorie.

Lo studente potrebbe verificare tutto questo ad esempio nel caso particolare di $n = 2$, cioè con $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j$, svolgendo anzitutto la scrittura di doppia sommatoria e poi verificando che quanto scritto è il prodotto delle due sommatorie.

Altra situazione caratteristica è la seguente. Consideriamo un quadrato del tipo

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 .$$

Osservando che ovviamente

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right),$$

ci troviamo nella stessa situazione vista poco fa, precisamente si tratta di un caso particolare del termine di destra dell'equazione (1). Quindi si può intanto scrivere

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j .$$

Ora osserviamo che l'argomento della doppia sommatoria, al variare degli indici tra 1 ed N, a volte è il prodotto di x con lo stesso indice ($x_i \cdot x_i$), le altre volte invece è il prodotto di x con indici diversi ($x_i \cdot x_j$ con $i \neq j$). Allora possiamo evidenziare questo scrivendo

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} x_i x_j . \tag{2}$$

Nell'ultima sommatoria di destra la scrittura significa ovviamente che gli indici variano tra 1 ed N, con l'ulteriore precisazione che devono assumere valori diversi.

Ma ora possiamo anche osservare che in questa ultima (doppia) sommatoria, essendo il prodotto commutativo, tutti i termini sono in realtà presenti due volte (ad esempio il termine $x_1 x_2$ è uguale al termine $x_2 x_1$) e quindi possiamo anche scrivere

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} x_i x_j . \tag{3}$$

Forse per "visualizzare" il tutto può essere utile riferirsi alla seguente tabella:

$$\begin{array}{cccc} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_N \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_Nx_1 & x_Nx_2 & \dots & x_Nx_N \end{array} \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{cccc} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_N \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_Nx_1 & x_Nx_2 & \dots & x_N^2 \end{array}$$

La doppia sommatoria $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j$ significa operare la somma di tutti gli elementi senza particolari ulteriori trasformazioni. La scrittura di destra della (2) significa fare prima la somma "sulla diagonale" dei quadrati e poi di tutti gli altri elementi fuori dalla diagonale. Infine la scrittura di destra della (3) significa fare la somma dei quadrati, e per il resto sommare i termini che sulla tabella stanno "sopra la diagonale", moltiplicando per 2 il risultato.

3.1.3 Scambio dei simboli di una doppia sommatoria

Qualche studente potrebbe farsi questa bella domanda: è possibile in generale scambiare i due simboli di una doppia sommatoria? Provate a convincervi, con qualche caso particolare, che la risposta è sì.[35]

Quindi possiamo dire che in generale vale che

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Un'altra utile formula, sempre in tema di cambio dell'ordine di sommatorie, è la seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}. \quad (4)$$

[36]

Si noti che la particolarità di questa situazione è che nella doppia sommatoria di sinistra l'indice della sommatoria interna (j) dipende da quello della sommatoria esterna (i). Si noti che anche in questo caso lo scambio tra le due sommatorie è possibile, ma non negli stessi termini immediati del caso più semplice.[37]

Non è difficile convincersi della validità della formula (4), basta ad esempio utilizzare una "tabella" in cui figurano, opportunamente disposti, tutti i termini della doppia sommatoria. La tabella potrebbe essere la seguente:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{array}$$

Ogni riga "perde" un elemento in quanto l'indice interno inizia da un valore che cresce con l'indice esterno. Quindi la seconda riga inizia da 2 (da $j = 2$), la terza da 3 e così via, l'ultima da n e quindi contiene un solo elemento.

Ci si rende conto della validità della (4) osservando che la doppia sommatoria di sinistra corrisponde alla somma degli elementi "per riga" (cioè sommo prima gli elementi della prima riga, poi quelli della seconda, e così via) mentre la doppia sommatoria di destra corrisponde alla somma degli elementi "per colonna".

3.1.4 Qualche utile formula

Vediamo ancora qualche utile formula in cui si fa uso del simbolo di sommatoria.

(a) La *somma dei primi N numeri naturali*:

$$S = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

La formula si può facilmente dimostrare col metodo di Gauss:[38]

[35] Non è difficile intuire che c'è di mezzo la proprietà commutativa dell'addizione.

[36] Gli studenti incontreranno anche questa situazione nel corso di Statistica.

[37] Nel caso precedente i e j vanno entrambi da 1 ad n. Qui i va da 1 ad n ma j va da i ad n. Dopo lo scambio delle sommatorie troviamo che j va da 1 ad n mentre i va da 1 a j.

[38] Si narra che Gauss ricavò questa formula quando aveva appena 9 anni.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (N-1) + N$$

ma anche, per la proprietà commutativa,

$$S = N + (N-1) + (N-2) + \ldots + 2 + 1$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze si ha

$$2S = \underbrace{(N+1) + (N+1) + \ldots + (N+1)}_{N \text{ volte}}$$

e quindi

$$S = \frac{N(N+1)}{2}.$$

(b) Può essere utile anche la formula che dà la *somma dei primi N quadrati dei numeri naturali.* Questa è

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

La dimostrazione di tale risultato non è così immediata.

(c) È interessante anche la *somma dei primi N cubi dei numeri naturali*:

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2.$$

Quindi la somma dei primi N cubi dei naturali è il quadrato della somma semplice dei primi N naturali.

3.2 Simbolo di prodotto (produttorie)

Quanto detto per le sommatorie si può ripetere, opportunamente adattato, per il simbolo di prodotto.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Ad esempio

$$\prod_{i=1}^{n} 2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ volte}} = 2^n.$$

Anche il simbolo di prodotto si può trovare ripetuto, o anche abbinato al simbolo di somma. Ad esempio

$$\prod_{i=1}^{3}\prod_{k=4}^{5}(i+k) = \prod_{i=1}^{3}(i+4)(i+5) = (1+4)(1+5)(2+4)(2+5)(3+4)(3+5) = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 = 70560$$

o ancora

$$\sum_{i=1}^{2}\prod_{k=1}^{3}\frac{i}{k} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i}{1}\cdot\frac{i}{2}\cdot\frac{i}{3}\right) = \sum_{i=1}^{2}\frac{i^3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} = \frac{3}{2}.$$

È forse il caso di osservare che, mentre (come per le somme) i doppi simboli di prodotto si possono scambiare, non è così quando abbiamo somme di prodotti (o prodotti di somme). Lo studente provi a verificarlo nell'esempio qui sopra.

4 Calcolo combinatorio

Possiamo dire che il Calcolo combinatorio è quel settore della matematica che studia la disposizione degli elementi di un insieme e soprattutto il numero delle possibili disposizioni. Ad esempio rientrano nel calcolo combinatorio le domande: "dato un insieme di n persone, in quanti modi queste si possono disporre in una fila allo sportello?" oppure "quante sono le possibili targhe automobilistiche che posso formare con due lettere iniziali dell'alfabeto inglese, seguite da tre cifre e seguite ancora da altre due lettere dell'alfabeto inglese?"

Passo subito a dare le prime definizioni.

4.1 Permutazioni di n elementi

Consideriamo un insieme di n elementi.

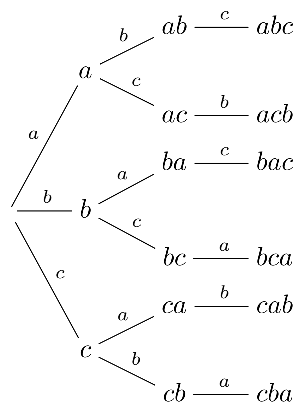
Definizione Si chiama **permutazione** degli n elementi un qualunque modo di posizionare *tutti gli n elementi* in una sequenza.

Non è difficile capire che il numero delle permutazioni di n elementi è dato da

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Tale numero si indica con il simbolo $n!$ e si legge "**fattoriale di** n" (o anche "n **fattoriale**)". Se indichiamo con P_n il numero delle permutazioni di n elementi, possiamo allora scrivere $P_n = n!$.

Si può visualizzare la "formazione" delle permutazioni, ad esempio con 3 elementi a, b, c attraverso l'*albero* riportato qui a fianco. Partendo dalla radice dell'albero (a sinistra) i primi rami rappresentano la scelta del primo elemento della permutazione (quindi a,b oppure c). Fatta la scelta del primo elemento, i secondi rami rappresentano la scelta del secondo elemento della permutazione. Ovviamente se al primo posto abbiamo scelto a, al secondo posto la scelta è tra b e c. I rami di terzo livello rappresentano la scelta dell'ultimo elemento della permutazione, scelta che con tre soli elementi è naturalmente obbligata. Così ci si rende conto facilmente di come con n elementi il numero delle permutazioni sia dato dal fattoriale di n. Infatti il primo elemento lo possiamo scegliere in n modi, il secondo in $n-1$ modi, e così via, il penultimo in 2 modi e l'ultimo in un solo modo. Abbiamo quindi il prodotto dei primi n numeri naturali.



Esempio In un ufficio postale ci sono 10 persone e un solo sportello aperto. In quanti modi le 10 persone possono disporsi in fila allo sportello?

Risposta: il numero è quello delle permutazioni di 10 elementi, cioè 10! (che risulta essere uguale a 3.628.800).[39]

Esempio In quanti modi 10 persone si possono disporre attorno ad un tavolo rotondo? A volte nelle questioni di calcolo combinatorio non è facile dare una risposta in quanto la domanda non è formulata con sufficiente chiarezza. Sulla domanda che ho appena posto ad esempio si potrebbe replicare: "Ma ritieni uguali due disposizioni in cui ognuno ha gli stessi vicini, cioè lo stesso vicino di destra e lo stesso vicino di sinistra?"[40] Se la risposta alla replica è no, allora la risposta alla domanda iniziale è facile: la situazione è la stessa della fila allo sportello e i possibili modi sono tanti quanti le permutazioni di 10 elementi. Se invece la risposta alla replica è sì, il numero dei modi è minore ed è un po' più complicatalo trovare la risposta. In questo caso il numero è

$$(n-1)!.$$

Lo si può capire in più modi diversi. Ne propongo due.

Fissiamo l'attenzione su uno di quelli seduti al tavolo e consideriamo le possibili sequenze di coloro che sono seduti alla sua destra (o sinistra, è ovviamente lo stesso). Il primo vicino lo possiamo scegliere in $n-1$ modi, il successivo in $n-2$ modi e così via fino al vicino di sinistra, che possiamo scegliere in un solo modo. Quindi complessivamente abbiamo

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \text{ modi, e cioè } (n-1)! \text{ modi.}$$

Un secondo modo di ragionare è quello di pensare a tutte le possibili disposizioni attorno al tavolo, ritenendo diverse due disposizioni anche se l'ordine dei vicini è lo stesso. Queste come detto sono $n!$. Ora, considerata una certa disposizione, per trovare tutte quelle a questa equivalenti basta pensare di far spostare le persone tutte insieme, mantenendo gli stessi vicini (facciamo "ruotare" la disposizione). Di queste rotazioni ne possiamo trovare n, compresa quella inizialmente scelta. Pertanto il numero $n!$ va diviso per n e si ottiene come prima $(n-1)!$.

Osservazione Ricordo che la definizione di fattoriale, anche se da un punto di vista combinatorio la cosa non ha alcun senso concreto, viene estesa anche ad $n = 0$. Si pone infatti (per definizione) $0! = 1$.

4.2 Disposizioni di n elementi di classe k

Consideriamo il solito insieme di n elementi e sia k un numero naturale minore di n.

Definizione Si chiama **disposizione semplice degli n elementi di classe k** un qualunque modo di posizionare in una sequenza k elementi degli n, senza mai ripetere un elemento già utilizzato.

[39] Ci si accorge presto che il fattoriale di n cresce molto rapidamente al crescere di n, molto più in fretta ad esempio di n^2.
[40] Si pensi che in due disposizioni in cui ognuno ha gli stessi vicini una persona potrebbe essere seduta in sedie diverse.

Se abbiamo ad esempio 5 elementi e $k = 3$ possiamo scegliere in 5 modi il primo posto, in 4 modi il secondo e in 3 modi il terzo. In generale il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe k è dato da

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Indicherò tale numero con il simbolo $D_{n,k}$, quindi abbiamo

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Esempio Quanti sono i numeri interi di 5 cifre distinte, utilizzando le cifre da 1 a 9?
Risposta: sono tante quante le disposizioni semplici di 9 elementi di classe 5 e cioè

$$D_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120.$$

Osservazione Se prendessimo $k = n$, ogni disposizione semplice sarebbe anche una permutazione e viceversa, e quindi potremmo scrivere $D_{n,n} = P_n$.

Osservazione Si noti che

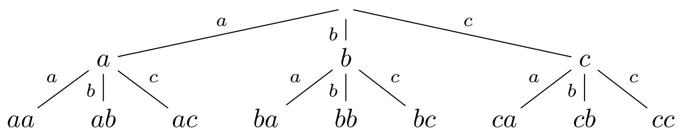
$D_{n,k} \cdot (n-k)! = n!$[41] da cui $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ e cioè $D_{n,k} = \dfrac{P_n}{P_{n-k}}$.

Di quest'ultima relazione, ricavata per così dire algebricamente, c'è un'interpretazione "combinatoria". Infatti ogni disposizione di classe k si può pensare ottenuta da una permutazione degli n elementi eliminando gli ultimi $n-k$ elementi della permutazione. Dato che ci sono P_{n-k} permutazioni che permutano gli ultimi $n-k$ elementi e mantengono fermi i primi k, ecco che il numero di disposizioni si ottiene dal quoziente P_n/P_{n-k}.

Consideriamo ancora un insieme di n elementi e sia k un qualunque numero naturale.

Definizione Si chiama **disposizione con ripetizione degli n elementi di classe k** un qualunque modo di posizionare in una sequenza k elementi degli n, anche eventualmente ripetendo elementi già utilizzati.

Se abbiamo ad esempio 3 elementi e $k = 2$ possiamo scegliere in 3 modi il primo posto e ancora in 3 modi il secondo, come visualizza l'albero qui sotto



In generale il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k è dato da

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

Indicherò tale numero con il simbolo $D^{(r)}_{n,k}$, quindi abbiamo

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k.$$

Esempio Quante sono le sequenze di testa/croce che si possono ottenere lanciando una moneta 5 volte?
Risposta: sono tante quante le disposizioni con ripetizione di 2 elementi di classe 5 e cioè

$$D^{(r)}_{2,5} = 2^5 = 32.$$

Esempio Quante sono le possibili schedine del Totocalcio (relative ad una data giornata)?
Risposta: sono tante quante le disposizioni con ripetizione di 3 elementi di classe 13 e cioè

$$D^{(r)}_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323.$$

[41] Infatti

$$D_{n,k} \cdot (n-k)! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{D_{n,k}} \cdot \underbrace{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-k)!} = n!.$$

4.3 Combinazioni di n elementi di classe k

Consideriamo ancora il solito insieme di n elementi e sia k un numero naturale minore di n.

Definizione Si chiama **combinazione degli n elementi di classe** k una qualunque scelta di k elementi degli n, *senza tenere conto dell'ordine in cui i k elementi compaiono.*

Osservazione Un modo equivalente di formulare la definizione è quello di utilizzare un concetto che abbiamo incontrato nella sezione precedente: una combinazione è sostanzialmente un *sottoinsieme* dell'insieme dato, quindi una combinazione di classe k è semplicemente un sottoinsieme di k elementi.

Un modo abbastanza semplice per stabilire quante sono le combinazioni di n elementi di classe k è pensare che la combinazione di classe k formata da certi assegnati k elementi raccoglie per così dire tutte le disposizioni formate con gli stessi k elementi (le disposizioni, pur avendo gli stessi elementi, sono diverse a causa dell'ordine in cui gli elementi compaiono). Quindi basta chiedersi quante sono le disposizioni formate con k elementi assegnati. Sono ovviamente le permutazioni di questi, e quindi sono $k!$. Allora il numero delle combinazioni di classe k si ottiene dividendo il numero delle disposizioni (semplici) di classe k per il numero delle permutazioni di k elementi, quindi si ha

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Questo quoziente si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$, e viene detto **coefficiente binomiale**. Il nome di coefficienti binomiali (detti anche **numeri di Pascal**), proviene dal fatto che queste quantità compaiono nello sviluppo della potenza del binomio $(a+b)^n$, come vedremo tra poco.

Possiamo quindi scrivere

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Osservazione Una (parziale) verifica di questo risultato: se consideriamo i sottoinsiemi formati da un solo elemento, questi sono evidentemente n. La formula qui sopra, per $k = 1$, fornisce infatti $C_{n,1} = \binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = n$.[42]

Osservazione Da come abbiamo ottenuto il numero delle combinazioni, appare scontato che $D_{n,k}$ sia divisibile per P_k, o che in altre parole il coefficiente binomiale sia un numero intero. Partendo però dalla definizione di $\binom{n}{k}$ questo fatto non è poi così ovvio.

Esempio Quante sono le possibili cinquine di carte da un mazzo di 52? Se sottintendiamo che l'ordine non conta, cioè una cinquina è caratterizzata solo dalle carte presenti, sono tante quante le combinazioni di 52 elementi di classe 5, ossia tanti quanti i sottoinsiemi di 5 elementi dell'intero mazzo di carte. Quindi sono $\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2.598.960$.

Osservazione Come fatto con il fattoriale, anche con i coefficienti binomiali si estende (per convenzione) la validità della formula al caso $k = 0$ e si pone $\binom{n}{0} = 1$.

I coefficienti binomiali hanno alcune classiche proprietà. Lo studente ne vedrà poi anche altre nel corso di Statistica. Qui ne presento soltanto un paio.

Se nel quoziente che definisce il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ moltiplichiamo sopra e sotto (cioè, meglio, numeratore e denominatore) per $(n-k)!$ otteniamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

che è un altro possibile modo di scrivere il coefficiente binomiale.

Proprietà interessante è la seguente proprietà di "simmetria" del coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

La dimostrazione di questa è assolutamente banale se usiamo l'ultima scrittura ottenuta del coefficiente binomiale. Più interessante è cercarne una giustificazione di tipo combinatorio. Si trova che anche così la giustificazione è immediata: basta pensare che per ogni sottoinsieme di k elementi che possiamo individuare, ne resta individuato immediatamente uno di $n-k$ elementi (lo studente dovrebbe intuire che è quello che abbiamo chiamato il complementare). Quindi il numero dei possibili sottoinsiemi di k elementi è uguale al numero dei possibili sottoinsiemi di $n-k$ elementi.

[42] Con questo non intendo assolutamente dire che abbiamo dimostrato la validità della relazione trovata. Abbiamo solo verificato che in un caso particolare (quello dei sottoinsiemi di un solo elemento) la formula funziona. Potremmo dire che abbiamo verificato una condizione necessaria per la validità della formula. Non è però sufficiente che essa valga in un caso particolare. La validità della formula sta nel procedimento (generale) che abbiamo seguito in precedenza. Quale altro caso particolare di verifica della formula possiamo osservare che, se consideriamo i sottoinsiemi di n elementi, cioè $k = n$, evidentemente ce n'è uno solo, e infatti dalla formula si ha $C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$.

4.4 Il binomio di Newton

Richiamo questo argomento, anche per l'uso che lo studente ne farà nel corso di Statistica.

Per la potenza n-esima di un binomio $a+b$ (da cui il nome di *coefficienti binomiali*) vale la seguente formula, detta **formula del binomio di Newton**:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \qquad (5)\end{aligned}$$

Non è difficile capire la validità della formula. Intanto pensiamo che

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ volte}}.$$

Ora immaginiamo di svolgere il prodotto.[43] Si tratta della "somma di tanti prodotti" (si usa la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione): in questa lunga addizione troveremo un termine a^n, poi ci sono termini del tipo $a^{n-1}b$, poi gli $a^{n-2}b^2$ e così via fino agli a^2b^{n-2}, gli ab^{n-1} e infine il b^n. Possiamo esprimerli tutti nella forma $a^{n-k}b^k$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1, n$. Questo era abbastanza semplice. La parte difficile è capire quanti sono i termini dello stesso tipo (tecnicamente si chiamano *monomi simili*). Consideriamo i monomi del tipo $a^{n-k}b^k$, che sono quelli ottenuti scegliendo nei fattori $(a+b)$, k volte b e $n-k$ volte a. Equivale a scegliere, in un insieme di n elementi, un sottoinsieme di k elementi, quelli diciamo dove scegliamo b, poi in tutti gli altri $n-k$ scegliamo a. Pertanto i monomi simili del tipo $a^{n-k}b^k$ sono tanti quanti questi sottoinsiemi, sono cioè $\binom{n}{k}$. Ecco spiegati anche i coefficienti della sommatoria (5).

In precedenza, parlando di insieme delle parti, ho anticipato che le parti di un insieme non vuoto di n elementi sono 2^n. Ora siamo in grado di dimostrare questo fatto. Lo si può fare usando la formula del binomio.

Il numero complessivo di sottoinsiemi di un insieme di n elementi è dato da

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Esercizi

- In quanti modi 10 persone possono mettersi in coda ad uno sportello?
- Quante sono le sestine che possono essere estratte al SuperEnalotto?[44]
- In quanti modi posso disporre 20 libri in uno scaffale che ne contiene solo 10?

[43] Lo studente provi a farlo con diciamo $n = 3$, cioè provi a svolgere il prodotto di $(a+b)(a+b)(a+b)$.

[44] Il SuperEnalotto estrae 6 numeri da un'urna che contiene da 1 a 90. I numeri, una volta estratti, non sono rimessi nell'urna (è un particolare importante). Non teniamo conto del Jolly e del SuperStar. Teniamo conto invece del fatto che, qualunque sia il risultato trovato, non conviene giocare!

5 Tabella riassuntiva dei simboli principali

Ecco una tabella che raccoglie i principali simboli utilizzati.

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$, cioè insieme dei naturali con lo zero
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali

Insiemi

$\emptyset$	insieme vuoto	l'insieme che non ha elementi
$\in$	appartiene	$a \in A$, l'elemento a appartiene all'insieme A
$\notin$	non appartiene	$a \notin A$, l'elemento a non appartiene all'insieme A
$\subset$	sottoinsieme	$B \subset A$, l'insieme B è sottoinsieme di A
$\cap$	intersezione tra insiemi	$A \cap B$ è l'insieme degli elementi che stanno in A e in B
$\cup$	unione tra insiemi	$A \cup B$ è l'insieme degli elementi che stanno in A o in B
$\setminus$	differenza tra insiemi	$A \setminus B$ è l'insieme degli elementi che stanno in A ma non in B
$\mathscr{P}A$ o 2^A	insieme delle parti di A	è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

Simboli logici

$\wedge$	e	$P \wedge Q$, proposizione formata da "P e Q"
$\vee$	o	$P \vee Q$, proposizione formata da "P oppure Q"
$\exists$	esiste	esiste almeno un ...
$\forall$	per ogni	per ogni ...
$\implies$	implica	$P \implies Q$, proposizione formata da "P implica Q"
$\iff$	se e solo se	$P \iff Q$, "P implica Q e viceversa"