# I-1 Polinomi

## Indice



In questa prima lezione parliamo di polinomi. Sono argomenti che avete già incontrato alla scuola secondaria: prodotti notevoli, la divisione di due polinomi, la regola di Ruffini, la fattorizzazione dei polinomi, il teorema di Ruffini.

A queste note, necessariamente schematiche, è bene che lo studente affianchi un testo di matematica per la scuola secondaria, per poter eventualmente rivedere in questo gli argomenti che dovessero presentare difficoltà e per svolgere qualche esercizio aggiuntivo.

## 1 Prodotti e potenze notevoli

Ricordiamo che si dice **monomio** nella variabile $x$ un'espressione algebrica del tipo $a \cdot x^k$ (di solito si scrive semplicemente $ax^k$), dove $a$ è in genere un numero reale e $k$ è un numero intero non negativo. L'esponente $k$ è il *grado* del monomio.

Un monomio nelle variabili $x, y$ è invece un'espressione algebrica del tipo $ax^m y^n$, dove ancora $a$ è un numero reale e $m$ ed $n$ sono numeri interi non negativi. Possiamo avere monomi in un qualunque numero di variabili, come ad esempio $-2xy^3z^2t^4$. Il grado di un monomio in più variabili è dato dalla somma degli esponenti delle variabili in esso presenti. Quindi il grado del polinomio appena indicato è 10. Il fattore numerico che precede le lettere è il *coefficiente*: se manca vale $+1$ o $-1$ a seconda del segno che precede le lettere.

Si dice **polinomio** una somma[1] di più monomi. Ovviamente si potrà specificare polinomio nelle variabili $x, y, \ldots$ se i monomi che lo costituiscono sono nelle variabili $x, y, \ldots$. Si dice **grado** del polinomio il massimo dei gradi dei monomi che figurano in esso. Ad esempio, il polinomio

$$-x^4 + 2x^3 - \frac{1}{3}x + 1 \quad \text{è un polinomio di grado 4.}$$

Ancora, il polinomio

$$xyz - 2y^2z^2 + 3x^2z^3$$

è di grado 5, dato che i monomi sono rispettivamente di grado 3,4,5.

[1] Dicendo somma generalmente si intende somma o differenza, dato che la differenza è la somma del primo addendo con l'opposto del secondo.

Siano $A, B, C$ polinomi.[2] Si hanno allora i seguenti *prodotti e potenze notevoli*:

$$\begin{aligned}
(A+B)(A-B) &= A^2 - B^2 \\
(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\
(A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\
(A+B)(A^2 - AB + B^2) &= A^3 + B^3 \\
(A-B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 - B^3 \\
(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\
(A-B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \\
(A+B+C)^2 &= A^2 + 2AB + 2AC + B^2 + 2BC + C^2.
\end{aligned}$$

**Osservazione** Lo studente si abitui subito a saper leggere un'identità in entrambi i versi. Quindi, ad esempio, nella prima sappia riconoscere una "somma per una differenza", riscrivendola come differenza di quadrati, o viceversa sappia vedere una differenza di quadrati, per scriverla come somma per differenza. La questione può apparire banale e ovvia ma lo è, appunto, solo in apparenza.

Consiglio agli studenti di svolgere autonomamente qualche esercizio in merito, utilizzando un qualunque testo della scuola secondaria.

**Esercizio 1.1** Calcolare i prodotti

(a) $(1-t)(2-t+t^3)$ (b) $(4x+5y)(4x-5y)$ (c) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)\left(3x - \frac{1}{2}y\right)$.

**Esercizio 1.2** Calcolare le potenze

(a) $(2z-3t)^2$ (b) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2$ (c) $(2-y)^3$.

**Esercizio 1.3** Calcolare i prodotti

(a) $(3-2x^2)(3+2x^2)$ (b) $(1-y)(1+y+y^2)$.

**Esercizio 1.4** Calcolare le potenze

(a) $(1-x+t)^2$ (b) $(y-3z)^3$.

## 2 Divisione tra polinomi

Quello che voglio qui richiamare è il procedimento euclideo di divisione tra due polinomi (in una variabile). Anzitutto dividere un polinomio $P(x)$ per un polinomio $D(x)$ ($D$ sta per *divisore*) significa determinare altri due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ ($Q$ sta per *quoziente* e $R$ sta per *resto*) tali che valga la seguente scrittura

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Occorre subito dire che questo in generale non è sempre possibile. La divisione è possibile se e solo se il grado di $P$ è maggiore o uguale del grado di $D$. In tal caso esiste un procedimento che permette di trovare i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$. Ora richiamo in dettaglio tale procedimento, e lo faccio direttamente su di un esempio. Prendiamo

$$P(x) = 8x^2 - 2x - 5 \qquad \text{e} \qquad D(x) = 2x - 3.$$

Occorre anzitutto scrivere i polinomi $P(x)$ e $D(x)$, ordinandoli per potenze decrescenti (i nostri sono già ordinati), separati da barre, come qui sotto indicato:

$$\begin{array}{ccc|cc}
8x^2 & -2x & -5 & 2x & -3 \\ \cline{4-5}
 & & & & 
\end{array}$$

[2] Qui, come avviene spesso in matematica, si indica con una lettera un intero oggetto. L'oggetto ora è un polinomio. Quindi $A, B, C$ rappresentano interi polinomi. Si noti inoltre che non scrivo ad esempio $A(x)$: se scrivessi $A(x)$ vorrebbe dire che mi riferisco soltanto a polinomi in una variabile, mentre qui le uguaglianze che seguono sono valide per polinomi in un numero qualunque di variabili.

Ora si divide il monomio di grado massimo di $P(x)$ (cioè $8x^2$) per il monomio di grado massimo del divisore $D(x)$ (cioè $2x$) e si scrive il risultato ($4x$) sotto quest'ultimo:

$$\begin{array}{ccc|cc} 8x^2 & -2x & -5 & 2x & -3 \\ \cline{4-5} & & & 4x & \end{array}$$

Ora si moltiplica il $4x$ per $2x$ e per $-3$ e si scrivono i risultati cambiati di segno, a sinistra, sotto i monomi dello stesso grado di $P(x)$, tracciando poi sotto una riga:

$$\begin{array}{ccc|cc} 8x^2 & -2x & -5 & 2x & -3 \\ \cline{4-5} -8x^2 & +12x & & 4x & \\ \cline{1-3} & & & & \end{array}$$

Ora si sommano (in colonna) i monomi dello stesso grado a sinistra e si riporta il risultato sotto alla riga prima tracciata:

$$\begin{array}{ccc|cc} 8x^2 & -2x & -5 & 2x & -3 \\ \cline{4-5} -8x^2 & +12x & & 4x & \\ \cline{1-3} // & 10x & -5 & & \end{array}$$

Ora si ripete il procedimento con il polinomio trovato sotto a sinistra e il divisore $D(x)$, iniziando dalla divisione dei monomi di grado massimo. Il risultato ($+5$) si scrive a destra, a fianco di $4x$. Quindi si ottiene:

$$\begin{array}{ccc|cc} 8x^2 & -2x & -5 & 2x & -3 \\ \cline{4-5} -8x^2 & +12x & & 4x & +5 \\ \cline{1-3} // & 10x & -5 & & \end{array}$$

Ora si moltiplica il $+5$ per quanto c'è nella riga sopra e si riporta il risultato cambiato di segno a sinistra, facendo poi la somma e scrivendo sotto il risultato:

$$\begin{array}{ccc|cc} 8x^2 & -2x & -5 & 2x & -3 \\ \cline{4-5} -8x^2 & +12x & & 4x & +5 \\ \cline{1-3} // & 10x & -5 & & \\ & -10x & +15 & & \\ \cline{2-3} & // & +10 & & \end{array}$$

A questo punto il procedimento ha termine, in quanto il polinomio trovato sotto a sinistra (10) non si può più dividere per il divisore $D(x)$, in quanto il suo grado è minore di quello di quest'ultimo. Il polinomio quoziente si trova sotto il divisore e il polinomio resto è invece quello in fondo a sinistra. Quindi nel nostro caso si ha $Q(x) = 4x + 5$ e $R(x) = 10$ e vale quindi la scrittura

$$8x^2 - 2x - 5 = (2x - 3)(4x + 5) + 10.$$

Vediamo un altro esempio. Vogliamo dividere $P(x) = x^3 - x + 1$ per $D(x) = x + 1$. In questo caso nel polinomio $P(x)$ "manca" il monomio di grado 2 (in realtà nessuno ci impedisce di scrivere $P(x) = x^3 + 0x^2 - x + 1$). Conviene allora lasciare un po' di spazio (o anche scrivere appunto $0x^2$) tra $x^3$ e $-x$. Si ottiene:

$$\begin{array}{cccc|cc} x^3 & & -x & +1 & x & +1 \\ \cline{5-6} -x^3 & -x^2 & & & x^2 & -x \\ \cline{1-4} // & -x^2 & -x & +1 & & \\ & +x^2 & +x & & & \\ \cline{2-4} & // & // & +1 & & \end{array}$$

Quindi $Q(x) = x^2 - x$ e $R(x) = 1$ e vale la scrittura

$$x^3 - x + 1 = (x + 1)(x^2 - x) + 1.$$

In qualche caso risulta $R(x) = 0$. Allora si dice che il polinomio $P(x)$ è *divisibile* per il polinomio $D(x)$ e ovviamente risulta $P(x) = D(x)Q(x)$.

Questo succede ad esempio nel seguente caso. Dividiamo il polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ per il polinomio $D(x) = x^2 + x + 1$. Si ottiene

$$\begin{array}{ccccc|ccc} x^4 & +x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x^2 & +x & +1 \\ \cline{6-8} -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 & +1 & \\ \cline{1-5} // & // & x^2 & +x & +1 & & & \\ & & -x^2 & -x & -1 & & & \\ \cline{3-5} & & // & // & // & & & \end{array}$$

Quindi $Q(x) = x^2 + 1$ e $R(x) = 0$ e vale la scrittura

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1).$$

**Esercizio 2.1** Dati $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ e $D(x) = x^2 + 1$, trovare quoziente e resto della divisione di $P$ per $D$.

**Esercizio 2.2** Dati $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ e $D(x) = 2x + 1$, trovare quoziente e resto della divisione di $P$ per $D$.

## 2.1 Regola di Ruffini

Quando il polinomio divisore $D(x)$ è del tipo $x + a$ (di primo grado con coefficiente di $x$ uguale a 1), il procedimento euclideo può essere sostituito dal procedimento detto *regola di Ruffini*, semplificazione formale di quello euclideo.

Anche qui descriviamo il metodo su di un esempio, uno di quelli visti poco fa, con $P(x) = x^3 - x + 1$ e $D(x) = x + 1$.

Si comincia scrivendo i coefficienti di $P(x)$ su una riga e, sulla riga sotto, più a sinistra, la *radice* del polinomio divisore $D(x)$;[3] quindi si tracciano tre righe, due verticali e una orizzontale, come nello schema qui sotto

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Ora si trascrive il primo coefficiente della prima riga sulla terza riga, lo si moltiplica per la radice del divisore in seconda riga $(-1)$ e si riporta il risultato in seconda riga, terza colonna, sotto lo 0:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Si sommano gli elementi nella terza colonna e si riporta il risultato $(-1)$ in terza riga. Poi si moltiplica quest'ultimo per la radice del divisore in seconda riga e si riporta il risultato in seconda riga, quarta colonna:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

Si sommano gli elementi nella quarta colonna e si riporta il risultato (0) in terza riga. Si moltiplica quest'ultimo per la radice del divisore in seconda riga e si riporta il risultato in seconda riga, quinta colonna. Infine si sommano gli elementi della quinta colonna:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Il procedimento è terminato. Ora basta ricostruire i polinomi quoziente e resto sulla base dei coefficienti. Il polinomio quoziente si legge sulla terza riga, tra le due barre verticali. Nel nostro caso si tratta di un polinomio di secondo grado ($P(x)$ è di grado 3 e $D(x)$ di grado 1), quindi il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 - x$. Il polinomio resto è una costante:[4] è la costante che si trova in basso a destra nella terza riga e ultima colonna.

[3] Una *radice* (o uno *zero*) di un polinomio è un valore che, sostituito alla variabile $x$, annulla il polinomio stesso. Quindi, nel caso del polinomio divisore $D(x) = x + a$, l'unica radice è $-a$.

[4] È sempre una costante quando si applica la regola di Ruffini, dato che il divisore è di primo grado e quindi il resto è di grado zero, cioè costante.

Pertanto si ha, come prima

$$x^3 - x + 1 = (x+1)(x^2 - x) + 1.$$

Vediamo un altro esempio: dividiamo $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ per il polinomio $D(x) = x - 2$. La regola di Ruffini porta a trovare la tabella

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & 3 & -2 \\ 2 & & 4 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

In questo caso il resto è 0, quindi il polinomio $P(x)$ è divisibile per $D(x)$. Si ha quindi

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = (x-2)(2x^2 - x + 1).$$

Ancora un esempio: dividiamo $P(x) = x^4 - x^2 + 1$ per il polinomio $D(x) = x + 10$. La regola di Ruffini porta a trovare la tabella

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -10 & & -10 & 100 & -990 & 9900 \\ \hline & 1 & -10 & 99 & -990 & 9901 \end{array}$$

Si ha quindi

$$x^4 - x^2 + 1 = (x+10)(x^3 - 10x^2 + 99x - 990) + 9901.$$

Quale ulteriore esempio, possiamo mettere a confronto i due procedimenti visti per la divisione dei polinomi:

$$(4x^3 - x^2 + 5x - 8) : (x - 1).$$

Procedimento euclideo

$$\begin{array}{cccc|ccc} 4x^3 & -x^2 & +5x & -8 & x & -1 & \\ \cline{5-7} -4x^3 & +4x^2 & & & 4x^2 & +3x & +8 \\ \cline{1-4} // & +3x^2 & +5x & -8 & & & \\ & -3x^2 & +3x & & & & \\ \cline{2-4} & // & +8x & -8 & & & \\ & & -8x & +8 & & & \\ \cline{3-4} & & // & // & & & \end{array}$$

Regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & -1 & 5 & -8 \\ 1 & & 4 & 3 & 8 \\ \hline & 4 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

Allora $Q(x) = 4x^2 + 3x + 8$ e $R(x) = 0$. Quindi entrambi i procedimenti portano a scrivere:

$$(4x^3 - x^2 + 5x - 8) : (x - 1) = 4x^2 + 3x + 8,$$

oppure

$$4x^3 - x^2 + 5x - 8 = (4x^2 + 3x + 8)(x - 1).$$

**Esercizio 2.3** Dividere $P(x) = x^4 - x^3 + x - 1$ per $D(x) = x - 1$ utilizzando la regola di Ruffini.

**Esercizio 2.4** Dividere $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ per $D(x) = x + 3$ utilizzando la regola di Ruffini.

## 3 Fattorizzazione di un polinomio

*Fattorizzare* o *scomporre* un polinomio significa scriverlo come prodotto di fattori, cioè come prodotto di due o più polinomi. La cosa può essere utile in molti casi, come ad esempio per risolvere equazioni e disequazioni, per semplificare le frazioni algebriche, ed in svariate altre occasioni.

Si richiamano qui, attraverso alcuni esempi, le principali regole, che lo studente dovrebbe già conoscere: se così non fosse, sarà utile rivedere l'argomento su testi di scuola secondaria.

1. **Raccoglimento semplice.** Consiste nel mettere in evidenza (raccogliere), come primo fattore, un monomio divisore del polinomio.

**Esempi**

- $2x^4 - 8x^2 + 10x = 2x(x^3 - 4x + 5)$
- $3x^2y - 9xy^2 + 6xyz = 3xy(x - 3y + 2z)$
- $4a(3x - y) + 5b(3x - y) = (3x - y)(4a + 5b)$
- $\frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{6}x^3y + \frac{7}{4}xy^3 = \frac{1}{12}xy(18x - 2x^2 + 21y^2)$.

**Osservazione** Nell'ultimo esempio, raccogliendo $\frac{1}{12}xy$ invece di $\frac{1}{2}xy$, si ottiene tra parentesi un polinomio con coefficienti interi, il che può facilitare una successiva fattorizzazione. Lo studente cerchi di arrivare da solo alla regola generale con cui, dato un polinomio a coefficienti frazionari, un raccoglimento porta ad un polinomio a coefficienti interi.

2. **Scomposizione di binomi**

   (a) *Differenza di quadrati:* $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

   **Esempi**

   - $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$
   - $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$
   - $3y^3 - 12y = 3y(y^2 - 4) = 3y(y - 2)(y + 2)$.
   - $a^4 - 16b^4 = (a^2 - 4b^2)(a^2 + 4b^2) = (a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2)$
   - $\frac{5}{2}x^3y^2 - \frac{2}{5}x = \frac{1}{10}x(25x^2y^2 - 4) = \frac{1}{10}x(5xy - 2)(5xy + 2)$

   **Osservazioni** Nel quarto esempio il fattore finale $(a^2+4b^2)$ non è stato scomposto, perché è somma di due quadrati e ricordiamo che la somma di due quadrati non è fattorizzabile. Nel quinto esempio è stato fatto anzitutto un raccoglimento: si è raccolto $\frac{1}{10}x$ per avere poi coefficienti interi (vedi osservazione precedente).

   (b) *Somma e differenza di cubi:*
   $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.
   $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

   **Esempi**

   - $27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$
   - $8a^3 + b^3 = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$
   - $x^3y^3 - 27 = (xy - 3)(x^2y^2 + 3xy + 9)$
   - $2x^4 + 16x = 2x(x^3 + 8) = 2x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
   - $2x^4y - \frac{1}{4}xy^4 = \frac{1}{4}xy(8x^3 - y^3) = \frac{1}{4}xy(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

3. **Scomposizione di trinomi**

   (a) *Quadrati di binomi:*
   $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$.
   $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$.

   **Esempi**

   - $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x - 4)^2$
   - $4a^2 + 4a + 1 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 = (2a + 1)^2$
   - $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2y + \frac{9}{2}xy^2 = \frac{1}{2}x(x^2 - 6xy + 9y^2) = \frac{1}{2}x(x - 3y)^2$

   (b) *Trinomi particolari:* $x^2 + (m + n)x + m \cdot n = (x + m)(x + n)$.

   **Esempi**

   - $x^2 + 4x + 3 = x^2 + (1 + 3)x + 1 \cdot 3 = (x + 1)(x + 3)$
   - $x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-3 - 4)x + (-3)(-4) = (x - 3)(x - 4)$
   - $x^2 + 4x - 5 = x^2 + (5 - 1)x + 5 \cdot (-1) = (x + 5)(x - 1)$

**Osservazione** La scomposizione di trinomi di questo ultimo tipo può essere naturalmente ottenuta facendo ricorso alle equazioni di secondo grado.

4. **Scomposizione di quadrinomi**

   (a) *Raccoglimento parziale* o *doppio raccoglimento*:
   $$am + bm + an + bn = m(a + b) + n(a + b) = (m + n)(a + b).$$
   $$am - bm + an - bn = m(a - b) + n(a - b) = (m + n)(a - b).$$

   **Esempi**

   - $2x - 2y - x^2 + xy = 2(x - y) - x(x - y) = (x - y)(2 - x)$
   - $3ab^2 + 6b - 2a^2b - 4a = 3b(ab + 2) - 2a(ab + 2) = (ab + 2)(3b - 2a)$
   - $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{2}x(x + 3y) + \frac{1}{3}(x + 3y) = \frac{1}{6}(3x + 2)(x + 3y)$

   (b) *Cubi di binomi:*
   $$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3.$$
   $$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3.$$

   **Esempi**

   - $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x)^3 + 3(x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = (x + 1)^3$
   - $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2y + 3(2x)y^2 - y^3 = (2x - y)^3$
   - $2a^4 - 12a^3 + 24a^2 - 16a = 2a(a^3 - 6a^2 + 12a - 8) = 2a(a - 2)^3$

   (c) *Differenza di quadrati:*
   $$A^2 + 2AB + B^2 - C^2 = (A + B)^2 - C^2 = (A + B - C)(A + B + C).$$
   $$A^2 - 2AB + B^2 - C^2 = (A - B)^2 - C^2 = (A - B - C)(A - B + C).$$
   $$A^2 - B^2 - 2BC - C^2 = A^2 - (B + C)^2 = (A - B - C)(A + B + C).$$
   $$A^2 - B^2 + 2BC - C^2 = A^2 - (B - C)^2 = (A - B + C)(A + B - C).$$

   **Esempi**

   - $x^2 + 2x + 1 - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 - y)(x + 1 + y)$
   - $4a^2 - b^2 + 6b - 9 = (2a)^2 - (b^2 - 6b + 9) = (2a)^2 - (b - 3)^2 = (2a - b + 3)(2a + b - 3)$
   - $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = (x + y)^2 - 1^2 = (x + y - 1)(x + y + 1)$
   - $9a^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 9a^2 - (2x - 1)^2 = (3a - 2x + 1)(3a + 2x - 1)$

**Esercizio 3.1** Fattorizzare i polinomi

(a) $4x^2 - 4x + 1$  (b) $4x^2 - 9$  (c) $z^4 + z^6$.

**Esercizio 3.2** Fattorizzare i polinomi

(a) $4p^2 - 20pq + 25q^2$  (b) $\dfrac{8}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

**Esercizio 3.3** Fattorizzare i polinomi

(a) $x^3 - 2x^2 + x$  (b) $4x^2y^2 - 4xyzt + z^2t^2$.

**Esercizio 3.4** Fattorizzare i polinomi

(a) $3x^2 - \dfrac{3}{4}$  (b) $a^2b^2 - 4t^2$.

**Esercizio 3.5** Fattorizzare il polinomio
$$x^4y^2t^2 - z^4t^2.$$

**Esercizio 3.6** Fattorizzare il polinomio
$$1 - p^4q^4.$$

**Esercizio 3.7** Fattorizzare i seguenti polinomi

(a) $2x^3y^2 - x^4y^3 + 3x^2y^5$

(b) $81x^2y^4 - 64z^6$

(c) $\frac{9}{2}z^2t^3 - 2t$

(d) $\frac{1}{3}x^4y^3 + 2x^2y^2z + 3yz^2$

# 4 Teorema di Ruffini

Ricordiamo, perché utile in varie occasioni, il seguente importante

**Teorema (di Ruffini)**: se un polinomio $P(x)$ si annulla per $x = a$, con $a$ numero reale qualsiasi, allora $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x - a)$.

Ad esempio, sia $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 16$. Poiché risulta $P(2) = 0$, si può affermare che $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x - 2)$. Infatti si verifica facilmente che

$$(3x^3 - 2x^2 - 16) : (x - 2) = (3x^2 + 4x + 8)$$

e perciò

$$3x^3 - 2x^2 - 16 = (x - 2)(3x^2 + 4x + 8).$$

**Osservazione** L'esempio mostra come sia possibile, se sono verificate le ipotesi del teorema di Ruffini, scomporre un polinomio che con le normali regole di scomposizione dei polinomi non si saprebbe fattorizzare.

La ricerca degli eventuali numeri $a$ che rendono nullo il polinomio $P(x)$ (come detto si chiamano *radici* o *zeri* di $P(x)$) e che portano alla sua scomposizione va fatta tenendo presente quanto segue:

- se ci sono zeri interi, allora essi vanno cercati tra i divisori del termine noto di $P(x)$;
- se ci sono zeri frazionari del tipo $\frac{m}{n}$, allora i possibili $m$ vanno cercati tra i divisori del termine noto di $P(x)$ ed i possibili $n \neq 1$ vanno cercati tra i divisori del coefficiente del termine di grado massimo di $P(x)$.

**Osservazione** Si rifletta attentamente su quanto appena detto: un polinomio non ha necessariamente zeri interi o frazionari. Se però ci sono zeri interi o frazionari, quanto detto permette di restringerne la ricerca ad un numero solitamente ragionevole di tentativi.

Vediamo un esempio. I possibili zeri interi di $P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ sono fra gli elementi dell'insieme $\{-1, 1\}$. I possibili zeri frazionari di $P(x)$ sono fra gli elementi dell'insieme $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\}$.

Si trova che gli zeri sono 1, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Pertanto[5]

$$P(x) = 6(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 6(x - 1)\left(\frac{2x + 1}{2}\right)\left(\frac{3x - 1}{3}\right) = (x - 1)(2x + 1)(3x - 1).$$

Un altro esempio. Se consideriamo il polinomio $P(x) = x^3 + x + 1$, gli eventuali zeri interi e razionali stanno nell'insieme $\{-1, 1\}$, ma si vede subito che nessuno di questi due valori è uno zero di $P(x)$. A questo punto possiamo dire è che $P(x)$ non ha zeri interi o razionali. Può avere zeri non razionali, ma i metodi in nostro possesso non ci consentono per il momento né di dire che sicuramente ci sono né tanto meno di trovarli.

**Osservazione** Chiaramente, dopo aver trovato con il teorema di Ruffini che un polinomio è divisibile per un fattore $(x - a)$, si può effettuare la divisione attraverso la regola di Ruffini.

**Esercizio 4.1** Quali dei seguenti polinomi sono divisibili per $(x - 1)$?

$$3x^2 - 2x + 1 \qquad 5x^3 + 2x - 7 \qquad x^{12} - x^6 + x - 1.$$

**Esercizio 4.2** Dopo aver verificato che il polinomio $P(x) = x^5 - 2x^3 - 1$ è divisibile per $(x + 1)$, trovare con la regola di Ruffini il polinomio quoziente.

# 5 Completamento del quadrato

Concludo questi primi richiami con un metodo che verrà utilizzato più avanti e che può risultare utile in molti casi. Si tratta di mettere in evidenza, in un polinomio di secondo grado, un quadrato aggiungendo e togliendo opportunamente una quantità. Non formalizzo la questione, ma mi limito ad illustrare il metodo in qualche caso particolare.

Consideriamo il polinomio

$$x^2 - 4x + 1.$$

[5] Si faccia attenzione! Se il coefficiente del termine di grado massimo è diverso da 1 (in questo caso è 6) occorre tenere conto di questo coefficiente nella fattorizzazione del polinomio.

Esso non è il quadrato di un binomio, ma in esso possiamo dire che si nasconde il quadrato di un binomio, a meno di una quantità additiva costante.[6] Possiamo vedere nel primo monomio il quadrato di $x$ e nel secondo monomio il doppio prodotto di $x$ per $-2$. Il polinomio dato non è lo sviluppo del quadrato di un binomio perché il suo terzo monomio $(+1)$ non è il quadrato di $-2$. Ma allora, aggiungendo e togliendo tale quadrato, cioè 4, otteniamo

$$x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3.$$

Anticipo che questo metodo lo useremo per risolvere le equazioni di secondo grado. Infatti l'equazione

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

equivale a questo punto all'equazione $(x-2)^2 - 3 = 0$, cioè $(x-2)^2 = 3$, la cui soluzione è immediata.[7]

Vediamo qualche altro esempio.

- Con il polinomio $x^2 + 6x - 2$ possiamo scrivere

$$x^2 + 6x - 2 = x^2 + 6x + 9 - 9 - 2 = (x+3)^2 - 11.$$

- Con il polinomio $x^2 - 3x + 2$ si presenta un piccolo problema: il secondo monomio $(-3x)$ non sembra un doppio prodotto. In realtà lo è: basta pensare che $-3x = 2\left(-\frac{3}{2}\right)x$.[8] Allora possiamo scrivere

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

- Con il polinomio $x^2 + x + 1$ possiamo dunque scrivere

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

- Se $x^2$ ha un coefficiente diverso da 1, possiamo prima raccogliere tale coefficiente e poi seguire il metodo di prima. Ad esempio, con il polinomio $3x^2 + 6x + 9$ possiamo fare

$$3x^2 + 6x + 9 = 3(x^2 + 2x + 3) = 3(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3) = 3\big((x+1)^2 + 2\big).$$

- Ancora, con il polinomio $2x^2 - x + 1$ possiamo fare

$$2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right].$$

- Analogamente

$$3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right].$$

- Quale ultimo esempio, è chiaro che il metodo può essere applicato anche con un polinomio di secondo grado in due variabili $x, y$, privo del monomio in $xy$. Si consideri il polinomio

$$x^2 + y^2 - 10x + 12y + 60.$$

  Possiamo applicare il completamento del quadrato sia alla $x$ sia alla $y$ e scrivere

$$x^2 + y^2 - 10x + 12y + 60 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 12y + 36 - 25 - 36 + 60 = (x-5)^2 + (y+6)^2 - 1.$$

  Lo studente ricordi questo esempio: ci sarà utile quando parleremo di circonferenze.

**Esercizio 5.1** Completare i quadrati nei polinomi

(a) $x^2 + 2x - 3$ (b) $x^2 + 8x + 1$

(c) $x^2 + x + 1$ (d) $x^2 - 5x - 2$

[6] A meno di una quantità additiva costante significa che il quadrato che otteniamo differisce dal polinomio originario soltanto per una quantità indipendente dalla variabile del polinomio, quindi costante.

[7] La soluzione di $(x-2)^2 = 3$ è $x - 2 = \pm\sqrt{3}$, cioè $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

[8] Ogni numero è doppio della sua metà.

# 6 Soluzioni degli esercizi

**Esercizio 1.1**

(a) Si applica la proprietà distributiva e si ha

$$(1-t)(2-t+t^3) = 2-t+t^3-2t+t^2-t^4 = 2-3t+t^2+t^3-t^4.$$

(b) Abbiamo la somma di due monomi per la rispettiva differenza. Il risultato è la differenza dei quadrati:

$$(4x+5y)(4x-5y) = 16x^2-25y^2.$$

(c) Con la proprietà distributiva si ha

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(3x-\frac{1}{2}y\right) = \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}xy+2xy-\frac{1}{3}y^2 = \frac{3}{2}x^2+\frac{7}{4}xy-\frac{1}{3}y^2.$$

**Esercizio 1.2**

(a) È il quadrato di un binomio:

$$(2z-3t)^2 = 4z^2-12zt+9t^2.$$

(b) È ancora il quadrato di un binomio:

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}.$$

(c) È il cubo di un binomio:

$$(2-y)^3 = 8-12y+6y^2-y^3.$$

**Esercizio 1.3**

(a) Qui si potrebbe svolgere il prodotto applicando come in precedenza la proprietà distributiva. Però si può anche riconoscere che si tratta della differenza di due monomi per la rispettiva somma. Quindi si ha

$$(3-2x^2)(3+2x^2) = 9-4x^4.$$

(b) Anche nel secondo si può riconoscere un caso caratteristico: la scomposizione della differenza di due cubi. Quindi

$$(1-y)(1+y+y^2) = 1-y^3.$$

**Esercizio 1.4**

(a) Il primo è il quadrato di un trinomio:

$$(1-x+t)^2 = 1+x^2+t^2-2x+2t-2xt.$$

(b) Il secondo è il cubo di un binomio:

$$(y-3z)^3 = y^3-9y^2z+27yz^2-27z^3.$$

**Esercizio 2.1**

Con la divisione di Euclide si ottiene il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
x^4 & +x^3 & -x^2 & +x & -1 & x^2 & +1 & \\ \cline{6-8}
-x^4 & & -x^2 & & & x^2 & +x & -2 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & -2x^2 & +x & -1 & & & \\
 & -x^3 & & -x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & -2x^2 & & -1 & & & \\
 & & 2x^2 & & +2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 1 & & &
\end{array}$$

Quindi il quoziente è $Q(x) = x^2+x-2$ e il resto $R(x) = 1$. Vale cioè l'identità

$$x^4+x^3-x^2+x-1 = (x^2+1)(x^2+x-2)+1.$$

**Esercizio 2.2**

Con la divisione di Euclide si ottiene il seguente schema:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
2x^3 & -3x^2 & +5x & -1 & 2x & +1 & \\ \cline{5-7}
-2x^3 & -x^2 & & & x^2 & -2x & +\frac{7}{2} \\ \cline{1-4}
 & -4x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & +4x^2 & +2x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 7x & -1 & & & \\
 & & -7x & -\frac{7}{2} & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\frac{9}{2} & & &
\end{array}
$$

Quindi il quoziente è $Q(x) = x^2 - 2x + \frac{7}{2}$ e il resto $R(x) = -\frac{9}{2}$. Vale cioè l'identità

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (2x+1)\left(x^2 - 2x + \frac{7}{2}\right) - \frac{9}{2}.$$

**Esercizio 2.3**

Ecco la tabella:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

La tabella dice che il quoziente della divisione è il polinomio $Q(x) = x^3 + 1$ e il resto è zero. Quindi possiamo scrivere che $x^4 - x^3 + x - 1 = (x-1)(x^3+1)$, come si trova facilmente anche fattorizzando il polinomio iniziale.

**Esercizio 2.4**

Ecco la tabella:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
-3 & & -9 & 21 & -66 \\ \hline
 & 3 & -7 & 22 & -66
\end{array}
$$

La tabella dice che il quoziente della divisione è il polinomio $Q(x) = 3x^2 - 7x + 22$ e il resto è $-66$. Quindi possiamo scrivere che $3x^3 + 2x^2 + x = (x+3)(3x^2 - 7x + 22) - 66$.

**Esercizio 3.1**

(a) Si ha $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$; poi (b) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$ e infine (c) $z^4 + z^6 = z^4(1+z^2)$.

**Esercizio 3.2**

(a) Si ha

$$4p^2 - 20pq + 25q^2 = (2p - 5q)^2.$$

(b) Si ha

$$\frac{8}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(4x^2 - 4x + 1) = \frac{2}{3}(2x-1)^2.$$

**Esercizio 3.3**

Per la (a) si ha

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

Per la (b) si ha

$$4x^2y^2 - 4xyzt + z^2t^2 = (2xy - zt)^2.$$

**Esercizio 3.4**

(a) Si ha

$$3x^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(4x^2 - 1) = \frac{3}{4}(2x-1)(2x+1).$$

(b) Si ha

$$a^2b^2 - 4t^2 = (ab - 2t)(ab + 2t).$$

**Esercizio 3.5**

Si ha
$$x^4y^2t^2 - z^4t^2 = t^2(x^4y^2 - z^4) = t^2(x^2y - z^2)(x^2y + z^2).$$

**Esercizio 3.6**

Si ha
$$1 - p^4q^4 = (1 - p^2q^2)(1 + p^2q^2) = (1 - pq)(1 + pq)(1 + p^2q^2).$$

**Esercizio 3.7**

Si ha

(a) $2x^3y^2 - x^4y^3 + 3x^2y^5 = x^2y^2(2x - x^2y + 3y^3)$

(b) $81x^2y^4 - 64z^6 = (9xy^2 - 8z^3)(9xy^2 + 8z^3)$

(c) $\frac{9}{2}z^2t^3 - 2t = \frac{1}{2}t(9z^2t^2 - 4) = \frac{1}{2}t(3zt - 2)(3zt + 2)$

(d) $\frac{1}{3}x^4y^3 + 2x^2y^2z + 3yz^2 = \frac{1}{3}y(x^4y^2 + 6x^2yz + 9z^2) = \frac{1}{3}y(x^2y + 3z)^2$.

**Esercizio 4.1**

Ricordo che un polinomio $P$ è divisibile per $(x - 1)$ se e solo se risulta $P(1) = 0$. Indicando allora con $P_1$, $P_2$ e $P_3$ i tre polinomi nell'ordine, sono divisibili per $(x - 1)$ soltanto i polinomi $P_2$ e $P_3$, dato che $P_2(1) = P_3(1) = 0$, mentre $P_1(1) \neq 0$.

**Esercizio 4.2**

Dato che $P(-1) = 0$, il polinomio $P$ è divisibile per $(x + 1)$. Con la regola di Ruffini si ha:

$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array}$$

Pertanto il polinomio quoziente è $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$.

**Esercizio 5.1**

Si ha

(a) $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$

(b) $x^2 + 8x + 1 = x^2 + 8x + 16 - 16 + 1 = (x + 4)^2 - 15$

(c) $x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

(d) $x^2 - 5x - 2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$.