I-2 Potenze, Radicali e Logaritmi

Indice

1 Potenze e Radicali

In questa sezione parliamo di altri argomenti che sono stati affrontati nella scuola secondaria. Anche qui lo studente, in caso senta la necessità di approfondire qualche argomento, può affiancare a queste pagine un testo già utilizzato in precedenza.

1.1 Potenze con esponente naturale

Richiamo qui alcuni concetti che dovrebbero essere già largamente noti allo studente.

Se a è un numero reale fissato, si dice *potenza di base a ed esponente naturale n* ($n = 1, 2, 3, \ldots$), il numero

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \quad , \text{se } n > 1$$

o il numero a stesso, se $n = 1$.

Ecco alcune proprietà delle potenze appena definite.
Qualunque sia il numero a e qualunque siano i naturali m, n, si ha:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

   Con $a \neq 0$ e $n > m$, si ha ancora:

3. $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

   Qualunque siano i numeri a e b e il naturale n:

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

   Qualunque siano a e $b \neq 0$, qualunque sia n, si ha infine:

5. $(a : b)^n = a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Osservazione Ribadisco un'osservazione già fatta nella sezione precedente: lo studente si abitui a saper utilizzare queste regole "nei due versi": tutte le identità qui sopra possono essere utilizzate da sinistra a destra o da destra a sinistra.

1.2 Potenze con esponente intero

Il concetto di potenza, definita poco fa con esponente naturale, si può generalizzare al caso dell'esponente intero. Questa prima generalizzazione si ottiene ponendo

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \text{ , se } a \neq 0 \qquad ; \qquad a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \text{ , se } a \neq 0.$$

dove n è un numero naturale.

Attenzione che la scrittura 0^0 non viene definita e resta per ora (lo sarà anche nel seguito) priva di significato.

Con le definizioni appena viste abbiamo definito le *potenze con esponente intero*, cioè il simbolo a^z, con $z \in \mathbb{Z}$. Queste potenze hanno, per effetto della definizione data, le stesse proprietà delle potenze con esponente naturale.

Osservazione La terza proprietà delle potenze con esponente naturale richiede che sia $n > m$. Con l'introduzione del concetto di potenza ad esponente intero, la medesima proprietà può essere applicata anche se $n \leq m$.

1.3 Radicali

Cominciamo con una definizione fondamentale.

Si dice **radice n-esima** ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) di un numero reale $a \geq 0$ quel numero reale b, pure lui *non negativo*, la cui potenza di esponente n è uguale ad a: tale numero viene indicato col simbolo $\sqrt[n]{a}$. [1]

In simboli quindi:

$$\text{se } a \geq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \text{ allora scrivere } b = \sqrt[n]{a}, \text{ con } b \geq 0, \text{ significa che } b^n = a.$$

Ad esempio, $\sqrt{4} = 2$, perché $2^2 = 4$. Attenzione che scrivere $\sqrt{4} = -2$ (o $\sqrt{4} = \pm 2$), in base alla definizione data, non ha alcun senso. Quindi la radice n-esima di un numero non negativo è unica ed è un numero non negativo.

Osservazione Al simbolo $\sqrt[n]{a}$ si può dare significato anche quando $a < 0$, ma solo con n dispari ($n = 3, 5, \ldots$):[2] in questo caso il simbolo $\sqrt[n]{a}$ indica il numero reale *negativo* b, tale che $b^n = a$. Si vede facilmente che, se $a < 0$ ed n è dispari, allora $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$. Quindi ad esempio $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Nessun significato viene attribuito al simbolo $\sqrt[n]{a}$, quando $a < 0$ ed $n = 2, 4, \ldots$; nessun significato ha pure il simbolo $\sqrt[0]{a}$, qualunque sia a. Quindi scritture come $\sqrt{-4}$, $\sqrt[0]{5}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[0]{-2}$, sono prive di significato.

1.4 Proprietà dei radicali

Premettiamo alle proprietà dei radicali un richiamo importante: dato un numero reale x, si definisce *valore assoluto* o *modulo* di x la quantità

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Osservazione Dalla definizione segue che $|x|$ è una quantità sempre non negativa e nulla se e solo se $x = 0$.

1. **Proprietà fondamentali.**

   Dalle definizioni del simbolo $\sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, oppure con $a < 0$, seguono facilmente le due seguenti proprietà:

   (a) $\sqrt[n]{b^n} = \begin{cases} b & \text{, se } n \text{ è dispari} \\ |b| & \text{, se } n \text{ è pari} \end{cases}$

   Si noti che $\sqrt[n]{b^n}$ è definita qualunque sia b, dato che, se n è pari, allora $b^n \geq 0$, e, se n è dispari, la radice è comunque definita, essendo di indice dispari.

   (b) $(\sqrt[n]{a})^n = a$. (è chiaro che, se n è pari, deve essere $a \geq 0$.)

   Ad esempio: $\sqrt[3]{2^3} = 2$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$; $\sqrt[4]{2^4} = 2$; $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$
   $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$; $(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$; $(\sqrt[4]{2})^4 = 2$.

   Lo stesso se il radicale ha per argomento una quantità che contiene una variabile x.

[1] La definizione è giustificata dal fatto che si può dimostrare che in $\mathbb{R}$, dato un numero $a \geq 0$ e un $n \in \mathbb{N}$, esiste un unico numero $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. Come d'uso, anziché $\sqrt[2]{a}$ scriviamo $\sqrt{a}$.

[2] Questo perché se $a < 0$ e $n \in \mathbb{N}$, n dispari, esiste un unico numero $b < 0$ tale che $b^n = a$.

Ad esempio: $\sqrt{x^2} = |x|,\ \forall x$; $\sqrt[4]{(x-1)^4} = |x-1|,\ \forall x$; $\sqrt[3]{(x+2)^3} = x+2,\ \forall x$;
$(\sqrt{x})^2 = x$, ma solo con $x \geq 0$; $(\sqrt[3]{x+1})^3 = x+1,\ \forall x$.

Osservazione Lo studente rifletta su questi esempi e presti sempre attenzione in questi casi: queste situazioni sono spesso fonte di classici gravi errori.

2. **Proprietà invariantiva**

Questa proprietà è quella che permette, nei casi che ora discutiamo, di moltiplicare (o dividere, quando possibile) l'indice del radicale e l'esponente del radicando[3] per uno stesso numero naturale, maggiore 1. In formule è quella che si esprime scrivendo

$$\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Qui però in generale occorre fare attenzione, in quanto se ad esempio scrivo

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1},$$

commetto evidentemente un errore: i due membri dell'uguaglianza non possono essere uguali, dato che a sinistra ho una quantità positiva, mentre a destra ne ho una negativa. Possiamo allora dire che la proprietà invariantiva vale certamente se $a \geq 0$, in quanto in questo caso non usciamo dalla definizione originaria di radice n-esima, quella che opera solo con quantità positive.

Se la vogliamo applicare anche con $a < 0$, possiamo dire che con n pari non ci sono problemi: infatti $\sqrt[m]{a^n}$ è certamente positivo, per definizione, e anche $\sqrt[mk]{a^{nk}}$ è positivo, dato che anche nk è pari.

Con $a < 0$ ed n dispari, $\sqrt[m]{a^n}$ è negativo e quindi intanto dovremo avere m dispari; poi anche $\sqrt[mk]{a^{nk}}$ dovrà essere negativo, e quindi k dovrà essere anche lui dispari.

Infine, con $a < 0$, n dispari e k pari, la proprietà come è scritta sopra non vale, ma la possiamo sostituire con la

$$\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{|a|^n},$$

e, scritta così, vale anche se m è pari.

Un consiglio allo studente: non si cerchi di imparare a memoria tutti i casi. Volendo semplificare un radicale applicando questa proprietà si valuti caso per caso, e ci si chieda se, con la semplificazione, si rischia di cambiare il segno dell'espressione o di far perdere il suo significato.

Ad esempio: $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$; $\sqrt[6]{(-5)^2} = \sqrt[3]{|-5|} = \sqrt[3]{5}$;
$\sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{(-3)^2} = \sqrt{|-3|} = \sqrt{3}$.

Osservazione La proprietà invariantiva consente di *semplificare* i radicali (abbassandone l'indice), oppure di trasformare due o più radicali con indice diversi in altri con indice uguale (condizione questa per confrontare due radicali, o per moltiplicarli, o per dividerli). Ad esempio:

- La disuguaglianza $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ è certamente vera dato che, applicando la proprietà invariantiva ai due membri, si ottiene $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$.
- Volendo semplificare la frazione $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$ possiamo scrivere $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[12]{2}$. Lo stesso calcolo si può eseguire, come vedremo tra un po', utilizzando le potenze con esponente frazionario.
- Per semplificare il radicale $\sqrt[9]{(-2)^6}$, come già visto, possiamo scrivere
$$\sqrt[9]{(-2)^6} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}.$$
- La quantità $\sqrt[4]{(x-2)^2}$ equivale a $\sqrt{|x-2|}$. Attenzione che in questo caso, dato che l'argomento del radicale contiene la variabile x, non possiamo essere certi del segno di $(x-2)$: quindi, dato che $\sqrt[4]{(x-2)^2}$ è certamente non negativo, occorre usare il valore assoluto.
- $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$. Qui non dobbiamo usare il valore assoluto, in quanto l'espressione a sinistra è definita per $x \geq 0$, e anche $\sqrt{x}$ è definita sulle x non negative. Sarebbe opportuno in questi casi evidenziare dove è valida l'uguaglianza, scrivendo quindi $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$. Scrivere invece $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{|x|}$, senza precisare dove la considero, può dare origine ad errori, dato che l'espressione a sinistra è definita per $x \geq 0$, mentre quella a destra è definita in tutto $\mathbb{R}$.
- Invece dobbiamo scrivere $\sqrt[6]{(x+1)^2} = \sqrt[3]{|x+1|}$, valida in tutto $\mathbb{R}$.

[3] Radicando è ciò che sta sotto il segno di radice.

1.5 Operazioni con i radicali

1. **Addizione (o sottrazione)** di due radicali.

   In generale, la *somma (o la differenza)* di due radicali non è esprimibile con un solo radicale, anche se gli addendi sono radicali con lo stesso indice. Quindi, ad esempio

   $$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{9},$$

   ma a questo punto non possiamo scriverlo come un unico radicale. *Grave errore* sarebbe scrivere ad esempio $\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{17}$.

   Sono ovviamente applicabili le consuete regole del raccoglimento: ad esempio

   $$2\sqrt{5} - \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \left(2 - 1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

2. **Moltiplicazione (o divisione)** di due radicali.

   Il prodotto (o il quoziente) di due radicali può sempre essere espresso mediante un solo radicale: se i fattori della moltiplicazione (o i termini della divisione) hanno lo stesso indice, anche il prodotto (o il quoziente) avrà quell'indice e per radicando il prodotto (o il quoziente) dei radicandi.

   Quindi, in simboli, si ha:

   $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad , \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

   dove però accorre anche qui fare attenzione all'ambito di validità. Se $a \geq 0, b \geq 0$ non ci sono problemi (chiaramente dovrà essere $b > 0$ nella seconda). Se a oppure b sono negativi, dovrà essere n dispari.

   Possiamo anche qui estendere la validità nel caso che a e b siano entrambi negativi e n pari, scrivendo

   $$\sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

   Ad esempio si ha: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$; $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10}$.

   Se i fattori (o il dividendo e il divisore) sono radicali con indici diversi, occorre ridurli prima allo stesso indice, per avere il prodotto (o il quoziente) espresso con un unico radicale, facendo sempre attenzione, come visto, nell'applicare la proprietà invariantiva.

   Ad esempio: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-5} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = -\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{25} = -\sqrt[6]{200}$.

   Errato sarebbe invece fare: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{(-5)^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{200}$.

3. **Potenza** di un radicale.

   Per elevare un radicale a potenza con esponente naturale (o intero) basta elevare a potenza il suo radicando. In simboli:

   $$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

   Naturalmente le due quantità devono essere definite (quindi ad esempio, se $k < 0$, deve essere $a \neq 0$).

   Ad esempio: $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}$; $(\sqrt[3]{-5})^2 = \sqrt[3]{25}$.

   Notare che invece $(\sqrt[4]{-2})^2 = \sqrt[4]{4}$ non è corretta, dato che $\sqrt[4]{-2}$ non ha significato.

   Quindi, attenzione prima di applicare questa proprietà ad un radicale il cui argomento contiene una variabile. Si devono anzitutto porre le corrette condizioni di esistenza.

   Esempi:

   $$(\sqrt{x-2})^2 = x - 2 \text{ , per } x \geq 2;$$

   $$\text{invece: } (\sqrt[3]{x-2})^3 = x - 2 \text{ , qualunque sia } x.$$

4. **Radice** di un radicale.

   La radice di un radicale può, in generale, diventare un radicale semplice, avente per indice il prodotto degli indici ed il medesimo radicando: fare però attenzione come sempre. Quindi, in simboli:

   $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Se $a \geq 0$, non ci sono problemi. Se $a < 0$, occorre che n ed m siano entrambi dispari.

Osservazione Un fattore numerico esterno ad un radicale potrà sempre essere pensato come un radicale. Attenzione però che un fattore negativo non può essere scritto come radicale di indice pari.

Vediamo alcuni esempi:

- $3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{162}$.
- $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-40} = -\sqrt[3]{40}$.
- $-2\sqrt[4]{3}$ non si può scrivere come $\sqrt[4]{(-2)^4} \cdot \sqrt[4]{3}$. Occorre fare $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{48}$.

Vediamo altri esempi significativi, in cui si applicano le proprietà viste finora.

- $\sqrt[4]{3^6} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^2} = 3\sqrt[4]{9}$.
- $\sqrt[3]{(-5)^{10}} = \sqrt[3]{(-5)^9(-5)} = |-5|^3 \cdot \sqrt[3]{|-5|} = 125\sqrt[3]{5}$.
  Qui occorre usare i moduli dato che la quantità iniziale è positiva.
- $\sqrt[3]{(-2)^7} = \sqrt[3]{(-2)^6(-2)} = (-2)^2 \cdot \sqrt[3]{(-2)} = -(-2)^2 \cdot \sqrt[3]{2} = -4\sqrt[3]{2}$.
  In questo caso la quantità iniziale è negativa, e tali devono restare anche i membri delle uguaglianze sucessive.

5. **Razionalizzazione** dei termini di una frazione.

   Sfruttando la proprietà invariantiva delle frazioni è possibile rendere razionale il denominatore (o il numeratore) di una espressione fratta, che sia irrazionale, naturalmente a scapito dell'altro termine.

   Richiamiamo con esempi i casi più semplici e utili: lo studente eventualmente approfondisca l'argomento, rivedendo quanto già sa dalla scuola secondaria.

   1° caso: $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Per rendere razionale il denominatore moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$.

   Quindi: $\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

   2° caso: $\frac{5}{3\sqrt[4]{2}}$. Per rendere razionale il denominatore moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt[4]{2^3}$.

   Quindi: $\frac{5}{3\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{5\sqrt[4]{8}}{6}$.

   3° caso: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$. Qui razionalizziamo il numeratore: basta moltiplicare numeratore e denominatore per $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.

   Quindi: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{5-2}{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

   Altro esempio: $\frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{x(x-\sqrt{x})}{x^2-x}$, precisando però che il tutto ha senso per $x > 0$ e $x \neq 1$, affinché sia definito il radicale iniziale, non sia nullo il denominatore della frazione iniziale e non sia nulla la quantità $(x-\sqrt{x})$ per cui abbiamo moltiplicato.

   4° caso: $\frac{3}{2-\sqrt[3]{2}}$. In questo caso il fattore che razionalizza il denominatore è $(4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ (ricordare che $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$). Quindi:

$$\frac{3}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{2-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})} = \frac{3(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{8-2} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}.$$

1.6 Potenze con esponente razionale

Dati i numeri naturali m, n, con $n > 1$, e il numero *non negativo* a, si definisce *potenza di a con esponente razionale* $\frac{m}{n}$ il valore del radicale $\sqrt[n]{a^m}$. In simboli:

$$a^{m/n} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}\ , \text{ con } a \geq 0.$$

Se l'esponente è razionale negativo, $-\frac{m}{n}$, e $a > 0$, sempre per definizione, si ha:

$$a^{-m/n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Per le definizioni date, i simboli $a^{m/n}$ e $a^{-m/n}$ rappresentano sempre numeri non negativi. Essi godono di tutte le proprietà delle potenze con esponente naturale.

Non è possibile estendere direttamente la definizione data se la base è negativa: si pensi ad esempio che questo porterebbe a scrivere $(-2)^{3/4} = \sqrt[4]{(-2)^3}$, e questo non ha senso. Anche nei casi che sembrano meno pericolosi, ad esempio con m ed n entrambi dispari, ci sono problemi: si pensi che $(-2)^{1/3} = \sqrt[3]{-2}$ potrebbe anche andare, ma, dato che $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, avremmo $(-2)^{1/3} = (-2)^{2/6} = \sqrt[6]{(-2)^2}$, e questo non può sussistere, dato che iniziamo con una quantità negativa e finiamo con una positiva.

1.7 Potenze con esponente irrazionale

Ricordo che è possibile definire anche la potenza con esponente irrazionale, cioè la potenza del tipo

$$b^\alpha \text{ , dove } b \in \mathbb{R},\ b > 0 \text{ e } \alpha \text{ è un numero reale irrazionale.}$$

Non entro nei dettagli della definizione, che lo studente forse ha già incontrato alla scuola secondaria. Ricordo soltanto le uniche due cose che in qualche modo potranno servirci: quando l'esponente è (o può essere) un numero irrazionale, come d'altro canto è stato già con gli esponenti razionali, la definizione viene data solo con *base positiva*. Anche per questo tipo di potenze valgono le consuete proprietà. Inoltre b^α (con $b > 0$ e α irrazionale) è una quantità comunque positiva.

Pertanto hanno un senso, e sono numeri reali positivi, le scritture

$$2^{\sqrt{2}} \quad , \quad 3^\pi \quad , \quad \pi^{-\pi} = \frac{1}{\pi^\pi} \quad , \quad 2^x, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

ma non sono invece definite le quantità

$$(-2)^{\sqrt{2}} \quad , \quad (-\pi)^\pi \quad , \quad (-3)^x, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

Quindi, scrivendo ad esempio

$$(x+3)^{\sqrt{2}},$$

dovremo precisare che deve essere $x > -3$.

Osservazione Prima di passare ai logaritmi, qualche parola per raccomandare allo studente di prestare sempre attenzione per non interpretare in modo errato le notazioni. Desidero soffermarmi in particolar modo sulla scrittura

$$a^{m^n},$$

che rischia di essere male interpretata. Si ricordi che $a^{m^n} = a^{(m^n)}$ e non $a^{m^n} = (a^m)^n$.

Quindi ad esempio $2^{3^2} = 2^9 = 1024$ e invece $2^{3^2} \neq (2^3)^2 = 8^2 = 64$. Ancora, nello stesso modo, non si creda che 2^{x^2} voglia dire $(2^x)^2$, e cioè 2^{2x}. Invece, se potesse servire, vale $2^{x^2} = 2^{x \cdot x}$.

Esercizio 1.1 Si scriva $\sqrt{8}$ come potenza in base 2 e $\sqrt[3]{81}$ come potenza in base 3.

Esercizio 1.2 Si scriva 4^{3^2} come potenza in base 2.

Esercizio 1.3 È vero che

$$2^{1/x} \quad \text{è uguale a} \quad \frac{2^1}{2^x}?$$

Esercizio 1.4 Come si può anche scrivere $2^{-1/x}$? E $e^{\frac{1-x}{x}}$?

Esercizio 1.5 Come si può scrivere $\sqrt[3]{x^5}$ in forma di potenza?

Esercizio 1.6 Si scriva $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^5}}{x\sqrt{x}}$ come somma di due potenze.

Esercizio 1.7 È vero che $\sqrt[6]{a^3}$ è definita qualunque sia a? Per quali valori posso dire che $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$?

Esercizio 1.8 È vero che $\sqrt[8]{a^4}$ è uguale a $\sqrt{a}$ qualunque sia a?

Esercizio 1.9 Si riscriva $e^x + e^{-x}$ raccogliendo prima e^x e poi e^{-x}.

Esercizio 1.10 Si riscriva $e^x + e^{1/x}$ raccogliendo $e^{1/x}$.

2 Logaritmi

2.1 Definizione di logaritmo

Anche la definizione di logaritmo e le relative proprietà dovrebbero essere già note agli studenti. Coloro che invece tra voi incontrassero questo termine per la prima volta sono invitati a consultare qualche testo di scuola secondaria in cui tale argomento viene trattato.

Rivediamo comunque gli aspetti essenziali, cominciando dalla definizione di logaritmo.

Definizione Se b è un numero reale positivo diverso da 1 e a è un numero reale positivo, si dice *logaritmo in base b di a* quel numero reale y tale che $b^y = a$. In simboli

$$\log_b a = y \quad \text{significa che} \quad b^y = a, \quad \text{con } b > 0,\, b \neq 1 \text{ e } a > 0.$$

Quindi $\log_b a$ è *l'esponente che devo dare a b per ottenere a*. Si dice che b è la *base* del logaritmo e che a è l'*argomento*.

Ci sono alcuni casi particolari, che è bene ricordare:

- $\log_b 1 = 0$, qualunque sia la base b $(0 < b \neq 1)$, dato che $b^0 = 1$;
- $\log_b b = 1$, qualunque sia b $(0 < b \neq 1)$, dato che $b^1 = b$.

Vediamo qualche esempio.

- $\log_2 8 = 3$, poiché $2^3 = 8$;
- $\log_{10} 100 = 2$, poiché $10^2 = 100$;
- $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, poiché $2^{-2} = \frac{1}{4}$;
- $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$, poiché $10^{-1} = \frac{1}{10}$;
- $\log_{1/2} 4 = -2$, poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$;
- $\log_b(b^2) = 2$, poiché $b^2 = b^2$ (ovviamente con $0 < b \neq 1$);
- $\log_{1/b} b = -1$, poiché $\left(\frac{1}{b}\right)^{-1} = b$ (anche qui con $0 < b \neq 1$);

Dagli esempi risulta evidente che il valore del logaritmo può essere anche negativo (quindi l'argomento deve essere positivo, ma poi il valore del logaritmo può avere segno qualunque). Anzi, riguardando gli esempi si intuisce che:

- se la base b è maggiore di 1, allora

  il logaritmo è positivo quando l'argomento è maggiore di 1, il logaritmo è negativo quando l'argomento è minore di 1 (il logaritmo vale 0 se l'argomento vale 1);
- se la base b è minore di 1, allora

  il logaritmo è positivo quando l'argomento è minore di 1, ed è negativo quando l'argomento è maggiore di 1 (anche qui il logaritmo vale 0 se l'argomento vale 1).

2.2 Proprietà dei logaritmi

Dalla definizione di $\log_b a$ si deducono immediatamente due proprietà fondamentali:

$$\log_b(b^y) = y \text{ , con } 0 < b \neq 1 \qquad \text{e} \qquad b^{\log_b a} = a \text{ , con } 0 < b \neq 1,\, a > 0.$$

La prima si può giustificare a parole così: $\log_b(b^y)$ è l'esponente che devo dare a b per ottenere b^y: si tratta chiaramente di y. Anche la seconda è banale: se $\log_b a$ è l'esponente che dato a b mi fa trovare a, allora evidentemente $b^{\log_b a}$ è a.

Queste due identità sono molto utili perché consentono di scrivere un numero reale rispettivamente come logaritmo in una certa base di qualche cosa e come potenza in una certa base di qualcos'altro.[4]

Ad esempio, se vogliamo scrivere 10 come logaritmo in base 2 e come potenza in base 2, basta scrivere

$$10 = \log_2(2^{10}) \qquad \text{e} \qquad 10 = 2^{\log_2 10}.$$

[4] Le due proprietà sono utili nella risoluzione delle equazioni logaritmiche ed esponenziali.

Per quanto riguarda i numeri negativi, sarà certamente possibile scriverli come logaritmi, ma non come potenze con base positiva. Così, volendo scrivere -2 come logaritmo in base 10 basterà fare

$$-2 = \log_{10}(10^{-2}) = \log_{10} \frac{1}{100}.$$

Non si può invece scrivere -2 come potenza in base 10.

Ecco ora le altre proprietà dei logaritmi. Queste possono essere dimostrate facilmente, applicando le proprietà delle potenze e le due identità fondamentali appena viste.

- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$, con $x > 0$, $y > 0$ e $0 < b \neq 1$;
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$, con $x > 0$, $y > 0$ e $0 < b \neq 1$;
- $\log_b(x^a) = a \log_b x$, con $x > 0$ e $0 < b \neq 1$.

A dimostrazione della prima, basta provare che elevando b alla quantità di destra si ottiene xy: infatti

$$b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y} = xy.$$

Per la seconda le cose sono molto simili:

$$b^{\log_b x - \log_b y} = \frac{b^{\log_b x}}{b^{\log_b y}} = \frac{x}{y}.$$

Anche per la terza è lo stesso:

$$b^{a \log_b x} = \left(b^{\log_b x}\right)^a = x^a.$$

Lo studente faccia attenzione a queste proprietà: si noti che esse sono state enunciate con argomenti dei logaritmi tutti positivi (come è ovvio).

Da notare che peraltro la validità di queste proprietà può essere estesa ricorrendo all'uso del valore assoluto. Possiamo infatti dire che per le prime due valgono queste proprietà più generali:

- $\log_b(xy) = \log_b |x| + \log_b |y|$, con $xy > 0$ e $0 < b \neq 1$;
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b |x| - \log_b |y|$, con $xy > 0$ e $0 < b \neq 1$;

Per quanto riguarda la terza, possiamo osservare che, se la potenza x^a richiede che sia $x > 0$ (come ad esempio nel caso di a irrazionale), allora non c'è da modificare nulla. Se invece x^a è definita anche per $x < 0$ (come ad esempio se fosse a numero naturale pari), allora possiamo scrivere

- $\log_b(x^a) = a \log_b |x|$, con $x \neq 0$ e $0 < b \neq 1$

(la condizione $x \neq 0$ va comunque precisata, poiché il logaritmo di 0 non esiste).

A volte può essere utile ricordare anche la *formula del cambio di base di un logaritmo*. Se conosciamo il logaritmo in una certa base b di un numero positivo x, come possiamo esprimere il logaritmo in una diversa base c ?

Scrivendo x come potenza in base c otteniamo

$$x = c^{\log_c x},$$

da cui, applicando i logaritmi in base b ad entrambi, abbiamo

$$\log_b x = \log_b c^{\log_c x} = \log_c x \cdot \log_b c,$$

da cui

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c},$$

che è appunto la nota formula del cambio di base: se conosciamo i logaritmi in base b la formula ci dice come calcolare il logaritmo in base c.

Da notare che, nel caso particolare $x = b$, si ha l'altra importante identità

$$\log_c b = \frac{1}{\log_b c}.$$

Osservazione Occorre fare sempre molta attenzione nell'applicare le proprietà dei logaritmi.

Ad esempio, la quantità $\log_5\big[x(x-1)\big]$ è definita per $x > 1$ oppure $x < 0$, valori per cui l'argomento del logaritmo è positivo.[5] Non possiamo però scrivere che in tutto questo insieme vale la

$$\log_5\big[x(x-1)\big] = \log_5 x + \log_5(x-1),$$

dato che solo per $x > 1$ esistono entrambi i logaritmi a destra (per $x < 0$ il nessuno dei due logaritmi di destra esiste). Quindi dobbiamo scrivere

$$\log_5\big[x(x-1)\big] = \log_5 x + \log_5(x-1)\ ,\ \text{per } x > 1.$$

Se vogliamo scrivere qualcosa che valga in tutto l'insieme in cui è definito il $\log_5\big[x(x-1)\big]$ dobbiamo scrivere

$$\log_5\big[x(x-1)\big] = \log_5|x| + \log_5|x-1|\ ,\ \text{per } x > 1 \text{ oppure } x < 0.$$

Forse ancora più pericolosa è la terza proprietà dei logaritmi. Ad esempio, in presenza della quantità $\log_3(x-2)^4$ è forte la tentazione di scrivere

$$\log_3(x-2)^4 = 4\log_3(x-2).$$

Questa però è errata, dato che la quantità a sinistra esiste per qualunque $x \neq 2$, mente quella a destra richiede $x > 2$. Anche qui le cose vanno a posto scrivendo

$$\log_3(x-2)^4 = 4\log_3|x-2|\ ,\ \text{con } x \neq 2.$$

Osservazione Solitamente come base dei logaritmi si utilizza il numero e (detto numero di Neper). Si tratta di un numero reale irrazionale, un valore approssimato del quale è il numero razionale 2.718 (cioè $\frac{2718}{1000}$).

Di solito i logaritmi in base 10 si dicono *logaritmi decimali*, mentre quelli in base e si dicono *logaritmi naturali*. Nel seguito userò quasi sempre i logaritmi naturali: scrivendo "ln" intenderò logaritmo naturale, cioè in base e. Basi diverse saranno esplicitamente indicate ($\log_2$, $\log_{10}$, etc.).

Osservazione Concludo questa lezione con qualche parola ancora sulle notazioni, che possono essere talvolta fonte di equivoco ed errore. Non si confondano le due scritture

$$\log_b x^n \qquad \text{e} \qquad \log_b^n x.$$

La prima sta per $\log_b(x^n)$, cioè il logaritmo di x^n. La seconda significa $(\log_b x)^n$, cioè la potenza n-esima del logaritmo di x. Frequente *errore* di alcuni studenti è applicare in modo scorretto una delle proprietà dei logaritmi e scrivere $\log_b^n x = n\log_b x$, scambiando $\log_b^n x$ con $\log_b(x^n)$.

Esercizio 2.1 Calcolare $\log_2 \frac{1}{8}$ e $\log_3 \sqrt[10]{9}$.

Esercizio 2.2 Calcolare $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$.

Esercizio 2.3 Che cosa significa $x = \log_y z$?

Esercizio 2.4 Scrivere come logaritmo in base 2 i seguenti numeri:

$$0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad \frac{1}{4} \quad , \quad -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.5 Scrivere come potenza in base 2 i seguenti numeri:

$$\sqrt{2} \quad , \quad 3 \quad , \quad \sqrt{3} \quad , \quad \frac{1}{3} \quad , \quad e.$$

Esercizio 2.6 Scrivere come logaritmo in base e i seguenti numeri:

$$1 \quad , \quad 2 \quad , \quad -1 \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{3}.$$

[5] Non abbiamo ancora ripassato le disequazioni, ma questa è molto semplice: il prodotto $x(x-1)$ è positivo per "valori esterni a 0 e 1", cioè per x minore di 0 oppure per x maggiore di 1.

Esercizio 2.7 Scrivere, se possibile, come potenza in base e i seguenti numeri:

$$\sqrt{e} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \quad , \quad 2 \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{3}.$$

Esercizio 2.8 Il numero $\log_2 3$ è positivo o negativo?

Esercizio 2.9 È vero che il logaritmo di un numero minore di 1 è sempre negativo?

Esercizio 2.10 È vero che $\log_4(x^4) = 4\log_4 x$ per ogni x?

Esercizio 2.11 È vero che $\log_4(x^4) = 2\log_4(x^2)$ per ogni x diverso da zero?

Esercizio 2.12 Scrivere x come potenza in base z. Per quali valori di x e z ha senso l'uguaglianza?

Esercizio 2.13 Scrivere t come logaritmo in base y. Per quali valori di t e y ha senso l'uguaglianza?

3 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Si ha $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = (2^3)^{1/2} = 2^{3/2}$ e $\sqrt[3]{81} = (3^4)^{1/3} = 3^{4/3}$.

Esercizio 1.2

Attenzione qui: 4^{3^2} significa 4^9 (e non 64^2) e quindi 2^{18}.

Esercizio 1.3

Certo che no. La quantità $2^{1/x}$ non si può trasformare usando quella proprietà delle potenze. Si ricordi che $\frac{2^1}{2^x}$ significa 2^{1-x}.

Esercizio 1.4

Il primo, cioè $2^{-1/x}$, si può scrivere anche come $\frac{1}{2^{1/x}}$. Invece per $e^{\frac{1-x}{x}}$ si può scrivere

$$e^{\frac{1-x}{x}} = e^{\frac{1}{x}-1} = e^{1/x} \cdot e^{-1} = \frac{e^{1/x}}{e}.$$

Esercizio 1.5

Si può scrivere $x^{5/3}$.

Esercizio 1.6

Si ha

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^5}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^5}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + \frac{x^{5/2}}{x^{3/2}} = x^{-1} + x.$$

Esercizio 1.7

La $\sqrt[6]{a^3}$ è definita soltanto per $a \geq 0$. Quindi la prima risposta al quesito è no. L'uguaglianza $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ è vera dove sono definite entrambe le quantità, e cioè per $a \geq 0$.

Esercizio 1.8

No. La prima quantità è definita per ogni a, mentre la seconda solo per $a \geq 0$. La validità dell'uguaglianza è limitata quindi agli $a \geq 0$.

Esercizio 1.9

Si ha

$$e^x + e^{-x} = e^x(1 + e^{-2x})$$

e

$$e^x + e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} + 1).$$

Esercizio 1.10

Si ha
$$e^x + e^{1/x} = e^{1/x}(e^{x-1/x} + 1).$$
Approfitto dell'occasione per mettere in guardia da un possibile fraintendimento in questo tipo di scritture: se scrivo
$$e^{x-1/x} \text{ , ad esponente c'è } x - \tfrac{1}{x} \text{ e non } \tfrac{x-1}{x}.$$
Se voglio scrivere la seconda con la frazione in linea devo scrivere $e^{(x-1)/x}$.

Esercizio 2.1

Si ha $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$ e $\log_3 \sqrt[10]{9} = \log_3 9^{1/10} = \log_3 3^{1/5} = 1/5$.

Esercizio 2.2

Si ha
$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \log_{\sqrt{2}} 2^{-4/3} = \log_{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^{-8/3}) = -8/3.$$

Esercizio 2.3

In base alla definizione di logaritmo $x = \log_y z$ significa che $y^x = z$.

Esercizio 2.4

Si ha:
$$0 = \log_2 1 \quad , \quad 1 = \log_2 2 \quad , \quad 2 = \log_2 4 \quad , \quad \frac{1}{4} = \log_2 2^{1/4} = \log_2 \sqrt[4]{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} = \log_2 2^{-1/2} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 2.5

Si ha:
$$\sqrt{2} = 2^{1/2} \quad , \quad 3 = 2^{\log_2 3} \quad , \quad \sqrt{3} = 2^{\log_2 \sqrt{3}} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 3} \quad , \quad \frac{1}{3} = 2^{\log_2 \frac{1}{3}} = 2^{-\log_2 3} \quad , \quad e = 2^{\log_2 e}$$

Esercizio 2.6

Si ha:
$$1 = \ln e \quad , \quad 2 = \ln e^2 \quad , \quad -1 = \ln e^{-1} = \ln \frac{1}{e} \quad , \quad \frac{1}{2} = \ln e^{1/2} = \ln \sqrt{e} \quad , \quad -\frac{1}{3} = \ln e^{-1/3} = \ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

Esercizio 2.7

Si ha:
$$\sqrt{e} = e^{1/2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-1/3} \quad , \quad 2 = e^{\ln 2} \quad , \quad \frac{1}{2} = e^{\ln 1/2} = e^{-\ln 2}.$$
Per quanto riguarda l'ultimo $(-1/3)$, è impossibile scrivere come potenza di base positiva un numero negativo.

Esercizio 2.8

È maggiore di 1, quindi certamente positivo.

Esercizio 2.9

No. È vero solo se la base del logaritmo è maggiore di 1.

Esercizio 2.10

No. La prima espressione è definita per ogni x diverso da 0, la seconda solo per $x > 0$. L'uguaglianza è vera per $x > 0$. Possiamo scrivere $\log_4(x^4) = 4\log_4|x|$, e questa vale per ogni x diverso da 0.

Esercizio 2.11

Sì, è vero. Infatti $\log_4(x^4) = \log_4(x^2)^2 = 2\log_4(x^2)$ (ovviamente se $x \neq 0$).

Esercizio 2.12

Si ha $x = z^{\log_z x}$ e la scrittura ha senso per $z > 0$ e $z \neq 1$ e per $x > 0$.

Esercizio 2.13

Si ha $t = \log_y(y^t)$ e la scrittura ha senso per $y > 0$ e $y \neq 1$ e per qualunque t.