I-3 Equazioni e Disequazioni

Indice

1 Generalità sulle equazioni

Un'*equazione* è un'*uguaglianza* tra due espressioni. Possiamo avere equazioni in una variabile (detta anche incognita) o anche equazioni in due o più variabili.

Esempi Sono equazioni in una variabile le seguenti uguaglianze:

$$2x + 1 = \frac{1}{2}x - 1 \quad ; \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad ; \quad 1 + \frac{1}{y^2} = 0 \quad ; \quad e^{-t^2} = 2 \quad ; \quad 1 + \ln z = \sqrt{1 + z}.$$

Esempi Sono equazioni in due variabili le seguenti uguaglianze:

$$x - y + 1 = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad 4x^2 + 9y^2 = 1 \quad ; \quad t + \frac{1}{z^2} = 1.$$

I valori (solitamente reali) che, sostituiti alle variabili, rendono vere le uguaglianze, si dicono **soluzioni** (o anche *radici*) dell'equazione.

Risolvere un'equazione significa trovare *l'insieme delle sue soluzioni*, cioè *tutte* le sue soluzioni.

Esempi

L'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha per soluzioni -1 e 1, quindi l'insieme delle sue soluzioni è $\{-1, 1\}$.
L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha nessuna soluzione (tra i numeri reali).
L'equazione: $x - y + 1 = 0$ ha come soluzione $(1, 2)$, ma anche $(-1, 0)$ e molte altre.[1]
L'equazione $x^2 + y^2 = 0$ ha l'unica soluzione $(0, 0)$, quindi l'insieme delle sue soluzioni va indicato con $\{(0, 0)\}$.

Un'equazione che non ha soluzioni si dice *impossibile*. L'insieme delle soluzioni di un'equazione impossibile è quindi l'insieme vuoto. Ad esempio, come appena visto, l'equazione $x^2+1 = 0$ è impossibile. Anche $2\sqrt{x} = -\frac{1}{x^2}$ è impossibile (infatti il numero non negativo $2\sqrt{x}$ non può essere uguale al numero, certamente negativo, $-\frac{1}{x^2}$).

Un'equazione che abbia almeno una soluzione si dice *possibile*. Tra le equazioni possibili si distinguono di solito quelle *indeterminate*, che hanno infinite soluzioni. Infine, le equazioni che sono vere per qualsiasi valore della (delle) variabile (variabili) per cui hanno significato i due membri dell'equazione stessa, vengono dette *identità*.

Esempi

L'equazione: $x^2 + 2x - 3 = 0$ è possibile, dato che è vera per $x_1 = 1$ oppure per $x_2 = -3$.
L'equazione: $3 + \frac{|x|}{x} = 4$ è indeterminata, perché vera per ogni x positivo (ma non per $x \le 0$).
L'equazione $\sqrt{x^2} = |x|$ è un'identità, essendo vera per ogni valore di x.
Anche l'equazione $\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} + 1$ è un'identità, essendo vera per ogni valore positivo di x ed essendo i due membri dell'equazione definiti solo per le x positive.

Avremo spesso a che fare anche con *sistemi di equazioni*. Un esempio di sistema di equazioni è la scrittura

$$\begin{cases} x^3 + x - 2 = 0 \\ x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Si tratta in questo caso di un sistema di due equazioni in una sola variabile. Una soluzione del sistema è un valore che, sostituito alle variabili, rende vere *tutte* le equazioni del sistema. Nel nostro esempio una soluzione del sistema è il valore 1 (ed è l'unica soluzione).

Risolvere un sistema di equazioni significa trovare tutte le sue soluzioni. È chiaro che l'insieme delle soluzioni di un sistema è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle equazioni che costituiscono il sistema. È quindi evidente che, se una delle equazioni del sistema è impossibile, allora il sistema è impossibile. Non vale il viceversa: il sistema può essere impossibile anche se nessuna delle equazioni lo è.

Possiamo avere sistemi di un numero qualunque di equazioni, in un numero qualunque di variabili.

Torniamo alle equazioni, per affrontare gradualmente l'argomento di come si risolvono.

Due equazioni si dicono **equivalenti** quando hanno lo stesso insieme di soluzioni, cioè quando ogni soluzione dell'una è anche soluzione dell'altra e viceversa.

Esempio Sono equazioni equivalenti le seguenti:

$$x - \frac{1}{x} = 2 \quad \text{e} \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \big(\text{insieme di soluzioni } \{1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}\big)$$

o anche

$$\sqrt{x} = 2 \quad \text{e} \quad x = 4 \quad \big(\text{unica soluzione: } 4\big).$$

Non sono equazioni equivalenti invece:

$$x + \frac{1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2} \quad \text{e} \quad x = 2,$$

(anche se la seconda "si ottiene immediatamente dalla prima") perché la soluzione 2 della seconda non è soluzione della prima.[2]

Per trasformare un'equazione in altra equivalente si hanno le seguenti regole (comunemente dette *principi di equivalenza delle equazioni*):

[1] La notazione che qui si usa è quella di indicare la soluzione di un'equazione in due variabili come coppia di numeri reali. La coppia dei numeri reali a e b viene indicata col simbolo (a, b). Non si confonda l'insieme $\{-1, 1\}$ con la coppia $(-1, 1)$.

[2] Il motivo è che passando dalla prima equazione alla seconda, togliendo ad ambo i membri la quantità frazionaria, si altera l'insieme in cui è definita l'equazione iniziale, rendendo così possibile una soluzione che non può essere accettata.

1. **Principio di addizione.**

   Aggiungendo ai due membri di un'equazione uno stesso numero, o una medesima espressione, che non perda significato nell'insieme di risoluzione dell'equazione e che comunque non alteri tale insieme, si ottiene un'equazione equivalente alla precedente.[3]

   Osservazione Se si aggiunge ai due membri di un'equazione una qualsiasi costante o espressione che risulta sempre definita, come ad esempio (x^2+1) o $\frac{2}{x^2+3}$, si sarà sicuri di avere un'equazione equivalente alla precedente; non si sarà altrettanto certi di avere un'equazione equivalente se si aggiungono espressioni, come $\frac{1}{x}$ o $\frac{x}{x-2}$, che possono alterare l'insieme dove si cercano le soluzioni dell'equazione.

2. **Principio di moltiplicazione.**

   Moltiplicando (o dividendo) ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per una medesima espressione, che non diventi nulla e non perda significato nell'insieme di risoluzione dell'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

   Osservazione Si potrà quindi moltiplicare ambo i membri di un'equazione per una costante diversa da zero, o per una espressione sempre diversa da zero, come ad esempio (x^2+2x+3) o $\frac{1}{x^2+\sqrt{2}}$ e si sarà certi di ottenere un'equazione equivalente a quella che si aveva; si potrà, in qualche caso, moltiplicare i due membri anche per espressioni come $(x-1)$ o $\frac{1}{x}$, oppure $\sqrt{x}$, se così facendo non si altera l'insieme in cui si cercano le soluzioni. Nell'esempio di poco fa delle due equazioni che non sono equivalenti succede proprio questo: togliendo ad ambo i membri dell'equazione $x+\frac{1}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}$ la quantità $\frac{1}{x-2}$ si modifica l'insieme in cui l'equazione è definita.

Talvolta per risolvere un'equazione, cioè per trovare tutte le sue soluzioni, basta trasformarla, mediante i due principi o con opportune modifiche algebriche, in altre equivalenti e più semplici, che possano più facilmente suggerire le eventuali soluzioni cercate.[4]

Facciamo qualche esempio.

Esempio Si abbia l'equazione $\frac{x(1+x)}{3}=\frac{x^2}{3}-1$. Moltiplicando ambo i membri per 3, si ha l'equazione equivalente

$$x(1+x)=x^2-3,$$

che può anche scriversi

$$x+x^2=x^2-3;$$

aggiungiamo ora ad ambo i membri $-x^2$ (o trasportiamo x^2 dal primo al secondo membro, cambiandolo di segno); si ha, in ogni caso, l'equazione equivalente

$$x=-3.$$

Quest'ultima suggerisce subito che la soluzione cercata è -3.

2 Equazioni di primo grado

Qui ci limitiamo a pochi richiami, dato che si tratta di un argomento che lo studente deve già conoscere.

Le equazioni di primo grado sono quelle i cui due membri sono entrambi polinomi di primo grado o costanti. Si possono sempre ricondurre alla forma

$$ax+b=0 \quad \text{, con } a\neq 0,$$ [5]

che porta all'unica soluzione: $x=-b/a$.

Lo studente eventualmente si eserciti con qualche esempio preso da testi di scuola secondaria.

[3] È in uso spesso il seguente modo di dire: nell'equazione (ad esempio) $2x+3=0$, "porto a destra il 3" e ottengo $2x=-3$. Non c'è nessun problema nel dire così; si ricordi però che significa aggiungere ad ambo i membri dell'equazione -3.

[4] Abbiamo detto "talvolta", dato che in generale può non essere così semplice. Anzi diciamo subito che, a parte qualche particolare tipologia di equazioni, che ora vedremo, non c'è un metodo generale per trovare le soluzioni.

[5] Se $a=0$ la cosa diventa banale: con $b\neq 0$ l'equazione è impossibile, mentre con $b=0$ è un'ovvia identità.

3 Equazioni di secondo grado

Anche qui pochi richiami delle cose essenziali.

Sono equazioni di secondo grado quelle i cui due membri sono riducibili a polinomi di secondo grado (o ad uno di secondo e l'altro di grado inferiore). Con i principi di equivalenza le equazioni di secondo grado si possono sempre ricondurre alla forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{, con } a \neq 0. \text{ [6]} \tag{1}$$

Vediamo come si risolvono. Consideriamo prima i seguenti casi particolari:

(i) $a \neq 0$, $b = c = 0$. L'equazione (1) diventa

$$ax^2 = 0,$$

e questa ha ovviamente per soluzione soltanto $x = 0$.

(ii) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. L'equazione (1) diventa:

$$ax^2 + bx = 0.$$

Scomponendo in fattori il primo membro, si può scrivere

$$x(ax + b) = 0.$$

La legge dell'*annullamento del prodotto*[7] dà le soluzioni $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$.

Esempio L'equazione

$$3x^2 - x = 0$$

si può scrivere come $x(3x - 1) = 0$ e quindi ha le soluzioni $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$.

(iii) $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. L'equazione (1) diventa

$$ax^2 + c = 0.$$

Se i coefficienti a, c sono *concordi* l'equazione risulta impossibile. Se invece a, c sono *discordi*, le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = \sqrt{-c/a}$, $x_2 = -\sqrt{-c/a}$.

In pratica, in questo caso, il procedimento risolutivo, è semplicemente il seguente: da $ax^2 + c = 0$ si ricava $x^2 = -c/a$ e, successivamente, essendo $-c/a > 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$.

Osservazione Approfitto dell'occasione per fare un'osservazione di carattere "tipografico". Talvolta è comodo scrivere una frazione "in linea", cioè ad esempio scrivere $\frac{a}{b}$ come a/b. Però attenzione: se vi capiterà di farlo dovete ricordare che, volendo ad esempio scrivere $\frac{a+b}{c}$ dovete scrivere $(a + b)/c$ e non $a + b/c$, che invece vuol dire $a + \frac{b}{c}$. Ancora: $\frac{1}{2x}$ si deve scrivere $1/(2x)$, perché $1/2x$ vuol dire $\frac{1}{2}x$. La notazione in linea può quindi essere comoda ma talvolta può complicare leggermente le cose, dato che può richiedere parentesi che altrimenti non sono necessarie.

Esempio L'equazione

$$3x^2 - 4 = 0$$

si può scrivere come $x^2 = 4/3$ e quindi ha le soluzioni $x_1 = -\sqrt{4/3}$, $x_2 = \sqrt{4/3}$, cioè $x_{1,2} = \pm 2/\sqrt{3}$.

(iv) Esaminiamo infine il caso $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Il procedimento risolutivo porta a scrivere successivamente le seguenti equazioni equivalenti alla (1):

$$\begin{array}{ll} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 & \text{(si sono moltiplicati i due membri per } 4a\text{);} \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac & \text{(si è aggiunto ai due membri } b^2 - 4ac\text{).} \end{array}$$

Si noti che abbiamo usato il completamento del quadrato. Quest'ultima può anche scriversi

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

[6] Se è $a = 0$ si ricade nel caso precedente dell'equazione di primo grado e, con $b \neq 0$, l'unica soluzione sarebbe $x = -c/b$.

[7] La legge dell'annullamento del prodotto è una proprietà valida nei numeri reali. Dice che se il prodotto di due numeri è zero allora deve necessariamente essere zero uno dei due numeri. La cosa può sembrare banale e siamo abituati a darla per scontata. Ci sono però strutture algebriche in cui questa legge non vale e quando parleremo più avanti di matrici constateremo che è proprio così.

Ora:

- ▷ se $b^2 - 4ac < 0$, si ha un'uguaglianza impossibile;
- ▷ se $b^2 - 4ac = 0$, si ha pure $2ax + b = 0$ e quindi l'equazione ha la sola soluzione $x = -\frac{b}{2a}$;
- ▷ se $b^2 - 4ac > 0$, il procedimento risolutivo porta a due equazioni di primo grado

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{e} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac},$$

le cui soluzioni sono rispettivamente

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

In pratica, per risolvere un'equazione di secondo grado completa, conviene esaminare preliminarmente la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$, detta *discriminante dell'equazione*.

- ▷ Se $\Delta < 0$, l'equazione (1) risulta impossibile.
- ▷ Se $\Delta = 0$, si ha la sola soluzione $x = -\frac{b}{2a}$.
- ▷ Se $\Delta > 0$, vi sono due soluzioni, che si ottengono mediante le formule (2).

Esempi

- L'equazione $3x^2 + 7x + 2 = 0$, avendo $\Delta = b^2 - 4ac = 25$, ha le due soluzioni

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{6} = -2 \quad , \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{25}}{6} = -\frac{1}{3}.$$

- L'equazione $4x^2 - 12x + 9 = 0$, avendo $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ha l'unica soluzione

$$x = -\frac{b}{2a} = 3/2. \text{ [8]}$$

- L'equazione $6x^2 - 7x + 3 = 0$, avendo $\Delta = b^2 - 4ac = -23 < 0$, non ha soluzioni.

Osservazione (*Formula ridotta*). Nel caso generale (caso (iv)), se il coefficiente del termine in x è pari si può usare una formula semplificata (detta ridotta). Lo studente, adattando gli stessi passaggi usati prima, provi a ritrovare questa formula, valida per un'equazione del tipo $ax^2 + 2bx + c = 0$.

$$\text{Le soluzioni sono:} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Si notino le differenze con la formula generale: il coefficiente della x viene diviso per 2, nel discriminante compare ac anziché $4ac$ e infine a denominatore compare a anziché $2a$.

Osservazione Le equazioni di primo e secondo grado sono le uniche per cui si hanno procedimenti standard di risoluzione. Nella loro semplicità sono di fondamentale importanza, dato che ad esse si fa sempre ricorso, sia per risolvere equazioni di altro tipo sia per risolvere le disequazioni.

Esercizio 3.1 Risolvere le equazioni (di primo e secondo grado)

(a) $2 - 3x = 4$ (b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ (c) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

4 Equazioni intere di grado superiore al secondo

Ci sono vari tipi di equazioni di grado superiore al secondo che possono essere risolti in modo elementare.

Vediamo quelle che si incontrano più frequentemente.

[8] Ovviamente $4x^2 - 12x + 9 = 0$ equivale a $(2x - 3)^2 = 0$, da cui la soluzione.

(i) *Equazioni binomie.* Prendono questo nome le equazioni del tipo:

$$ax^n + b = 0 \quad , \text{con } a \neq 0,\, b \neq 0.$$

Quando $n = 1$ o $n = 2$ l'equazione binomia, essendo rispettivamente di primo o di secondo grado, rientra nei casi già visti. Quando $n = 3$ si ha l'equazione binomia $ax^3 + b = 0$, che ha sempre una sola soluzione: $x = \sqrt[3]{-b/a}$.

Esempio È equazione binomia di terzo grado la seguente:

$$2x^3 - 16 = 0,$$

che si riduce facilmente alla forma $x^3 = 8$, e questa ha l'unica soluzione $x = \sqrt[3]{8}$, cioè $x = 2$.

Quando $n = 4$ e i coefficienti di $ax^4 + b = 0$ sono concordi, l'equazione non ha alcuna soluzione; se invece a e b sono discordi, come nel caso in cui $n = 2$, si hanno due soluzioni opposte: $x_1 = -\sqrt[4]{-b/a}$, $x_2 = +\sqrt[4]{-b/a}$.

Esempio l'equazione: $3x^4 + 12 = 0$ è impossibile, mentre $\frac{1}{2}x^4 - 3 = 0$, che equivale a $x^4 = 6$, ha le soluzioni opposte $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$.

(ii) *Equazioni trinomie.* Sono le equazioni del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, con $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ e $n > 1$. Si possono considerare come equazioni di 2° grado nella variabile x^n (infatti $ax^{2n} + bx^n + c = a(x^n)^2 + bx^n + c$):

- ▷ se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, esse equivalgono alle due equazioni binomie:

  $$x^n = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x^n = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

  che possono dare nel complesso nessuna, due o quattro soluzioni;
- ▷ se $\Delta = 0$, si ha una sola equazione binomia: $x^n = -b/2a$, che può dare nessuna, una o due soluzioni;
- ▷ se $\Delta < 0$, non si ha nessuna soluzione.

Vediamo qualche esempio.

- L'equazione $3x^4 - 4x^2 - 4 = 0$ è trinomia (biquadratica). Essa equivale alle equazioni binomie seguenti:

  $$x^2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{6} = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x^2 = \frac{4 + \sqrt{64}}{6} = 2.$$

  La prima non ha soluzioni, perché $-\frac{2}{3} < 0$, mentre la seconda ha per soluzioni i numeri $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Tali valori sono le soluzioni dell'equazione data.
- L'equazione $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ è pure biquadratica. Essa equivale all'equazione

  $$(2x^2 - 1)^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

  Quest'ultima fornisce le due soluzioni $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$, che sono le soluzioni dell'equazione data.
- L'equazione $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ è trinomia; pensata come equazione di 2° grado nella variabile x^3, dà le due equazioni binomie

  $$x^3 = \frac{7 - \sqrt{81}}{2} = -1 \quad \text{e} \quad x^3 = \frac{7 + \sqrt{81}}{2} = 8,$$

  le cui rispettive soluzioni sono $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$: queste sono le soluzioni dell'equazione data.

(iii) *Equazioni generali di grado superiore al secondo.* Occorre subito dire che per queste non ci sono metodi generali di risoluzione.[9] L'equazione si può scrivere nella forma $P_n(x) = 0$, dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado $n > 2$. Si possono risolvere se si è in grado di fattorizzare il polinomio in fattori al più di secondo grado, in altre parole se siamo in grado di trovare gli zeri del polinomio, e questo sappiamo che non è in generale un problema facile. In questi casi è di fondamentale importanza l'uso del teorema di Ruffini, visto in precedenza.

Vediamo qui alcuni esempi.

[9] Per la verità ci sono formule generali per le equazioni di terzo e quarto grado, ma sono piuttosto complicate. Uno dei grandi risultati della matematica (Galois, 1800) è che invece per le equazioni di quinto grado (e superiore) non esistono formule risolutive generali.

- Consideriamo l'equazione di terzo grado $x^3 + x - 2 = 0$. Si vede facilmente che 1 è uno zero del polinomio a primo membro. Questo dice che il polinomio è divisibile per $x - 1$ e con la regola di Ruffini si ottiene l'equazione equivalente $(x-1)(x^2+x+2) = 0$. Ora il polinomio x^2+x+2 non è ulteriormente fattorizzabile in fattori di primo grado dato che il discriminante è negativo. Quindi l'equazione data ha soltanto la soluzione $x = 1$.
- Consideriamo l'equazione di terzo grado $x^3 - 3x + 2 = 0$. Anche qui 1 è uno zero del polinomio a primo membro. Si ottiene l'equazione equivalente $(x-1)(x^2+x-2) = 0$. Ora il polinomio x^2+x-2 ha gli zeri 1 e -2. Allora l'equazione equivalente è $(x-1)^2(x+2) = 0$ e pertanto le soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$. Per esprimere il fatto che 1 "annulla due volte" l'equazione, si dice che 1 è soluzione doppia, o di molteplicità 2, mentre -2 è soluzione semplice, o di molteplicità 1.
- L'equazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, dopo aver osservato che 1 è zero del polinomio a primo membro e dopo aver diviso tale polinomio per $x - 1$, è equivalente alla $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$. Il polinomio $x^2 - 5x + 6$ ha come zeri 2 e 3, e quindi l'equazione si può scrivere come $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$. In questo caso abbiamo tre soluzioni distinte: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.
- Per evidenziare che le cose possono non essere sempre così semplici, consideriamo l'equazione di quarto grado $x^4 + x - 2 = 0$ (equazione trinomia, ma non biquadratica). Anche qui 1 è zero del polinomio a primo membro e si ottiene facilmente l'equazione equivalente $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 2) = 0$. Quindi una soluzione è $x_1 = 1$. Però ora, cercando radici intere o razionali del polinomio x^3+x^2+x+2 si vede subito che non se ne trovano. Non ci sono metodi elementari per poter proseguire (in realtà, con metodi che verranno sviluppati più avanti in questo corso, potremo dire senza troppa fatica che almeno un altro zero reale esiste, anzi che ne esiste un altro soltanto e che è negativo, ma per trovarlo con una formula occorrerebbe parecchia fatica in più).
- Con l'equazione $x^4-x^3+x-1 = 0$ le cose sono più semplici. Evidentemente 1 è una radice del polinomio. Si ottiene l'equazione equivalente $(x-1)(x^3+1) = 0$. Le soluzioni dell'equazione data sono quindi due: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Si poteva anche fattorizzare il polinomio iniziale con un doppio raccoglimento: $x^4 - x^3 + x - 1 = x^3(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^3+1)$.

  Lo studente svolga autonomamente altri esempi, prendendoli dai soliti testi di scuola secondaria.

$\boxed{\textbf{Esercizio 4.1}}$ Risolvere le equazioni (intere di grado superiore al secondo)

(a) $3x^3 + 1 = 0$ (b) $4x^4 - 1 = 0$

(c) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ (d) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

(e) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ (f) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

5 Equazioni razionali (o fratte)

Ricordiamo che un'equazione si dice *fratta*, quando l'incognita compare in essa, almeno una volta, anche a denominatore; è possibile allora che qualche valore non possa essere soluzione, perché annulla qualche denominatore: è bene individuare subito tali valori ed indicarli.

Questo è il primo caso in cui affrontiamo equazioni le cui soluzioni non vanno cercate nell'insieme di tutti i numeri reali, ma in un sottoinsieme di questi. Nelle equazioni intere viste finora non ci sono motivi per escludere a priori alcuni valori reali, precludendoli per così dire alle soluzioni che stiamo cercando. In altre parole i polinomi che compaiono nelle equazioni intere sono definiti per tutti i valori reali e quindi le soluzioni vanno cercate in tutto $\mathbb{R}$.

Con le equazioni fratte invece possiamo (e dobbiamo) escludere a priori gli eventuali valori che annullano i denominatori. Sicuramente le soluzioni non potranno assumere questi valori.

Esempio Volendo risolvere l'equazione $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}+2$ occorre anzitutto avere ben chiaro che i valori 1 e 0 non potranno in alcun caso essere soluzione. Sarebbe bene in questi casi fare uso della scrittura di sistema, scrivendo cioè

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + 2 \\ x \neq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Solitamente si dice che $x \neq 1$ e $x \neq 0$ sono le *condizioni di esistenza*. Si intende che sono le condizioni sotto le quali esistono (cioè sono definite, hanno senso) tutte le quantità in gioco nell'equazione iniziale. Tenendo conto di queste condizioni si può trasformare l'equazione fratta in una equazione equivalente intera.

Il sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - 2 = 0 \\ x \neq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \frac{x-(x-1)-2x(x-1)}{x(x-1)} = 0 \\ x \neq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x \neq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Si noti che nel passare dal secondo al terzo sistema ho moltiplicato ambo i membri dell'equazione per il denominatore: lo posso fare perché, come specificato nelle condizioni di esistenza, esso è diverso da zero.

Le soluzioni dell'ultima equazione sono $x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$. Sono entrambe accettabili, come soluzioni dell'equazione iniziale, perché soddisfano le condizioni di esistenza.

Esempio Analogamente, volendo risolvere l'equazione fratta

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x^2+x},$$

si scriverà il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x(x+1)} \\ x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq -1 \end{cases}$$

e successivamente

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x(x+1)} = 0 \\ x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \frac{x+2(x+1)-2}{x^2+x} = 0 \\ x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 3x = 0 \\ x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq -1. \end{cases}$$

La soluzione dell'ultima equazione è $x = 0$, ma questa non rispetta le condizioni di esistenza e quindi si deve concludere che l'equazione data è impossibile.

Osservazione Si noti che in entrambi gli esempi per risolvere l'equazione abbiamo portato tutte le incognite a sinistra, abbiamo ridotto allo stesso denominatore e abbiamo annullato il numeratore della frazione. Questa è una procedura generale per risolvere questo tipo di equazioni, senza dimenticare le condizioni di esistenza. Si ricordi che una frazione, quando esiste, si annulla se e solo se si annulla il suo numeratore.

Esercizio 5.1 Risolvere le equazioni (fratte)

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{x} + 2 = 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x}{x+1} + 1 = \frac{1}{x} \qquad \text{(c)} \quad \frac{1}{x^2} = x.$$

Prima di affrontare gli altri tipi di equazioni è necessario rivedere come si risolvono le prime semplici disequazioni.

6 Generalità sulle disequazioni

Le disequazioni sono disuguaglianze tra espressioni in cui sono presenti delle variabili. Se $A(x)$ e $B(x)$ rappresentano ad esempio espressioni nella variabile x, sono disequazioni le seguenti scritture:

$$A(x) > B(x) \quad , \quad A(x) < B(x) \quad , \quad A(x) \geq B(x) \quad , \quad A(x) \leq B(x),$$

dove ovviamente, come capita spesso, una delle due espressioni può essere una costante.

Ad esempio sono disequazioni le seguenti scritture:

$$x^2 - 5x > 3 \quad ; \quad \frac{x}{x+1} < \frac{x+2}{x} \quad ; \quad 1 + x > \frac{\ln x}{x}.$$

Le disequazioni, come le equazioni, possono essere vere o false a seconda dei valori che si attribuiscono alle variabili.

I numeri che, sostituiti alle variabili, rendono vera una disequazione, si dicono le *soluzioni* della disequazione. Risolvere una disequazione significa, come prima, trovare tutte le sue soluzioni.

Con le disequazioni capita più di frequente, rispetto alle equazioni, che le soluzioni siano infinite (cioè che l'insieme delle soluzioni sia un insieme infinito). Per indicare l'insieme delle soluzioni si possono usare disequazioni "immediate" del tipo

$$x < a \quad , \quad x \geq b \quad , \quad a \leq x < b \quad , \quad \ldots$$

oppure si può usare una notazione insiemistica, scrivendo cioè chi è l'insieme S delle soluzioni, come in

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad , \quad S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\} \quad , \quad S = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad , \quad \ldots$$

o anche, con le notazioni degli intervalli,

$$S = (-\infty, a) \quad , \quad S = [b, +\infty) \quad , \quad S = [a, b) \quad , \quad \ldots .$$

A volte anche le disequazioni sono prive di soluzioni, e allora si dicono *impossibili*, oppure sono *identicamente vere*, quando ogni numero è soluzione.

Esempio È impossibile la disequazione $x^2 < -\sqrt{x}$ ed è identicamente vera la $x^2 + 1 > -\frac{1}{x^2}$, come è facile capire.[10]

Due disequazioni, analogamente a quanto detto per le equazioni, sono *equivalenti* quando hanno il medesimo insieme di soluzioni.

Esistono, anche per le disequazioni, principi di equivalenza che sono alla base dei vari procedimenti risolutivi, e sono:

1. **Principio di addizione.**

   Aggiungendo ad ambo i membri di una disequazione uno stesso numero o una medesima espressione (che non alteri l'insieme di risoluzione della disequazione) si ottiene una disequazione equivalente.

   Ad esempio, $3x - 4 > 1$ è equivalente a $3x > 5$, perché ottenuta dalla prima aggiungendo ad ambo i membri 4.

2. **Principio di moltiplicazione.**

   Moltiplicando (o dividendo) ambo i membri di una disequazione per uno stesso numero *positivo* o una medesima espressione, che si mantenga pure positiva per ogni valore attribuibile alla variabile e non alteri l'insieme di risoluzione, si ottiene una disequazione equivalente alla data. Se il fattore per cui si moltiplica (o si divide) è *negativo*, allora, per ottenere una disequazione equivalente occorre *invertire il verso della disequazione*.

   Esempio La disequazione $\frac{x-1}{2} > \frac{x}{3}$ è equivalente alla $3(x - 1) > 2x$, ottenuta moltiplicando ambo i membri della prima per 6. Questa, a sua volta, applicando il principio di addizione, diventa $x > 3$, che fornisce quindi le soluzioni della disequazione data.

   Esempio Nella disequazione $\frac{x+3}{2x} < \frac{1}{4}$ invece occorre fare attenzione. Oltre alla presenza di un denominatore che può annullarsi, non possiamo semplicemente moltiplicare, come fatto prima, ambo i membri per $4x$, dato che x può essere negativo. È necessario quindi uno studio più attento, che richiede di tenere conto del segno di x. Vedremo presto come si procede in questi casi.

7 Disequazioni di primo e di secondo grado

(i) Sono disequazioni di *primo grado* quelle che possono ricondursi ad una delle forme:

$$ax + b > 0 \quad , \quad ax + b \geq 0 \quad , \quad ax + b < 0 \quad \text{oppure} \quad ax + b \leq 0 \quad , \; a \neq 0.$$

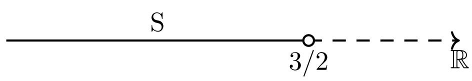
- ▷ Se $a > 0$, queste hanno rispettivamente per soluzione:

  $$x > -b/a \quad , \quad x \geq -b/a \quad , \quad x < -b/a \quad , \quad x \leq -b/a$$

  (con $a < 0$ si potrà sempre, cambiando il segno dei due membri e il verso della disuguaglianza, ricondursi al caso precedente).
- ▷ Se fosse invece $a = 0$ e $b > 0$, le disequazioni sarebbero di grado zero e avremmo le prime due identicamente vere e le seconde due impossibili.
- ▷ Con $a = 0$ e $b < 0$ la situazione s'inverte: le prime due risultano impossibili e le seconde due identicamente vere.

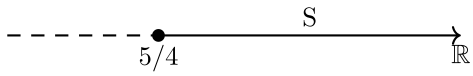
Esempi

- La disequazione $4(x + 2) - 5 < 2(x + 3)$ equivale alla $4x + 3 < 2x + 6$; col principio di addizione si ottiene $4x - 2x < -3 + 6$, ossia $2x < 3$; col principio di moltiplicazione si ha infine $x < 3/2$.
  L'insieme delle soluzioni, di questa e della disequazione data, è quindi $S = (-\infty, \frac{3}{2})$, che si può rappresentare graficamente con



[10] La prima è impossibile perché il primo membro è certamente non negativo e il secondo non positivo. Si noti che non è impossibile invece la $x^2 \leq -\sqrt{x}$, dato che ha la soluzione $x = 0$. La seconda è identicamente vera (lo è nell'insieme in cui è definita, cioè per $x \neq 0$) dato che il primo membro è certamente positivo e il secondo negativo.

- La disequazione $5 - 4x \leq 0$ equivale alla $4x \geq 5$, cioè alla $x \geq 5/4$. L'insieme delle soluzioni è quindi $S = [\frac{5}{4}, +\infty)$ che si può rappresentare con



Osservazione Si notino, nei due disegni, queste convenzioni: uso il "pallino vuoto" per dire che il numero non fa parte dell'insieme delle soluzioni e il "pallino pieno" per dire che invece il numero appartiene all'insieme delle soluzioni. Analogamente il tratto continuo indica un intervallo di soluzioni, mentre il tratteggio indica un intervallo in cui non ci sono soluzioni.

- $\frac{x+2}{2} > 4 + \frac{1}{2}x$; moltiplicando ambo i membri per 2, la disequazione diventa $x + 2 > 8 + x$; trasportando i termini si ha $x - x > 8 - 2$, ossia $0 > 6$, che è falsa. La disequazione data è quindi impossibile.
- $\frac{x+3}{5} + \frac{x}{4} > \frac{9x-1}{20}$; moltiplicando ambo i membri per 20 si ha $4(x + 3) + 5x > 9x - 1$; questa diventa $9x + 12 > 9x - 1$, ossia $0 > -13$, vera per qualunque valore della variabile. La disequazione data è perciò identicamente vera.

(ii) Sono disequazioni di *secondo grado* quelle che possono ricondursi ad una delle forme:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad , \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad , \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \quad , \; a \neq 0.$$

Si può pensare che sia $a > 0$ (in caso contrario sarà conveniente cambiare il segno dei termini e il verso della disuguaglianza). Il numero $\Delta = b^2 - 4ac$ (il discriminante dell'equazione associata) potrà risultare positivo, nullo o negativo. Si presentano allora i seguenti casi:

▷ Se $\Delta > 0$, ci sono due numeri distinti $x_1 < x_2$ per cui $ax^2 + bx + c = 0$. In questo caso:
$ax^2 + bx + c > 0$ ha per soluzioni $x < x_1$, $x > x_2$, cioè $S = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;
$ax^2 + bx + c \geq 0$ ha per soluzioni $x \leq x_1$, $x \geq x_2$, cioè $S = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$;
$ax^2 + bx + c < 0$ ha per soluzioni $x_1 < x < x_2$, cioè $S = (x_1, x_2)$;
$ax^2 + bx + c \leq 0$ ha per soluzioni $x_1 \leq x \leq x_2$, cioè $S = [x_1, x_2]$
(come noto si dice che le soluzioni sono per valori esterni o interni alle due radici).

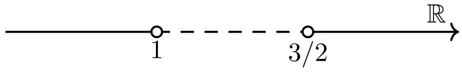
▷ Con $\Delta = 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha un'unica soluzione $x_1 = -\frac{b}{2a}$. In questo caso:
$ax^2 + bx + c > 0$ ha per soluzioni ogni $x \neq -\frac{b}{2a}$, quindi possiamo scrivere $S = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$;
$ax^2 + bx + c \geq 0$ ha per soluzioni ogni x reale, quindi $S = \mathbb{R}$;
$ax^2 + bx + c < 0$ è invece impossibile, quindi $S = \emptyset$;
$ax^2 + bx + c \leq 0$ ha per soluzione solo $x = -\frac{b}{2a}$, quindi $S = \{-\frac{b}{2a}\}$.

▷ Infine con $\Delta < 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali e quindi:
$ax^2 + bx + c > 0$ è identicamente vera, quindi $S = \mathbb{R}$;
$ax^2 + bx + c \geq 0$ è pure identicamente vera, quindi $S = \mathbb{R}$;
$ax^2 + bx + c < 0$ è impossibile, quindi $S = \emptyset$;
$ax^2 + bx + c \leq 0$ è pure impossibile, quindi $S = \emptyset$.

Esempi

- $2x^2 - 5x + 3 > 0$. $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, gli zeri sono $x_1 = 1, x_2 = 3/2$.

  Soluzioni: $x < 1$ oppure $x > 3/2$



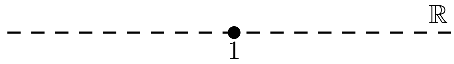
  $S = (-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

- $2x^2 - 4x + 2 < 0$. $\Delta = 16 - 16 = 0$, unico zero: $x_1 = 1$.

  Soluzioni: nessuna, quindi disequazione impossibile, $S = \emptyset$

- $2x^2 - 4x + 2 \leq 0$.

  Soluzioni: $x = 1$



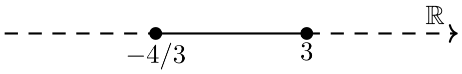
  $S = \{1\}$

- $2x^2 - 4x + 3 > 0$. $\Delta = 16 - 24 < 0$, nessuno zero.

  Soluzioni: ogni numero, quindi disequazione identicamente vera, $S = \mathbb{R}$

- $3x^2 - 5x - 12 \leq 0$. $\Delta = 25 + 144 = 169$, zeri: $x_{1,2} = \frac{5 \mp 13}{6}$, ossia $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 3$.

  Soluzioni: $-\frac{4}{3} \leq x \leq 3$

  $S = [-\frac{4}{3}, 3]$

Esercizio 7.1 Risolvere le disequazioni (di primo e secondo grado)

(a) $1 - 3x < 5$ (b) $x^2 - x - 6 \geq 0$

(c) $4 + 3x - x^2 > 0$ (d) $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$

8 Sistemi di equazioni e di disequazioni di primo e secondo grado

Abbiamo già visto rapidamente in precedenza che i sistemi di equazioni (o di disequazioni) altro non sono che insiemi di due o più equazioni (o disequazioni) nelle stesse variabili (incognite).

E abbiamo detto che risolvere un sistema di equazioni (o di disequazioni) significa cercare tutte le soluzioni comuni alle equazioni (o alle disequazioni) che lo compongono: queste, se ci sono, sono costituite in genere da numeri (coppie, terne, . . . ordinate di numeri, se ci sono più incognite) che verificano tutte le equazioni (o le disequazioni) del sistema.

Vediamo ora qualche caso particolare di sistema.

(i) **Sistemi di equazioni di** 1° **grado.** Ricordiamo che il grado di un sistema di equazioni intere è dato dal prodotto dei gradi delle sue equazioni, quindi si dice *sistema di 1° grado o lineare* ogni sistema le cui equazioni siano tutte di 1° grado, rispetto al complesso delle incognite.

Le equazioni che compongono un sistema hanno spesso tante incognite quante sono le sue equazioni, ma si potranno incontrare anche sistemi in cui ciò non accade.

Esempio il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{ha due equazioni e due incognite.}$$

Esso ha però una sola soluzione: la coppia $(1, -1)$. (Attenzione: non si deve dire che il sistema ha due soluzioni perché si trovano due valori: la soluzione è una sola, ed è una coppia di valori).

Altro esempio è il sistema

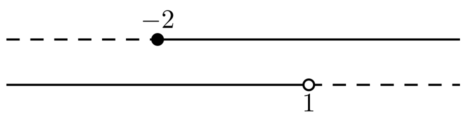
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 3. \end{cases}$$

Questo ha due equazioni, ma tre incognite. Alla risoluzione, in generale, dei sistemi di equazioni lineari sarà dedicata una parte del programma, più avanti.

(ii) **Sistemi di disequazioni di** 1° **grado in una variabile.** Le soluzioni si ottengono risolvendo separatamente le singole disequazioni che compongono il sistema e cercando poi le soluzioni comuni, aiutandosi eventualmente con una rappresentazione grafica.

Si abbia, per esempio, il sistema di disequazioni

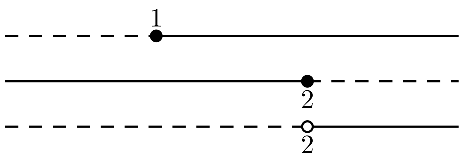
$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1. \end{cases}$$



Dal grafico delle soluzioni delle singole disequazioni si deduce facilmente che le soluzioni del sistema sono tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ per cui sia $-2 \leq x < 1$. Si osservi che, per ricavare l'insieme delle soluzioni del sistema dagli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni, abbiamo fatto l'*intersezione*.

Il sistema di tre disequazioni

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ x > 2. \end{cases}$$

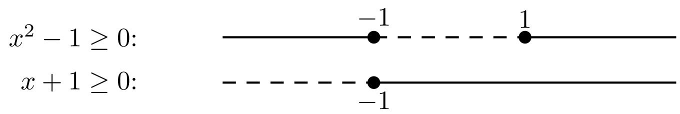


Si vede subito che non ci sono soluzioni comuni e quindi il sistema non ha soluzioni.

Un esempio di sistema con disequazioni di primo e secondo grado:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzioni l'insieme $S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, la seconda l'insieme $S_2 = [-1, +\infty)$. Rappresentiamo graficamente:



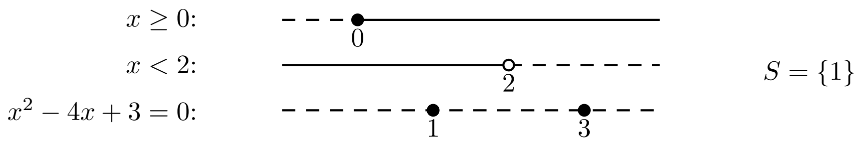
Risulta evidente che le soluzioni sono date dall'insieme $S = \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

Possono anche presentarsi sistemi cosiddetti "misti", come il seguente

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$$

Il sistema è formato da due disequazioni e da una equazione di 2° grado, le cui soluzioni sono i numeri $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Queste però, confrontate con le soluzioni delle disequazioni, portano a concludere che solo $x_1 = 1$ è soluzione del sistema, essendo l'altra, $x_2 = 3$, incompatibile con la condizione: $x < 2$.

Graficamente si ha



9 Disequazioni intere di grado superiore al secondo

Sono le disequazioni che possono ricondursi alle forme

$$P(x) > 0 \quad , \quad P(x) \geq 0 \quad , \quad P(x) < 0 \quad \text{oppure} \quad P(x) \leq 0,$$

dove $P(x)$ è un polinomio in una variabile di almeno terzo grado.

Come accade per le corrispondenti equazioni, la prima cosa da fare (e forse anche quella che può risultare più difficile) è la fattorizzazione del polinomio $P(x)$, di cui abbiamo già detto. Supponiamo quindi di aver già fattorizzato il polinomio. Vediamo come si può procedere su di un paio di esempi.

Esempi

- $(x^2 + 1)(x - 1) \geq 0$. Qui si può osservare che solo il secondo fattore può cambiare di segno, dato che il primo è strettamente positivo per ogni x. Allora una disequazione equivalente è semplicemente $x - 1 \geq 0$, che ha per soluzioni $x \geq 1$, cioè l'intervallo $[1, +\infty)$.

  Avremmo anche potuto risolvere la disequazione trasformandola in un doppio sistema, osservando che il prodotto di due quantità è maggiore o uguale a zero se e solo se sono entrambe non negative oppure entrambe non positive:

  $$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + 1 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0, \end{cases}$$

  Lo studente provi a risolvere i due sistemi e ad ottenere per questa strada le soluzioni già trovate prima.

- $(x-1)^2(x+1) \leq 0$. Attenzione qui. Il primo fattore è non negativo, ma può annullarsi. Possiamo intanto osservare che i valori che annullano i singoli fattori, e cioè $x = 1$ e $x = -1$, sono soluzioni, dato che la disuguaglianza prevede anche l'uguale a zero. In secondo luogo, anche in questo caso il primo fattore non cambia segno (cioè, dove non è nullo è positivo). Allora le soluzioni sono date dall'insieme $(-\infty, -1] \cup \{1\}$.

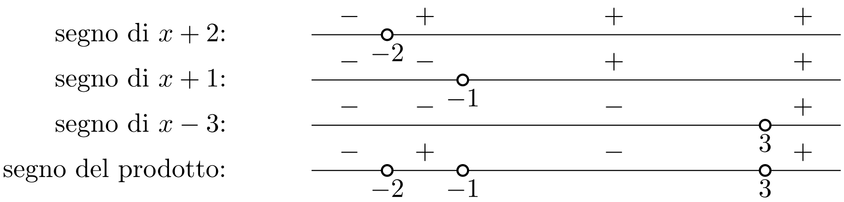
Anche qui avremmo potuto risolvere la disequazione trasformandola nel doppio sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} (x-1)^2 \leq 0 \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce l'intervallo $(-\infty, -1]$, il secondo l'unico punto 1.

Si noti che, se la disequazione fosse stata $(x-1)^2(x+1) < 0$, le soluzioni $x = 1$ e $x = -1$ non sarebbero state accettabili e quindi avremmo avuto per soluzioni soltanto $(-\infty, -1)$.

- $(x+2)(x+1)(x-3) < 0$. Osserviamo intanto che i valori che annullano i singoli fattori, e cioè $x = -2$, $x = -1$ e $x = 3$, non sono soluzioni. Qui ora conviene studiare il segno dei tre fattori. Un consiglio: studiate sempre il segno *positivo* dei fattori, anche se la disequazione è con il "$<$", come in questo caso. Si ha:



Nei tre assi sono riportati i segni dei tre fattori[11] e sotto c'è il segno del prodotto dei tre fattori, in base alle solite regole sul "prodotto dei segni". A questo punto si torna a considerare la disequazione iniziale: anzitutto, come già detto, si osserva che gli estremi degli intervalli, che annullano i fattori e quindi il prodotto, non sono accettabili; poi si considera che la richiesta era di avere un prodotto minore di zero. Quindi si prendono come soluzioni gli intervalli in cui compare il segno "$-$", cioè $S = (-\infty, -2) \cup (-1, 3)$.

Osservazione Si noti che lo studio separato del segno dei fattori può essere utilizzato in ogni caso in cui serve conoscere il segno di un prodotto o di un quoziente. Utile esercizio che lo studente può fare è la risoluzione di una disequazione di 2° grado con lo studio del segno dei due fattori.

$\boxed{\textbf{Esercizio 9.1}}$ Risolvere le disequazioni (intere di grado superiore al secondo)

(a) $x^3 - 3x^2 + 2x \geq 0$ (b) $x^3 + x^2 < 0$

(c) $x^3 - x^4 > 0$ (d) $x^4 - x^2 \geq 0$

10 Disequazioni razionali (o fratte)

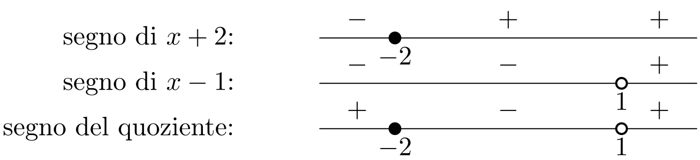
Le disequazioni che possono ricondursi alle forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad , \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad , \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi in una variabile vengono dette *disequazioni razionali* (o *fratte*). Queste disequazioni vanno affrontate tenendo anzitutto presente che possono richiedere condizioni di esistenza (il denominatore non si deve annullare). Successivamente si possono risolvere o studiando il segno dei due fattori (e considerando che il segno del quoziente coincide con il segno del loro prodotto) oppure ricorrendo come già visto ai due sistemi.

Esempi

- Consideriamo la disequazione fratta $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$. Anzitutto notiamo che i due termini della frazione (numeratore e denominatore) si annullano rispettivamente in $x = -2$ e $x = 1$: il valore $x = 1$ non è certamente soluzione, dato che annulla il denominatore. Poi, considerando che la disequazione è con il "maggiore o uguale", possiamo dire che $x = -2$ è soluzione. Infine studiamo il segno dei due termini. Si ha il seguente schema:



[11] Se studiate sempre il segno positivo dei fattori dovete semplicemente riportare il segno + nell'insieme delle soluzioni trovate: ad esempio, con il primo fattore si ha $x + 2 > 0$ per $x > -2$ e quindi dobbiamo riportare il segno + a destra di -2.

Quindi le soluzioni sono date dall'insieme $S = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

Si poteva anche scrivere il doppio sistema

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

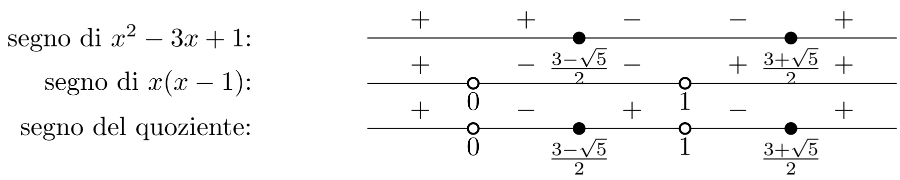
- Consideriamo la disequazione $\dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{x-1}{x}$. Anzitutto notiamo che deve essere $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Successivamente "portiamo tutto a primo membro" e otteniamo

$$\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x} \geq 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{x - x^2 + 2x - 1}{x(x-1)} \geq 0 \quad \text{cioè ancora} \quad \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)} \leq 0$$

(nell'ultimo passaggio ho cambiato il segno del numeratore, cambiando il verso della disuguaglianza, per avere due fattori di 2° grado con coefficiente del termine quadratico positivo).[12] Ora posso intanto trovare gli zeri del polinomio a numeratore:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Osservo allora che gli zeri del polinomio a numeratore sono soluzioni, mentre gli zeri del denominatore (0 e 1) non lo sono. Ora studio il segno dei due termini:



Attenzione ora: per decidere quali dobbiamo prendere come soluzioni dobbiamo riferirci all'ultima disequazione ottenuta prima dello studio del segno. Anche se la disequazione iniziale era con il $\geq$, quella che dobbiamo considerare è con il $\leq$ e quindi quelli che ci interessano sono gli intervalli dove c'è il segno $-$. Le soluzioni sono pertanto date dall'insieme $S = \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Si poteva anche procedere con il doppio sistema (provare a svolgere i calcoli):

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \leq 0 \\ x(x-1) > 0. \end{cases}$$

- Nell'introduzione alle disequazioni avevamo considerato, senza poi risolvere, la disequazione $\dfrac{x+3}{2x} < \dfrac{1}{4}$, osservando che il moltiplicare ambo i membri per $2x$ (per renderla intera) è sbagliato in quanto così facendo non si tiene conto del segno di x. Si tratta di una disequazione fratta e adesso sappiamo risolverla. Portando tutto a primo membro si ottiene:

$$\frac{x+3}{2x} - \frac{1}{4} < 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{2x + 6 - x}{4x} < 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{x+6}{4x} < 0.$$

Ora, con i metodi visti, si ottiene facilmente $S = (-6, 0)$.

Si poteva procedere anche in altro modo. Presento la tecnica perché la stessa può essere utile in altre situazioni.

Riconsideriamo la disequazione nella forma iniziale

$$\frac{x+3}{2x} < \frac{1}{4}.$$

Dopo aver osservato che certamente $x = 0$ non è soluzione, si possono distinguere due casi: $x > 0$ oppure $x < 0$.

Se $x > 0$ possiamo moltiplicare ambo i membri per $4x$, mantenendo il verso della disuguaglianza; se $x < 0$, possiamo moltiplicare ancora tutto per $4x$, ma cambiando il verso della disuguaglianza.

[12] Questo non è necessario. Si poteva anche lasciare la frazione com'era e studiare il segno dei due fattori. Occorre però fare attenzione a non fare pasticci quando si studia il segno di un polinomio di secondo grado con coefficiente del termine quadratico negativo!

Allora possiamo esprimere tutto con due sistemi:

$$\begin{cases} 4x > 0 \\ 2(x+3) < x \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 4x < 0 \\ 2(x+3) > x. \end{cases}$$

Attenzione che entrambi i sistemi, a priori, possono fornire soluzioni. Per ottenere le soluzioni complessive dovremo poi fare, come in precedenza, l'*unione* dei due insiemi.

Il primo sistema in questo caso è impossibile (il suo insieme di soluzioni è $\emptyset$) ed il secondo ha per soluzione $-6 < x < 0$. Quindi l'intervallo $(-6, 0)$ è l'insieme delle soluzioni della disequazione, come già trovato.

Esercizio 10.1 Risolvere le disequazioni (fratte)

$$\text{(a)} \quad x + \frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad\qquad \text{(b)} \quad \frac{2}{x} + x \geq 3 \qquad\qquad \text{(c)} \quad \frac{x}{1-x^2} \geq x.$$

11 Equazioni e disequazioni irrazionali

Si dicono *irrazionali* quelle equazioni e disequazioni che presentano la variabile, almeno in un termine, sotto un segno di radice (che può essere quadrata, terza, ...).

Per esempio, sono irrazionali l'equazione e la disequazione seguenti:

$$2x + \sqrt{x} = 1 \qquad ; \qquad \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \sqrt{x} - 2.$$

Anzitutto occorre ricordare che solitamente queste equazioni/disequazioni richiedono condizioni di esistenza, dato che le radici di indice pari vogliono argomenti non negativi. Non così le radici di indice dispari, che sono definite anche con argomenti negativi.

Per risolvere poi le equazioni e le disequazioni irrazionali si deve far ricorso ad un *terzo principio* di equivalenza in virtù del quale si può sostituire ad una equazione (o disequazione) irrazionale quella che si ottiene elevando i due membri allo stesso esponente naturale, ma ricordando quanto segue:

- se n è *dispari*, l'equazione $A(x) = B(x)$ è equivalente all'equazione $(A(x))^n = (B(x))^n$;
- se n è *pari* e *se* $A(x)$ *e* $B(x)$ *sono maggiori o uguali a zero*, l'equazione $A(x) = B(x)$ è equivalente all'equazione $(A(x))^n = (B(x))^n$.

Analogamente, per le disequazioni:

- se n è *dispari*, la disequazione $A(x) > B(x)$ è equivalente alla disequazione $(A(x))^n > (B(x))^n$;
- se n è *pari* e *se* $A(x)$ *e* $B(x)$ *sono maggiori o uguali a zero*, la disequazione $A(x) > B(x)$ è equivalente alla disequazione $(A(x))^n > (B(x))^n$.

Osservazione Quindi, detto in parole molto povere con la speranza che questo faciliti gli studenti a ricordare questo punto delicato e fonte di molti errori: se le radici sono di indice dispari le cose sono semplici; se le radici sono di indice pari invece occorre fare più attenzione e la risoluzione dell'equazione/disequazione è più elaborata.

Vediamo, attraverso alcuni esempi, come si procede in pratica.

- Consideriamo l'equazione $\sqrt[3]{3x+5} = x + 1$. La radice è di indice dispari. L'equazione equivale alla $3x + 5 = (x+1)^3$, che si ottiene elevando al cubo i due membri.[13] Quest'ultima diventa

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{, che ha per soluzioni} \quad x_1 = -2, x_2 = 1.$$

[13] Si ricorda anche che in questo caso non ci sono condizioni di esistenza da porre: infatti le radici di indice dispari sono definite per ogni valore dell'argomento.

- Consideriamo l'equazione $\sqrt{2x+3} = x+1$. Qui anzitutto c'è la condizione di esistenza $2x+3 \geq 0$, dato che la radice è di indice pari. Poi si ragiona sul segno di $x+1$: non ci possono essere soluzioni se $x+1<0$, dato che invece certamente $\sqrt{2x+3} \geq 0$. Quindi possiamo limitarci a considerare il caso $x+1 \geq 0$. Tenendo conto allora di tutte le condizioni espresse, possiamo elevare al quadrato. Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x+3 = (x+1)^2 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x \geq -3/2 \\ x \geq -1 \\ x^2 = 2. \end{cases}$$

  Delle due soluzioni dell'equazione ($x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$), soltanto quella positiva ($x_2 = \sqrt{2}$) soddisfa anche le disequazioni (infatti $-\sqrt{2} < -1$) e pertanto la soluzione dell'equazione data è $\sqrt{2}$.

  Mostriamo ora come si procede per risolvere le disequazioni.

- $\sqrt[3]{x^3+3x-2} < x-1$. Non ci sono condizioni di esistenza. Elevando alla terza, la disequazione equivale alla

$$x^3+3x-2 < (x-1)^3,$$

  che a sua volta diventa $3x^2-1<0$. Pertanto le soluzioni cercate sono $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (oppure $S = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$).

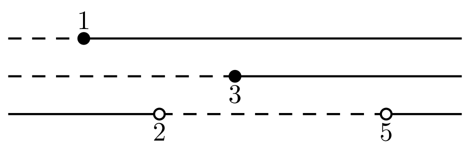
- $\sqrt{x-1} < x-3$. Condizione di esistenza del radicale: $x-1 \geq 0$; poi si osserva che, se il secondo membro è negativo, non ci possono essere soluzioni, dato che il primo membro è certamente non negativo; quando il secondo membro è non negativo, possiamo elevare al quadrato.

  Quindi questa disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 & \text{(assicura l'esistenza del radicale)} \\ x-3 \geq 0 & \text{(assicura la non negatività del secondo membro)} \\ x-1 < (x-3)^2 & \text{(equivale, per le condizioni poste, alla disequazione data).} \end{cases}$$

  La terza disequazione è verificata da $x<2$, $x>5$. Il sistema precedente diventa perciò

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 3 \\ x < 2 \ \vee \ x > 5 \end{cases}$$



  Dal grafico si deduce che le soluzioni della disequazione data sono i valori $x>5$, cioè $S = (5, +\infty)$.

- $\sqrt{3x^2+4x+2} > 5-2x$. La condizione di esistenza è $3x^2+4x+2 \geq 0$. Questa volta, se il secondo membro è negativo, abbiamo certamente soluzioni, dato che il primo è non negativo. Pertanto il sistema

$$\begin{cases} 3x^2+4x+2 \geq 0 \\ 5-2x < 0 \end{cases}$$

  fornisce un primo insieme di soluzioni S_1: osservando che la prima disequazione è identicamente vera, avendo $\Delta < 0$, le soluzioni di questo sono $x > \frac{5}{2}$, quindi $S_1 = (\frac{5}{2}, +\infty)$.

  Se invece il secondo membro è non negativo, possiamo elevare al quadrato, ottenendo così il sistema:

$$\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ 3x^2+4x+2 > (5-2x)^2 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x \leq 5/2 \\ x^2-24x+23 < 0. \end{cases}$$

  La disequazione di secondo grado è verificata dagli x tali che $1<x<23$; quindi le soluzioni del sistema sono $1 < x \leq \frac{5}{2}$, e pertanto $S_2 = (1, \frac{5}{2}]$. Di conseguenza si può affermare che le soluzioni della disequazione data sono costituite dall'insieme $S_1 \cup S_2 = (\frac{5}{2}, +\infty) \cup (1, \frac{5}{2}] = (1, +\infty)$.

Esercizio 11.1 Risolvere le equazioni (irrazionali)

(a) $x-1 = \sqrt{x}$ (b) $1 - \sqrt{x-1} = x$.

Esercizio 11.2 Risolvere le disequazioni (irrazionali)

(a) $x - \sqrt{1-x} < 3$ (b) $x \leq 1 - \sqrt{x+1}$ (c) $\sqrt{1-x^2} > x$.

12 Equazioni e disequazioni esponenziali

Si dicono *esponenziali* quelle equazioni (e disequazioni) che presentano l'incognita ad esponente di una o più potenze di base positiva assegnata.

Ad esempio, sono esponenziali le equazioni

$$3^x = 2 \quad , \quad 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^x + 3$$

e le disequazioni

$$2^x > 5 \quad , \quad 5^{1-\sqrt{x}} < 1 + x.$$

Alcune equazioni e disequazioni esponenziali si possono risolvere scrivendo ambo i membri come potenze nella stessa base. Poi occorre tenere presenti le proprietà delle potenze ed un *principio di equivalenza*, in virtù del quale *ad una uguaglianza (o disuguaglianza) tra potenze di ugual base si può sempre sostituire l'uguaglianza (o una disuguaglianza appropriata) tra gli esponenti*.

Abbiamo detto disuguaglianza appropriata dato che, nel passare agli esponenti, occorre considerare se la base è maggiore o minore di 1. Se la base è maggiore di 1 il verso della disuguaglianza si conserva mentre, se la base è minore di 1, il verso della disuguaglianza va cambiato.

Si tenga anche conto del fatto che le potenze presenti nell'equazione (disequazione) possono non avere inizialmente la stessa base: è allora opportuno operare in modo che diventino potenze nella stessa base (abbiamo già visto in precedenza come si può scrivere un qualunque numero reale positivo come potenza in una data base).

Illustriamo, attraverso esempi, come si procede in alcuni casi.

- $3^{x^2-2x} = 27$. Potendo vedere i due membri dell'equazione come potenze nella stessa base ($27 = 3^3$), possiamo considerare l'equazione equivalente $x^2 - 2x = 3$, che ha per soluzioni $x_1 = -1, x_2 = 3$. Questi valori sono le soluzioni dell'equazione data.
- $3^x = \sqrt{3^{x^2-x}}$. In questo caso si può procedere così: l'equazione si può scrivere $3^x = 3^{\frac{x^2-x}{2}}$, da cui $x = \frac{x^2-x}{2}$, cioè $x^2 - 3x = 0$, che ha per soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.
- $3^{2x} = 5$. Scriviamo 5 come potenza di base 3: $3^{2x} = 3^{\log_3 5}$. Quindi otteniamo

  $2x = \log_3 5$, da cui $x = \frac{1}{2}\log_3 5$, che è l'unica soluzione dell'equazione data.
- $3^{2x} - 11 \cdot 3^x + 18 = 0$. Questa equazione appartiene ad una tipologia particolare: si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad un'equazione di secondo grado. Ponendo $3^x = t$ si ha infatti l'equazione in t

  $$t^2 - 11t + 18 = 0,$$

  le cui soluzioni sono $t_{1,2} = \frac{11 \mp 7}{2}$, cioé $t_1 = 2, t_2 = 9$. Queste permettono di scomporre l'equazione data nelle due equazioni esponenziali

  $$3^x = 2 \qquad , \qquad 3^x = 9,$$

  che portano alle soluzioni

  $$x_1 = \log_3 2 \qquad , \qquad x_2 = 2.$$

Vediamo ora, con qualche esempio, come si procede nella risoluzione delle disequazioni: diciamo subito che i procedimenti sono analoghi a quelli delle equazioni, con qualche attenzione in più relativamente al verso della disuguaglianza.

- $2^{x^2+2x} > 8$. Potendo vedere i due membri come potenze di 2 ($8 = 2^3$), ed essendo $2 > 1$, si può passare alla disuguaglianza tra gli esponenti, conservando il verso: si ha così $x^2 + 2x > 3$. Le soluzioni di questa disequazione sono per $x < -3$ oppure $x > 1$. Queste sono le soluzioni anche della disequazione data.
- $(\frac{1}{2})^{x^2+2x} > \frac{1}{8}$. Essendo ora la base delle potenze $\frac{1}{2} < 1$, passando al confronto degli esponenti, per avere una disequazione equivalente si dovrà cambiare il verso della disuguaglianza. Quindi si ha $x^2+2x < 3$, le cui soluzioni sono per $-3 < x < 1$.
- $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 1 > 0$. Qui la strada non è quella di scrivere subito tutto come potenza in base 3.[14] Usando invece altre proprietà delle potenze la disequazione si può riscrivere come $2 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x + 1 > 0$, cioè $3^x < 1$. Le soluzioni sono quindi le $x < 0$.

  Questo esempio mostra che per questo tipo di disequazioni non c'è un metodo generale, che forse si poteva vedere nei tipi di disequazioni incontrate in precedenza. Qui lo studente deve, con l'esperienza, arrivare ad imparare alcuni metodi possibili.

[14] Si potrebbe anche scrivere $3^{\log_3 2 + x} - 3^{x+1} + 3^0 > 0$, ma a questo punto non andiamo da nessuna parte.

- $2^{2x} - 2^{x+1} < 3$. Osservando che $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ e che $2^{2x} = (2^x)^2$, la disequazione data si può scrivere

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 < 0. \quad \text{Poniamo ora } 2^x = t. \text{ Otteniamo} \quad t^2 - 2t - 3 < 0.$$

  Gli zeri del trinomio sono

$$t_{1,2} = 1 \mp \sqrt{4} \quad \text{cioè} \quad t_1 = -1,\ t_2 = 3.$$

  Le soluzioni della disequazione nella variabile t sono $-1 < t < 3$. Tornando alla variabile x si può quindi scrivere $-1 < 2^x < 3$, che equivale al sistema

$$\begin{cases} 2^x > -1 & \text{(vera per ogni } x) \\ 2^x < 3 & \text{(vera per } x < \log_2 3). \end{cases}$$

  Le soluzioni della disequazione data sono perciò i valori

$$x < \log_2 3.$$

Osservazione Metto in guardia da un possibile (e purtroppo frequente) grave errore. Consideriamo la disequazione $3^x + 3^{2x} \leq 1$. Osservando che $1 = 3^0$, essa si può certamente riscrivere come $3^x + 3^{2x} \leq 3^0$, ma ora sarebbe un'idea sciagurata passare direttamente agli esponenti trascurando le basi, cioè considerare $x+2x \leq 0$. Quello che in pratica si fa quando i due membri della disequazione sono potenze nella stessa base non si può fare se ci sono somme o differenze di potenze (anche se nella stessa base). La disequazione proposta si può invece correttamente ricondurre, come già visto, ad una disequazione di secondo grado.

Esercizio 12.1 Risolvere le equazioni (esponenziali)

(a) $2 + 3 \cdot 4^x = 5$ (b) $2^{x-1} = 3$ (c) $e^{x^2-1} - 2 = 0$.

Esercizio 12.2 Risolvere le disequazioni (esponenziali)

(a) $2^{2x-1} \geq 4^x$ (b) $e^{2x+3} \leq 1$ (c) $3^{1+2x} - 8 \cdot 3^x - 3 > 0$.

13 Equazioni e disequazioni logaritmiche

Si dicono *logaritmiche* quelle equazioni (e disequazioni) che presentano l'incognita nell'argomento di uno o più logaritmi in una base assegnata.

Per esempio, sono logaritmiche le equazioni

$$\log_2 x = 4 \quad ; \quad \log_{10}(x^2 + 1) = 2 \cdot \log_{10} x$$

e le disequazioni

$$\ln(2x - 3) > \ln x \quad ; \quad \log_{1/2} \frac{2x-1}{x-1} < 2.$$

Come già detto, adotto la convenzione di indicare con ln il logaritmo naturale, cioè in base e. Per quanto riguarda la risoluzione delle eventuali equazioni e disequazioni logaritmiche in base e basta ricordare che e è un numero reale maggiore di 1.

Per risolvere le equazioni e le disequazioni logaritmiche occorre anzitutto porre le condizioni di esistenza: infatti i logaritmi esistono solo se i rispettivi argomenti sono positivi. Successivamente, analogamente a quanto si fa con quelle esponenziali, alcune si possono risolvere scrivendo ambo i membri dell'equazione/disequazione come logaritmi nella stessa base. Infine, ricordando le proprietà dei logaritmi, si fa ricorso al principio di equivalenza in virtù del quale si può sostituire un'uguaglianza (o una disuguaglianza) tra logaritmi con l'uguaglianza (o una disuguaglianza appropriata, facendo attenzione al verso) tra gli argomenti. Le considerazioni sul verso sono le stesse di prima: se la base dei logaritmi è maggiore di 1 il verso rimane quello che è mentre, se la base dei logaritmi è minore di 1, il verso va cambiato.

Quindi in generale, per la presenza delle condizioni di esistenza, un'equazione (o una disequazione) logaritmica si risolve affrontando un sistema di equazioni e disequazioni.

Mostro anche qui come si procede attraverso alcuni esempi.

- $\log_2 x = 3$. Anzitutto la condizione di esistenza: deve essere $x > 0$. Poi occorre scrivere il secondo membro come logaritmo in base 2, e questo si fa ricordando che $3 = \log_2 2^3$. L'equazione diventa $\log_2 x = \log_2 8$. Il sistema equivalente è allora
$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 8. \end{cases}$$
La soluzione cercata è quindi $x = 8$.

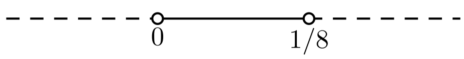
- $\log_3(2x+1) = 1$. La condizione di esistenza è $2x+1 > 0$, che vuol dire $x > -\frac{1}{2}$. Poi si può passare all'uguaglianza tra gli argomenti dei logaritmi. L'equazione equivale quindi al sistema
$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ \log_3(2x + 1) = \log_3 3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 = 3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x = 1. \end{cases}$$
La soluzione $x = 1$ del sistema è anche la soluzione dell'equazione data.

- $\ln x = \ln(x^2 - 2)$. Le condizioni di esistenza chiedono che sia $x > 0$ e $x^2 - 2 > 0$. Poi si uguagliano direttamente gli argomenti dei logaritmi. L'equazione è quindi equivalente al sistema
$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ x = x^2 - 2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 2 \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$
L'equazione ha per soluzioni $x = -1$ e $x = 2$, ma soltanto quella positiva soddisfa tutte le condizioni. Quindi la soluzione dell'equazione proposta è $x = 2$.

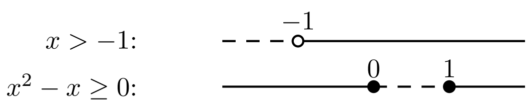
- $\log_3(x+1) = 1+\log_3(x-2)$. Essendo $1 = \log_3 3$, l'equazione si può riscrivere come $\log_3(x+1) = \log_3 3+\log_3(x-2)$. Ricordando le proprietà dei logaritmi questa diventa $\log_3(x + 1) = \log_3[3(x - 2)]$.[15] Allora l'equazione equivale al sistema
$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ \log_3(x + 1) = \log_3[3(x - 2)] \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x + 1 = 3(x - 2) \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x = 7/2 \end{cases}$$
(si noti, nel penultimo, che la disequazione $x > -1$ è inutile, dato che sicuramente verificata dovendo anche essere $x > 2$). La soluzione cercata è perciò $x = 7/2$.

Vediamo ora alcune disequazioni. Il modo di procedere è analogo a quello visto per le equazioni, con qualche attenzione in più per il verso delle disequazioni, che in qualche caso dovrà essere invertito (se le basi dei logaritmi dovessero essere minori di 1).

- $\log_2 x < -3$. Poiché $-3 = \log_2(1/8)$, la disequazione proposta potrà scriversi, nella condizione di esistenza, come
$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < \log_2(1/8) \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{8} \end{cases}$$
e questo ha come soluzioni tutti gli x compresi tra 0 e $\frac{1}{8}$. Si tratta naturalmente dell'insieme $S = (0, \frac{1}{8})$, qui raffigurato:



- $\log_{1/3}(x+1) \geq \log_{1/3}(x^2+1)$. Qui abbiamo già logaritmi nella stessa base, base che però è minore di 1, e quindi occorre cambiare il verso quando si passa agli argomenti. Si noti anche che l'argomento del logaritmo di destra è sempre positivo. La disequazione equivale quindi al sistema
$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \leq x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x^2 - x \geq 0. \end{cases}$$
Possiamo aiutarci con un grafico:



L'insieme delle soluzioni è perciò $S = (-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

[15] Anche qui grave errore sarebbe "eliminare i logaritmi", cioè passare da $\log_3(x + 1) = \log_3 3 + \log_3(x - 2)$ a $x + 1 = 3 + x - 2$.

- $\ln(x-1) > 1 + \ln(x+2)$. Tenendo conto delle condizioni di esistenza, del fatto che $1 = \ln e$ e delle proprietà dei logaritmi, la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \\ x-1>e(x+2). \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x>1 \\ x>-2 \\ x<-\frac{1+2e}{e-1}. \end{cases}$$

  Dopo aver osservato che la seconda disequazione è inutile e che si ha evidentemente $-\frac{1+2e}{e-1} < 0$, possiamo concludere che la disequazione data è impossibile.

- Consideriamo infine la disequazione $\log_3^2 x + \log_3 x - 6 \geq 0$.[16] C'è come sempre la condizione di esistenza (qui $x > 0$). Questa disequazione, come le analoghe esponenziali viste prima, è riconducibile ad una disequazione di secondo grado. Possiamo porre $\log_3 x = t$ e la nostra disequazione diventa $t^2 + t - 6 \geq 0$. Essa ha per soluzioni $t \leq -3$ oppure $t \geq 2$ che, tornando alla variabile x, significano

$$\log_3 x \leq -3 \qquad \text{oppure} \qquad \log_3 x \geq 2.$$

  Esse a loro volta equivalgono a

$$\begin{cases} x>0 \\ x \leq 1/27 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x \geq 9. \end{cases}$$

  Le soluzioni sono quindi $S = (0, \frac{1}{27}] \cup [9, +\infty)$.

Esercizio 13.1 Risolvere le equazioni (logaritmiche)

(a) $3 + 2\ln x = 1$ (b) $1 + \log_2(x+1) = 0$ (c) $1 - \ln^2 x = 0$.

Esercizio 13.2 Risolvere le disequazioni (logaritmiche)

(a) $\ln(x+1) > 2$ (b) $\ln^2 x - 1 < 0$ (c) $1 + \ln^3 x \leq 0$.

14 Equazioni e disequazioni con valori assoluti

Ricordiamo anzitutto la definizione di *valore assoluto* (o *modulo*) di un numero reale r:

$$|r| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0 \\ -r & \text{se } r < 0. \end{cases}$$

Quindi, per esempio, $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-2| = 2$.

Trattandosi di argomento tradizionalmente ostico per molti studenti, faccio osservare (la cosa discende direttamente dalla definizione appena vista) che, nel caso siamo alla presenza dell'espressione $|A(x)|$, dove $A(x)$ è una qualunque espressione nella variabile x, avremo

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0. \end{cases}$$

Avverto gli studenti che la mancata comprensione di come si ottiene l'espressione di $|A(x)|$ è spesso causa di gravi errori.[17] Pertanto avremo ad esempio

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Il senso e lo scopo della definizione di valore assoluto dovrebbero essere chiari: ottenere una quantità comunque non negativa, anche se la quantità data è non positiva. Possiamo quindi dire che, in generale,

$$|A(x)| \geq 0 \ , \quad \text{per tutte le } x \text{ per cui } A(x) \text{ esiste.}$$

Osservazione Per risolvere equazioni e disequazioni con valori assoluti è conveniente tener bene presente l'equivalenza delle seguenti scritture, che si dimostrano facilmente usando la definizione:

[16] Ricordo che la scrittura $\log_b^2 x$ sta per $(\log_b x)^2$.

[17] L'errore che tradizionalmente molti studenti commettono è quello di scrivere

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ritenendo che sia il segno di x (anziché quello di $A(x)$) a determinare la scelta tra le due possibili espressioni.

- $|A(x)| = k$, con $k \geq 0$, se e solo se $A(x) = k$ oppure $A(x) = -k$;
- $|A(x)| > k$, con $k \geq 0$, se e solo se $A(x) < -k$ oppure $A(x) > k$;
- $|A(x)| < k$, con $k \geq 0$, se e solo se $-k < A(x) < k$. [18]

Se invece $k < 0$, allora l'equazione $|A(x)| = k$ è impossibile, la disequazione $|A(x)| > k$ è identicamente vera (ovviamente nell'insieme in cui $A(x)$ esiste) e la disequazione $|A(x)| < k$ è impossibile.

Ecco qualche semplice esempio in cui applichiamo quanto appena detto.

- Consideriamo l'equazione $|2x^2 - 3| = 5$. Essa equivale a

$$2x^2 - 3 = -5 \quad \text{oppure} \quad 2x^2 - 3 = 5 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 = -1 \quad \text{oppure} \quad x^2 = 4.$$

La prima è impossibile e la seconda fornisce le due soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

- Consideriamo l'equazione $|\frac{x-1}{x}| = 2$. L'equazione equivale a

$$\frac{x-1}{x} = 2 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x-1}{x} = -2,$$

che equivalgono, a loro volta, ai sistemi

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 = 2x \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 = -2x. \end{cases}$$

Le soluzioni di questi sono rispettivamente $x_1 = -1$ e $x_2 = 1/3$. I valori così trovati sono le soluzioni anche dell'equazione proposta.

- La disequazione $|x - 2| \leq 1$ equivale a $-1 \leq x - 2 \leq 1$, cioè a $1 \leq x \leq 3$, che sono le soluzioni.
- La $|x + 3| \geq 4$ equivale a $x + 3 \geq 4$ oppure $x + 3 \leq -4$, cioè $x \geq 1$ oppure $x \leq -7$.
- La $|x^2 - 1| \leq 3$ equivale a $-3 \leq x^2 - 1 \leq 3$, cioè $-2 \leq x^2 \leq 4$. Ora quest'ultima equivale a $x^2 \leq 4$, dato che la prima disequazione (cioè $x^2 \geq -2$) è sempre verificata.[19] Le soluzioni di $x^2 \leq 4$ sono ovviamente $-2 \leq x \leq 2$.

Si faccia sempre attenzione poi a casi come i seguenti:

- La disequazione $|x - 1| \geq 0$ è sempre verificata, quindi ha per soluzioni tutto $\mathbb{R}$.
- A differenza della precedente la disequazione $|x - 1| > 0$ non è vera per ogni x: essa infatti non vale per $x = 1$. Quindi le sue soluzioni sono $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (o se preferite $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$).
- La disequazione $|x + 2| \leq 0$ è verificata solo per $x = -2$, quindi ha per soluzioni l'insieme $\{-2\}$.
- La disequazione $|x + 2| < 0$ non è mai verificata, quindi ha per soluzioni l'insieme vuoto.

Vediamo ora in alcuni esempi come si procede quando, essendoci valori assoluti, non ci si trova nei casi già visti.

- Consideriamo l'equazione $x^2 = |x - 1|$. Possiamo distinguere i due casi possibili relativi al valore assoluto ($x - 1 \geq 0$ oppure $x - 1 < 0$). Si scrivono quindi i sistemi

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 = x - 1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 = -(x - 1). \end{cases}$$ [20]

Questi si possono riscrivere come

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

L'equazione del primo sistema non ha radici reali, mentre la seconda ha le due radici $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Esse sono entrambe soluzioni del secondo sistema, dato che sono entrambe minori di 1. Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione iniziale è $S = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$.

[18] La doppia disequazione $-k < A(x) < k$ equivale ovviamente al sistema

$$\begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k. \end{cases}$$

[19] Si tenga sempre conto che una doppia disequazione significa un sistema tra le due disequazioni.

[20] Si noti che, nel caso l'argomento del valore assoluto sia negativo, si sostituisce il valore assoluto con l'opposto dell'argomento.

- Consideriamo la disequazione $|x+3| - 2x \geq 5$. Anche qui si distinguono i due casi possibili relativi al valore assoluto ($x+3 \geq 0$ oppure $x+3 < 0$). Si traduce quindi la disequazione nei sistemi

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3-2x \geq 5 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+3 < 0 \\ -x-3-2x \geq 5. \end{cases}$$

Si noti che, quando si tolgono i valori assoluti, le uniche espressioni che vengono modificate sono quelle che prima erano in valore assoluto, tutto il resto rimane inalterato. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < -3 \\ x \leq -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $S_1 = [-3,-2]$, le soluzioni del secondo sono $S_2 = (-\infty,-3)$, e quindi le soluzioni complessive (l'unione di S_1 ed S_2) sono date dall'insieme $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-2]$.

- Consideriamo la disequazione $|x^2-1| \geq x$. Distinguendo i due casi relativi al segno di x^2-1 otteniamo i sistemi

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 \geq x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ 1-x^2 \geq x, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ x^2+x-1 \leq 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono date dall'insieme $S_1 = (-\infty,-1] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$, quelle del secondo dall'insieme $S_2 = (-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$. Pertanto le soluzioni della disequazione data sono costituite dall'unione

$$S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

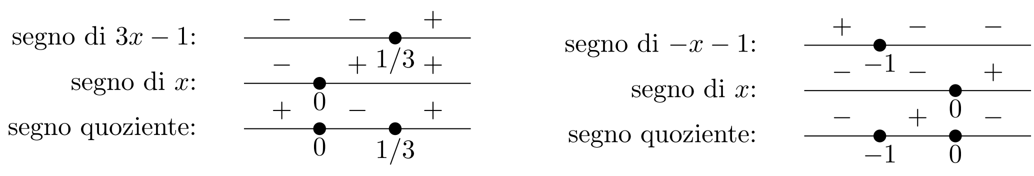
- Consideriamo la disequazione $|\frac{x-1}{x}| > 2$. Si tratta di un caso del tipo $|A(x)| > k$. Allora possiamo dire che tale disequazione equivale a

$$\frac{x-1}{x} < -2 \quad \text{oppure} \quad \frac{x-1}{x} > 2.$$

Queste equivalgono alle disequazioni

$$\frac{3x-1}{x} < 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{-x-1}{x} > 0.$$

Aiutandoci con i soliti schemi abbiamo



Il primo sistema ha soluzioni $S_1 = (0, \frac{1}{3})$ e il secondo ha soluzioni $S_2 = (-1,0)$. Quindi le soluzioni della disequazione iniziale sono l'insieme $S = S_1 \cup S_2 = (-1,0) \cup (0, \frac{1}{3})$ (o se si vuole $(-1,\frac{1}{3}) \setminus \{0\}$).

Esercizio 14.1 Risolvere le equazioni (con valore assoluto)

(a) $1 - |x+1| = x$ (b) $x^2 + 2 = |3x|$.

Esercizio 14.2 Risolvere le disequazioni (con valore assoluto)

(a) $|x| + 2x \leq x^2$ (b) $2|x+1| - x \geq 3$.

15 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 3.1

(a) L'equazione di primo grado ha per soluzione $x = -\frac{2}{3}$.
(b) L'equazione di secondo grado ha per soluzioni $x = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}$, cioè $\frac{1}{2}$ oppure -2.
(c) Si può applicare la formula ridotta. Si ottengono le radici $x = -1 \pm \sqrt{16}$, cioè -5 oppure 3.

Esercizio 4.1

(a) L'equazione si può scrivere come $x^3 = -\frac{1}{3}$, da cui si ricava $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
(b) L'equazione equivale alla $x^2 = \frac{1}{2}$ e questa ha per soluzioni $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(c) L'equazione equivale alle due equazioni di secondo grado $x^2 = 4$ oppure $x^2 = 2$, che hanno per soluzioni $x = \pm 2$ oppure $x = \pm\sqrt{2}$.
(d) L'equazione equivale alle due equazioni di terzo grado $x^3 = 1$ oppure $x^3 = 2$, che hanno per soluzioni $x = 1$ oppure $x = \sqrt[3]{2}$.
(e) L'equazione equivale alle due equazioni di secondo grado $x^2 = 3$ oppure $x^2 = -1$. La seconda non ha soluzioni, mentre la prima ha per soluzioni $x = \pm\sqrt{3}$.
(f) Si può osservare che il polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ si annulla per $x = 1$ e quindi è divisibile per $(x - 1)$. Con la regola di Ruffini si trova il quoziente, che risulta essere x^2+4x+4, e quindi l'equazione equivale alla $(x-1)(x+2)^2 = 0$, che ha per soluzioni $x = 1$ oppure $x = -2$.

Esercizio 5.1

(a) La prima equivale a (deve essere $x \neq 0$)

$$\frac{1+2x}{x} = 0 \text{ , che ha per soluzione } x = -\frac{1}{2}.$$

(b) Nella seconda deve essere $x \neq 0$ e $x \neq -1$. L'equazione equivale a

$$\frac{x}{x+1} + 1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{x^2 + x(x+1) - (x+1)}{x(x+1)} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{2x^2-1}{x(x+1)} = 0.$$

Si hanno le due soluzioni $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(c) Nella terza deve essere $x \neq 0$. Per tali valori, moltiplicando ambo i membri per x^2 si ottiene $x^3 = 1$. Quindi la soluzione è $x = 1$.

Esercizio 7.1

(a) La disequazione si può riscrivere come $3x > -4$ e quindi ha per soluzioni le $x > -\frac{4}{3}$.
(b) Le radici del polinomio sono $x = -2$ e $x = 3$ e la disequazione è verificata per valori esterni e quindi per $x \leq -2$ oppure per $x \geq 3$.
(c) Conviene riscrivere la disequazione nella forma $x^2 - 3x - 4 < 0$. Le radici del polinomio sono $x = -1$ e $x = 4$ e la disequazione è verificata per valori interni. Quindi le soluzioni sono per $-1 < x < 4$.
(d) Il polinomio è un quadrato e la disequazione si può scrivere nella forma $(3x + 2)^2 \leq 0$. C'è l'unica soluzione $x = -\frac{2}{3}$.

Esercizio 9.1

(a) La disequazione equivale a $x(x-1)(x-2) \geq 0$. Studiando il segno dei tre fattori si trova che la disequazione è soddisfatta per $0 \leq x \leq 1$ oppure per $x \geq 2$. Possiamo scrivere le soluzioni in questa forma oppure, usando gli intervalli, scrivere che le soluzioni sono date dall'insieme $S = [0, 1] \cup [2, +\infty)$.
(b) La disequazione equivale alla $x^2(x + 1) < 0$. Qui possiamo osservare che $x = 0$ non è soluzione e quindi possiamo dividere tutto per x^2, che è certamente positivo. Allora le soluzioni sono per $x < -1$.
Alternativamente si potevano usare i due sistemi: la disequazione equivale a

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 < 0 \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile e quindi dal primo risultano le soluzioni trovate prima.
(c) La disequazione equivale alla $x^3(1 - x) > 0$. Questa equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^3 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^3 < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ x > 1. \end{cases}$$

Le soluzioni (dal primo soltanto) sono per $0 < x < 1$, cioè l'intervallo $(0, 1)$.
(d) La disequazione equivale alla $x^2(x^2 - 1) \geq 0$. Attenzione qui: anzitutto osserviamo che 0 è soluzione. Poi, con $x \neq 0$, possiamo dividere per x^2, che è positivo, e restiamo con $x^2 - 1 \geq 0$, che ha per soluzioni i valori esterni a -1 e 1. Le soluzioni sono quindi l'insieme $S = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$.
Si poteva anche seguire un'altra strada: la disequazione $x^2(x^2 - 1) \geq 0$ equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce le soluzioni esterne a -1 e 1. Il secondo sistema (attenzione!) fornisce la soluzione isolata 0.

Esercizio 10.1

(a) La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x + \frac{1}{x-1} - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x(x-1)+1-x+1}{x-1} \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{x-1} \geq 0. \end{cases}$$

Dato che il numeratore della frazione è sempre positivo, le soluzioni sono le $x > 1$, cioè l'intervallo $(1, +\infty)$.
(b) La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2}{x} + x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0. \end{cases}$$

Gli zeri del polinomio di secondo grado sono 1 e 2. Studiando il segno del numeratore e del denominatore e rispettando la condizione di esistenza si trova che le soluzioni sono l'insieme $S = (0, 1] \cup [2, +\infty)$.
(c) La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \frac{x}{1-x^2} - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \frac{x^3}{1-x^2} \geq 0. \end{cases}$$

Dallo studio del segno nella disequazione fratta si ottengono le soluzioni $x < -1$ oppure $0 \leq x < 1$, che si possono esprimere anche con $S = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$.

Esercizio 11.1

(a) Possibili soluzioni si hanno solo con $x \geq 0$. Inoltre deve anche essere $x \geq 1$, perché altrimenti il primo membro è negativo. Elevando al quadrato, l'equazione equivale quindi al sistema

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ma solo $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è soluzione del sistema.
Quindi la soluzione è $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
(b) Per risolvere la seconda possiamo riscriverla nella

$$\sqrt{x-1} = 1 - x.$$

Deve essere $x \geq 1$ per l'esistenza della radice. Inoltre per avere soluzioni deve anche essere $x \leq 1$, perché altrimenti il secondo membro è negativo. Quindi rimane $x = 1$. che è in effetti soluzione.
Si faccia attenzione che elevando ambo i membri al quadrato nell'ultima equazione si ottiene

$$x - 1 = 1 - 2x + x^2 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 - 3x + 2 = 0,$$

che ha le soluzioni $x = 1$ oppure $x = 2$, ma la seconda non è accettabile.

Esercizio 11.2

Sono disequazioni irrazionali.
(a) La prima si può riscrivere come

$$\sqrt{1-x} > x - 3.$$

L'argomento della radice non può essere negativo; si può elevare al quadrato ma con entrambi i membri non negativi. Si può inoltre osservare che se il secondo membro è negativo la disuguaglianza è certamente vera (il primo membro è non negativo mentre il secondo è negativo). Quindi la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 1-x > x^2-6x+9 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ x^2-5x+8 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \\ x < 3. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile (la disequazione di secondo grado non ha soluzioni) e quindi le soluzioni sono (date dal secondo sistema) tutte le $x \leq 1$, cioè l'intervallo $(-\infty, 1]$.
(b) La seconda disequazione si può riscrivere come

$$\sqrt{x+1} \leq 1-x.$$

Come prima dobbiamo avere l'argomento della radice non negativo e possiamo elevare al quadrato solo se entrambi i membri sono non negativi. Si può inoltre osservare che se il secondo membro è negativo la disuguaglianza è certamente falsa. Quindi la disequazione equivale al solo sistema

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x+1 \leq 1-2x+x^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x^2-3x \geq 0. \end{cases}$$

Con l'aiuto di un semplice grafico si trova facilmente che le soluzioni sono date dall'intervallo $[-1, 0]$.
(c) La terza disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$ [21]

I due sistemi equivalgono a

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 < 1/2 \end{cases} \cup \quad -1 \leq x < 0$$

cioè

$$0 \leq x < 1/\sqrt{2} \quad \cup \quad -1 \leq x < 0.$$

Queste si possono anche scrivere più semplicemente con $-1 \leq x < 1/\sqrt{2}$, e cioè anche con $S = \big[-1, 1/\sqrt{2}\big)$.

Esercizio 12.1

(a) L'equazione equivale alla $3 \cdot 4^x = 3$ e questa alla $4^x = 1$, la cui soluzione è $x = 0$.
(b) Basta scrivere $2^{x-1} = 2^{\log_2 3}$, da cui $x - 1 = \log_2 3$ e quindi $x = 1 + \log_2 3$.
(c) Possiamo scrivere

$$e^{x^2-1} = 2 \text{ cioè } e^{x^2-1} = e^{\ln 2} \text{ cioè } x^2 - 1 = \ln 2 \text{ cioè } x = \pm\sqrt{1+\ln 2}.$$

Esercizio 12.2

Sono disequazioni esponenziali.
(a) Nella prima (non ci sono condizioni di esistenza) possiamo scrivere ambo i membri in base 2 ricordando che $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$. Quindi la disequazione equivale a

$$2^{2x-1} \geq 2^{2x} \quad \text{cioè} \quad 2x-1 \geq 2x \quad \text{cioè} \quad -1 \geq 0$$

che è evidentemente falsa. Le soluzioni sono dunque l'insieme vuoto.
(b) La seconda equivale a $e^{2x+3} \leq e^0$ e quindi a $2x + 3 \leq 0$, cioè $x \leq -\frac{3}{2}$.
(c) La terza si può riscrivere come

$$3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 3 > 0.$$

Ponendo ora $3^x = t$ ci si riconduce ad una disequazione di secondo grado:

$$3t^2 - 8t - 3 > 0,$$

[21] Si noti che tutte le soluzioni del secondo sistema sono accettabili, dato che nelle condizioni scritte nel secondo sistema il primo membro è non negativo, mentre il secondo è negativo.

che ha per soluzioni $t < -\frac{1}{3}$ oppure $t > 3$. Allora, risostituendo 3^x al posto di t

$$3^x < -\frac{1}{3} \qquad \text{oppure} \qquad 3^x > 3.$$

La prima non ha ovviamente soluzioni. La seconda equivale a $x > 1$. Queste sono le soluzioni della disequazione data.

Esercizio 13.1

(a) C'è la condizione di esistenza $x > 0$. L'equazione equivale poi alla $2\ln x = -2$ e questa alla $\ln x = -1$. L'ultima si può riscrivere $\ln x = \ln \frac{1}{e}$ ed è vera per $x = \frac{1}{e}$, che rispetta la condizione di esistenza.
(b) Nella condizione di esistenza $x > -1$ l'equazione equivale a $\log_2(x+1) = -1$, cioè $\log_2(x+1) = \log_2 \frac{1}{2}$. Quindi la soluzione è $x = -\frac{1}{2}$.
(c) Le soluzioni vanno cercate tra le x positive. Si ha $\ln^2 x = 1$, cioè $\ln x = \pm 1$. Da $\ln x = 1$ si ottiene $x = e$ e da $\ln x = -1$ si ottiene $x = e^{-1} = 1/e$. Le soluzioni sono quindi $x = e, x = 1/e$.

Esercizio 13.2

Disequazioni logaritmiche. Non bisogna dimenticare le condizioni di esistenza, che consistono nel porre l'argomento del logaritmo maggiore di zero.
(a) La prima equivale dunque al sistema

$$\begin{cases} x+1>0 \\ \ln(x+1) > \ln e^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x+1 > e^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > e^2 - 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque date dall'intervallo $(e^2 - 1, +\infty)$.
(b) La seconda equivale al sistema

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln^2 x < 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -1 < \ln x < 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{e} < x < e. \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque date dall'intervallo $(\frac{1}{e}, e)$.
(c) La terza equivale al sistema

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln^3 x \le -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \le -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \le 1/e. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $0 < x \le 1/e$, cioè l'intervallo $(0, 1/e]$.

Esercizio 14.1

(a) Ricordando che $|x+1|$ coincide con $x+1$ se $x \ge -1$ e invece coincide con $-x-1$ se $x < -1$, allora la prima equazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x \ge -1 \\ 1-x-1 = x \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ 1+x+1 = x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ 2 = 0. \end{cases}$$

Ovviamente l'unica soluzione è $x = 0$.
(b) Nella seconda, ricordando che $|3x|$ coincide con $3x$ se $x \ge 0$ e invece coincide con $-3x$ se $x < 0$, l'equazione data è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

Si trova facilmente che le possibili soluzioni sono quattro: $x = 1, x = 2, x = -1, x = -2$.

Esercizio 14.2

(a) Come sempre, distinguendo il segno di x:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x + 2x \le x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x + 2x \le x^2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x(x-3) \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x(x-1) \ge 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $x = 0$ oppure $x \geq 3$, mentre il secondo ha soluzioni $x < 0$. L'unione dei due insiemi è pertanto l'insieme $S = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.
(b) Distinguendo questa volta il segno di $x + 1$, si hanno i due sistemi

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2(x+1) - x \geq 3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -2(x+1) - x \geq 3 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + 2 - x \geq 3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < -1 \\ -2x - 2 - x \geq 3 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < -1 \\ x \leq -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono pertanto date dall'insieme $S = (-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [1, +\infty)$.