I-4 $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ – Piano e spazio cartesiani

Indice

1 Prodotto cartesiano di due insiemi

Dati due insiemi A e B, definiamo *prodotto cartesiano di A e B*, e lo indichiamo con $A \times B$, l'insieme di tutte le *coppie ordinate* del tipo (a, b), dove $a \in A$ e $b \in B$. Formalmente

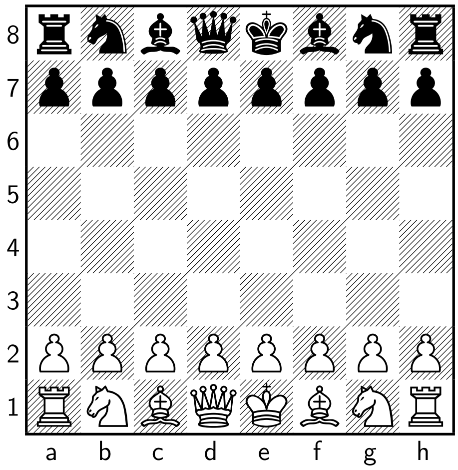
$$A \times B = \Big\{(a, b) \ : \ a \in A \ \wedge \ b \in B\Big\}.$$ [1]

Si faccia attenzione che le coppie sono ordinate, quindi l'ordine in cui considero gli elementi è rilevante. Gli elementi che costituiscono la coppia si dicono le *componenti* della coppia.

Vediamo qualche esempio.

- Siano $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. Allora
$$A \times B = \Big\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\Big\}.$$
A ribadire che l'ordine è importante, si noti che ad esempio $(a, 2)$ appartiene ad $A \times B$, ma $(2, a)$ no.

- Siano
$$C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
e
$$R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$
Allora
$$C \times R = \Big\{(a, 1), (a, 2), \dots, (h, 7), (h, 8)\Big\}.$$
Se pensiamo che C voglia dire *colonna* e R voglia dire *riga*, vedi rappresentazione a fianco, le coppie dell'insieme $C \times R$ costituiscono il modo che si usa nel gioco degli scacchi per identificare la posizione di un pezzo sulla scacchiera. Ad esempio il re bianco si trova all'inizio della partita in posizione $(e, 1)$, gli alfieri neri in posizione $(c, 8)$ e $(f, 8)$ e i pedoni neri in posizione $(x, 7)$, con $x \in C$.

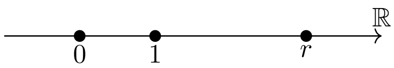


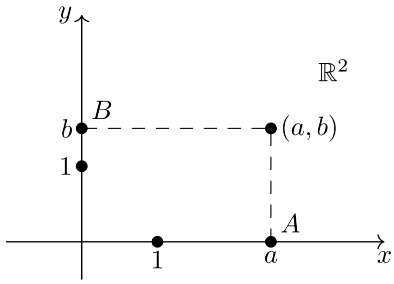
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è chiaramente il prodotto cartesiano di $\mathbb{Z}$ per se stesso. Si tratta di tutte le (infinite) coppie ordinate a componenti intere.

- Un fondamentale esempio di prodotto cartesiano è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che si indica anche con $\mathbb{R}^2$, cioè l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali.

[1] La notazione (a, b) è purtroppo la stessa che si usa per indicare un intervallo di $\mathbb{R}$. Risulta in genere chiaro dal contesto se si sta parlando di intervalli o di coppie ordinate.

2 Rappresentazione di $\mathbb{R}^2$ sul piano cartesiano





Così come $\mathbb{R}$ può essere rappresentato sulla retta cartesiana, analogamente possiamo rappresentare $\mathbb{R}^2$ sul piano, detto *piano cartesiano*.

In un piano geometrico consideriamo due rette cartesiane ortogonali.[2] Rappresentiamo l'elemento $(0, 0)$ con il punto di intersezione delle due rette, che chiameremo *origine* del sistema cartesiano. Rappresentiamo poi i due elementi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ con i due punti unità sulle due rette.[3]

La corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{R}^2$ e i punti del piano (e viceversa) è ora immediata. Per rappresentare una coppia (a, b) basta rappresentare a sull'asse delle x (punto A nella figura), b sull'asse delle y (punto B), tracciare la perpendicolare all'asse delle x passante per A e la perpendicolare all'asse delle y passante per B; l'intersezione delle due perpendicolari è il punto che rappresenta la coppia (a, b).

Viceversa, dato un punto del piano, tracciando le perpendicolari ai due assi troviamo due punti (A sull'asse x e B sull'asse y), determiniamo i numeri reali che tali punti rappresentano sulle due rette cartesiane (siano rispettivamente a e b) e abbiamo la coppia (a, b) che corrisponde al punto da cui siamo partiti.

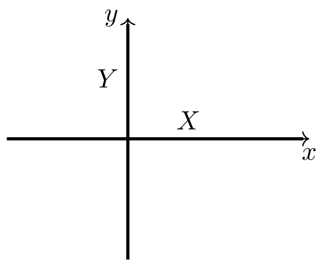
Abbiamo così definito una *corrispondenza biunivoca* (ad ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ corrisponde un punto del piano e viceversa) tra gli elementi di $\mathbb{R}^2$ e i punti del piano cartesiano. Capiterà a volte di identificare gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con le relative rappresentazioni.

3 Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e regioni del piano cartesiano

Ovviamente i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ possono avere una loro rappresentazione sul piano cartesiano. Vediamo alcuni casi semplici e significativi.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da

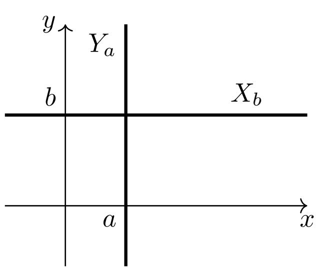
$$Y = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\Big\}.$$



La sua rappresentazione consiste dei punti di ascissa zero: sono tutti i punti dell'asse y (per questo l'insieme si chiama Y). In modo analogo l'insieme

$$X = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\Big\}$$

viene rappresentato dall'asse x.



L'insieme

$$Y_a = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = a\Big\}$$

viene rappresentato dalla retta parallela all'asse y e passante per il punto $(a, 0)$. Al variare di a si ottengono tutte le rette verticali.

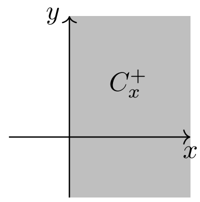
L'insieme

$$X_b = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = b\Big\}$$

è rappresentato da una retta parallela all'asse x (quindi orizzontale) e passante per il punto $(0, b)$.

[2] Si tratta di due rette perpendicolari, cioè che intersecandosi formano nel piano quattro angoli retti.

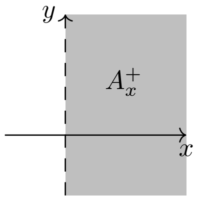
[3] Come noto si è soliti servirsi di una retta orizzontale, chiamata *asse delle ascisse* e di una retta verticale, chiamata *asse delle ordinate*. L'elemento $(1, 0)$ viene rappresentato sull'asse delle ascisse, mentre $(0, 1)$ sull'asse delle ordinate. Chiameremo spesso, come di consueto, *asse delle* x l'asse delle ascisse e *asse delle* y l'asse delle ordinate.



L'insieme

$$C_x^+ = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\Big\}$$

è un semipiano (la parte destra del piano cartesiano, compreso il "bordo"). Lo si può chiamare *semipiano delle* x *non negative.* C_x^+ contiene l'insieme Y (cioè $Y \subset C_x^+$).



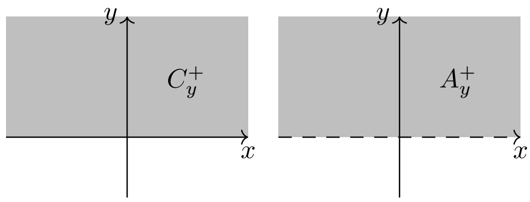
Anche l'insieme

$$A_x^+ = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\Big\}$$

è un semipiano. Lo si può chiamare *semipiano delle* x *positive.* A_x^+ non contiene nessun punto dell'insieme Y, dato che A_x^+ non contiene il bordo (quindi $Y \cap A_x^+ = \emptyset$).

Analogamente gli insiemi

$$C_y^+ = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\Big\} \quad \text{e} \quad A_y^+ = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\Big\}$$



sono semipiani (la parte superiore del piano cartesiano). Li chiameremo rispettivamente *semipiano delle* y *non negative* e *semipiano delle* y *positive.*

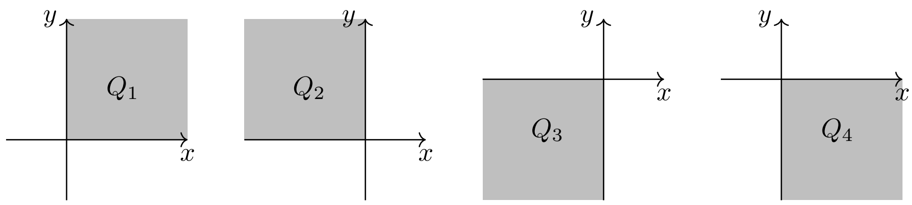
Lo studente, per analogia, scriva la definizione degli insiemi

$$C_x^- \quad , \quad A_x^- \quad , \quad C_y^- \quad , \quad A_y^- .$$

L'insieme

$$Q_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0\Big\}$$

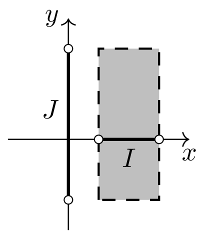
viene detto *primo quadrante.*



Gli insiemi

$$Q_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0, y \geq 0\Big\}\ ,\ Q_3 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0, y \leq 0\Big\}\ ,\ Q_4 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \leq 0\Big\}$$

vengono detti, rispettivamente, *secondo, terzo e quarto quadrante.* Sono rappresentati tutti qui sopra. Ovviamente ci sono anche le versioni "senza il bordo" e quelle con soltanto una parte del bordo.

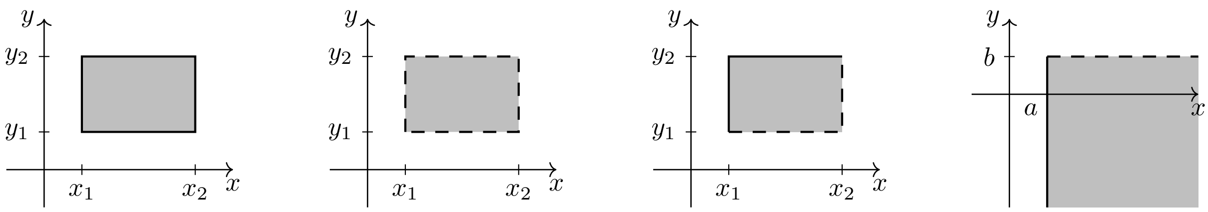


Come in $\mathbb{R}$ abbiamo definito gli *intervalli*, così possiamo fare in $\mathbb{R}^2$. Anche qui si tratta di una famiglia abbastanza generale di sottoinsiemi. Gli intervalli in $\mathbb{R}^2$ sono i prodotti cartesiani degli intervalli di $\mathbb{R}$. Quindi, se I e J sono due intervalli di $\mathbb{R}$, è un intervallo di $\mathbb{R}^2$ l'insieme

$$R = I \times J.$$

Vediamo quali possibili sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ possono prendere origine dalla definizione.

- ▷ $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ è quello che solitamente si chiama rettangolo.
- ▷ $R = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$ è ancora un rettangolo, ma senza il bordo.
- ▷ Anche $R = [x_1, x_2) \times (y_1, y_2]$ è un rettangolo. È privo del "bordo di destra" e del "bordo di sotto".
- ▷ Il prodotto cartesiano di intervalli non limitati di $\mathbb{R}$ porta a intervalli non limitati di $\mathbb{R}^2$ (basta che uno dei due sia non limitato), come ad esempio $R = [a, +\infty) \times (-\infty, b)$.



Molti dei sottoinsiemi visti nei punti precedenti sono in realtà intervalli. Sono intervalli infatti ad esempio $C_x^+, A_x^-, A_y^+, C_y^-$, dato che

$$\begin{array}{rcl} C_x^+ & = & [0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ A_x^- & = & (-\infty,0)\times\mathbb{R} \\ A_y^+ & = & \mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ C_y^- & = & \mathbb{R}\times(-\infty,0]. \end{array}$$

Anche i quadranti sono intervalli. Infatti ad esempio si può scrivere

$$Q_1 = [0,+\infty)\times[0,+\infty) \qquad \text{e} \qquad Q_2 = (-\infty,0)\times[0,+\infty).$$

Ovviamente anche in $\mathbb{R}^2$, come in $\mathbb{R}$, ci sono sottoinsiemi che non sono intervalli: ad esempio $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, che è l'insieme dei punti a coordinate intere, non è un intervallo. Un cerchio non è un intervallo, dato che non si può scrivere come prodotto cartesiano di due intervalli di $\mathbb{R}$.

Concludiamo questa prima parte con qualche considerazione circa la simmetria dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

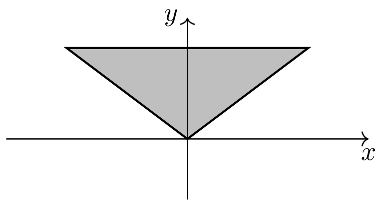
Un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ è *simmetrico rispetto alle* x se

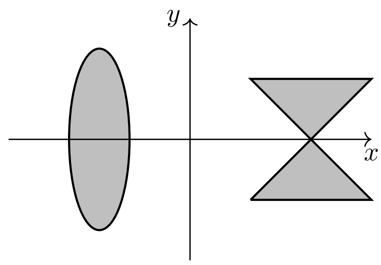
$$(x,y)\in S \quad \Rightarrow \quad (-x,y)\in S.$$

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ è *simmetrico rispetto alle* y se

$$(x,y)\in S \quad \Rightarrow \quad (x,-y)\in S.$$

Nelle figure qui sotto sono rappresentati a sinistra un insieme simmetrico rispetto alle x e a destra due insiemi simmetrici rispetto alle y.





Altro esempio di insieme simmetrico rispetto alle x è il rettangolo $R = [-1,1]\times[0,1]$. Altro esempio di insieme simmetrico rispetto alle y è la retta di equazione $x = 1$.

Osservazione Si noti che nella nostra definizione simmetrico rispetto alle x vuol dire simmetrico rispetto all'asse y (e viceversa per l'altro).

Ci sono insiemi che sono simmetrici sia rispetto alle x sia rispetto alle y. Ad esempio il quadrato $Q = [-1,1]\times[-1,1]$.

Si faccia attenzione che per definire la simmetria sia rispetto alle x sia rispetto alle y non si può dire

$$(x,y)\in S \quad \Rightarrow \quad (-x,-y)\in S.$$

Infatti l'unione del primo e terzo quadrante è un insieme che soddisfa questa implicazione ma non è simmetrico né rispetto alle x né rispetto alle y. Si intuisce che la simmetria definita dall'implicazione qui sopra è una *simmetria rispetto all'origine*.

Se la simmetria rispetto all'origine non implica la contemporanea simmetria rispetto alle x e rispetto alle y, è vero invece il viceversa, che cioè la contemporanea simmetria rispetto alle x e rispetto alle y implica la simmetria rispetto all'origine. Lo studente cerchi di convincersi di tutto questo costruendosi opportuni esempi.

Esercizio 3.1 Si descriva il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$A = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x < -1\Big\}.$$

Lo si esprima poi attraverso un prodotto cartesiano.

Esercizio 3.2 Si descriva il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ y < 1\Big\}.$$

Lo si esprima poi attraverso un prodotto cartesiano.

Esercizio 3.3 Si descriva il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ definito dal prodotto cartesiano

$$A = (-\infty, 1] \times (0, +\infty).$$

Esercizio 3.4 Si descriva il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ definito dall'intersezione dei due insiemi

$$A_1 = (-\infty, 0] \times [-1, +\infty) \qquad \text{e} \qquad A_2 = [0, +\infty) \times (-\infty, 1].$$

Esercizio 3.5 Si descriva il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ definito dall'unione dei due insiemi

$$A_1 = (-\infty, 0] \times [0, +\infty) \qquad \text{e} \qquad A_2 = [-1, +\infty) \times (-\infty, 1].$$

L'insieme A si può scrivere attraverso un prodotto cartesiano?

4 $\mathbb{R}^3$ e sua rappresentazione nello spazio cartesiano

La definizione di prodotto cartesiano di due insiemi si può facilmente estendere al prodotto cartesiano di un numero qualunque di insiemi. Quindi, se A, B e C sono tre insiemi, si definisce *prodotto cartesiano di A, B e C*, e si indica con $A \times B \times C$, l'insieme di tutte le *terne ordinate* del tipo (a, b, c), dove $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$. Formalmente

$$A \times B \times C = \Big\{(a, b, c) \ : \ a \in A, b \in B, c \in C\Big\}.$$

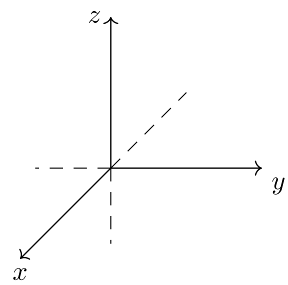
In tutta generalità, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono n insiemi, si definisce *prodotto cartesiano di* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, e si indica con $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, l'insieme di tutte le *n-uple ordinate* del tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, dove $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Formalmente

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\Big\}.$$

Un esempio di prodotto cartesiano di tre insiemi è ovviamente $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, l'insieme delle terne ordinate di numeri reali.

Non è difficile intuire che $\mathbb{R}^3$ si può rappresentare nello *spazio cartesiano*. Non ripeto la costruzione della corrispondenza biunivoca che associa ad ogni elemento di $\mathbb{R}^3$ un punto dello spazio e viceversa, dato che è del tutto analoga a quella vista per $\mathbb{R}^2$.

Nello spazio cartesiano si hanno tre rette ortogonali che si incontrano in un punto, detto anche qui origine del sistema cartesiano (che rappresenta la terna $(0, 0, 0)$). Gli assi sono generalmente indicati con le lettere x, y, z (o talvolta x_1, x_2, x_3). La raffigurazione del sistema cartesiano nello spazio e la disposizione degli assi sono quelli che si vedono nella figura qui a fianco.



Vediamo brevemente qualche sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

- L'insieme
$$A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\Big\}$$
è rappresentato nello spazio cartesiano dal piano che contiene gli assi y e z (sinteticamente il piano y, z).

- L'insieme
$$B = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = b\Big\}$$
è rappresentato nello spazio cartesiano dal piano, parallelo al piano x, z, e che passa per il punto $(0, b, 0)$.

- L'insieme
$$C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0\Big\}$$
è rappresentato dal semispazio delle z non negative, cioè il semispazio che sta al di sopra del piano x, y, quest'ultimo compreso. Naturalmente la disuguaglianza $z > 0$ definirebbe lo stesso semispazio, ma privo del piano x, y (cioè senza il bordo).

- Se vogliamo indicare l'asse z dobbiamo scrivere l'insieme
$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0 \ \wedge \ y = 0\Big\} = \Big\{(0, 0, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\Big\}$$
(cioè l'insieme dei punti in cui x e y sono nulli e z è un qualunque numero reale).

Si possono poi definire facilmente gli intervalli in $\mathbb{R}^3$, come prodotti cartesiani di tre intervalli di $\mathbb{R}$.

5 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 3.1

Si tratta di un semipiano: la parte di piano che sta alla sinistra della retta di equazione $x = -1$, bordo escluso. L'espressione attraverso un prodotto cartesiano è
$$A = (-\infty, -1) \times \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.2

Ricordo che la scrittura $-1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ y < 1$ significa $-1 \leq x \leq 1$ e nello stesso tempo $y < 1$. Si tratta quindi della parte di piano che sta alla destra della retta di equazione $x = -1$, alla sinistra della retta di equazione $x = 1$ e al di sotto della retta di equazione $y = 1$. Il bordo è solo in parte compreso (bordo laterale compreso, bordo superiore no). L'espressione attraverso un prodotto cartesiano è
$$A = [-1, 1] \times (-\infty, 1).$$

Esercizio 3.3

Si tratta della parte di piano che sta alla sinistra della retta di equazione $x = 1$ e al di sopra della retta di equazione $y = 0$. Per quanto riguarda il bordo, quello laterale fa parte dell'insieme A, quello inferiore no.

Esercizio 3.4

Si tratta di un segmento: quello di estremi $(0, -1)$ e $(0, 1)$.

Esercizio 3.5

Ci sono vari modi per descrivere A. Uno è il seguente: A è dato dai punti del piano che non appartengono né all'insieme $(0, +\infty) \times (1, +\infty)$ né all'insieme $(-\infty, -1) \times (-\infty, 0)$ (fare attenzione alle parentesi: qui devono essere tutte tonde). L'insieme A non si può scrivere con un prodotto cartesiano dato che A non è un intervallo. Si osservi quindi che l'unione di due intervalli non è necessariamente un intervallo (è così sia in $\mathbb{R}$ sia in $\mathbb{R}^2$). Lo studente rifletta ora sui seguenti quesiti e arrivi da solo a dare le risposte:

- l'unione di due intervalli di $\mathbb{R}^2$ può essere un intervallo? Si costruiscano situazioni in cui questo accade;
- quando l'unione di due intervalli di $\mathbb{R}$ è un intervallo? Si distinguano condizioni sufficienti e condizioni necessarie.
- quanto trovato in risposta alla seconda domanda vale anche in $\mathbb{R}^2$?