I-5 Elementi di geometria analitica

Indice

In questa lezione trattiamo alcuni argomenti della cosiddetta geometria analitica. Sono argomenti che rientrano nei programmi della scuola secondaria.

Il problema che affrontiamo è questo: se consideriamo un'equazione in due incognite (mettiamo x e y), possiamo attenderci che tale equazione abbia certe soluzioni, che sono da intendersi come coppie (ordinate) di numeri reali, quelle che solitamente rappresentiamo con (x, y). Se noi ora rappresentiamo nel piano cartesiano le soluzioni della nostra equazione, avremo ovviamente un sottoinsieme del piano. La domanda è: che tipo di sottoinsieme del piano si trova in corrispondenza della nostra equazione? La risposta (ovvia) è che il tipo di sottoinsieme dipende dal tipo di equazione. Per scoprire un po' di più sulla questione iniziamo con le equazioni più semplici, le equazioni di primo grado.

1 Rette nel piano

Ricordiamo che sono equazioni di primo grado in due incognite quelle che si possono ridurre alla forma

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad \text{con } a, b, c \text{ numeri reali fissati, } a, b \text{ non entrambi nulli.}$$

Esaminiamo intanto alcuni casi particolari.

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora possiamo riscrivere l'equazione nella forma
$$y = -\frac{c}{b}$$
e quindi le soluzioni della nostra equazione sono tutte le coppie in cui la seconda componente vale appunto $-\frac{c}{b}$. Si tratta quindi di tutte le coppie del tipo $(x, -\frac{c}{b})$, dove x può essere un numero reale qualunque. La rappresentazione sul piano di tale insieme è la retta di ordinata $-\frac{c}{b}$, quindi una retta orizzontale.

- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, allora riscriviamo l'equazione nella forma
$$x = -\frac{c}{a};$$
le soluzioni sono le coppie di prima componente $-\frac{c}{a}$, cioè delle coppie del tipo $(-\frac{c}{a}, y)$, dove y può essere un numero reale qualunque. Quindi la rappresentazione sul piano di tale insieme è la retta di ascissa $-\frac{c}{a}$, cioè una retta verticale.

Se invece $a \neq 0$ e $b \neq 0$, abbiamo il caso generale.

Si può verificare facilmente che la rappresentazione dell'insieme di soluzioni dell'equazione in questo caso è ancora una retta, questa volta "obliqua".

Pertanto le equazioni di primo grado definiscono (individuano) rette. Vedremo subito che vale anche il viceversa.

Osservazioni Ricordiamo che, data l'equazione nel caso generale $ax + by + c = 0$, è possibile riscrivere l'equazione nelle due forme (equivalenti)

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}.$$

Solitamente si preferisce la prima forma in quanto "esprime esplicitamente y in funzione di x" (cioè l'ordinata in funzione dell'ascissa), e per pura questione di abitudine preferiamo fare questo piuttosto che il contrario. Ma tra breve impareremo a fare altrettanto naturalmente anche la rappresentazione di x in funzione di y.

La scrittura esplicita di y in funzione di x nel caso dell'equazione di primo grado si può quindi dare nella forma

$$y = mx + q$$

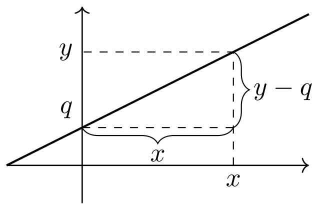
(ovviamente basta porre $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$). Importante è l'interpretazione geometrica delle quantità m e q (o di $-\frac{a}{b}$ e $-\frac{c}{b}$ se si preferisce):

- ▷ m è detto *coefficiente angolare* della retta ed è legato all'angolo (da cui l'aggettivo "angolare") che la retta forma con l'asse x, ossia alla *pendenza* della retta: se $m > 0$ la retta è "bassa a sinistra e alta a destra" (tra un po' vedremo come definire meglio questa proprietà), mentre se $m < 0$ accade il contrario (non può essere in questo caso $m = 0$ perché $a \neq 0$).

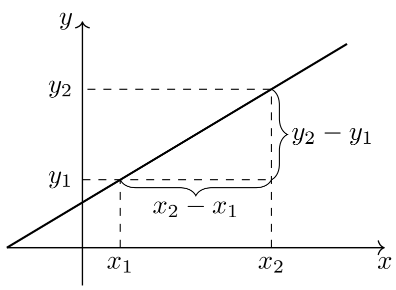
  Inoltre tanto più è grande il valore di m, tanto più pendente (ripida) è la retta.

- ▷ q è legato alla posizione del punto di intersezione della retta con l'asse y (si dice l'*ordinata all'origine* della retta): se $q = 0$ la retta incontra l'asse y nell'origine, se $q > 0$ tale punto di intersezione sta al di sopra dell'origine, se $q < 0$ tale punto sta al di sotto dell'origine. Tanto più grande è il valore di q, tanto più lontano dall'origine la retta incontra l'asse y.

Si osservi anche che la forma esplicita ($y = mx + q$) non si può ottenere se $b = 0$. Abbiamo visto prima che si tratta in questo caso di una retta verticale e si noti che ci sarebbe qualche problema a definire la pendenza di tali rette.



Cerchiamo di capire perché m ha il significato che è stato detto. Possiamo anzitutto osservare che dall'equazione $y = mx + q$ possiamo ricavare, se $x \neq 0$, che $m = \frac{y-q}{x}$. Aiutandoci con la figura qui a fianco, vediamo allora che questo quoziente altro non è che il rapporto tra la variazione delle ordinate sulla retta e la variazione delle ascisse corrispondenti nel passare dal punto di ascissa zero al punto di ascissa x.

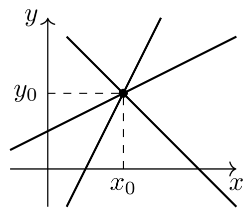


Più in generale (figura a sinistra), è il rapporto tra la variazione delle ordinate e la variazione delle ascisse nel passaggio da un qualunque punto P sulla retta ad un altro punto Q sulla retta. Infatti, supponendo che i due punti siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2), deve valere il sistema

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$$

che, togliendo alla seconda equazione la prima, porta a $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, e cioè $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. [1]

1.1 Rette passanti per un punto assegnato



Per un punto assegnato (x_0, y_0) passano ovviamente infinite rette. Ora che sappiamo il significato del parametro m, possiamo facilmente scrivere l'equazione di queste rette. Non è difficile capire che l'equazione è

$$y - y_0 = m(x - x_0). \text{ [2]}$$

Osservazione In realtà l'equazione scritta dà tutte le rette passanti per (x_0, y_0), ad eccezione di quella verticale, che ha equazione $x = x_0$.

[1] Questo vale se $x_1 \neq x_2$ naturalmente, ma è un'ipotesi "accettabile": se fosse $x_1 = x_2$ i due punti sarebbero allineati verticalmente e quindi la retta avrebbe equazione $x = x_1$.

[2] Ci si arriva o pensando che è $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, oppure pensando che il punto (x_0, y_0) è soluzione dell'equazione (entrambi i membri sono nulli) e si tratta certamente dell'equazione di una retta di pendenza m. Tutte le condizioni sono dunque rispettate.

Dovrebbe ora essere chiaro che possiamo determinare anche il parametro m se abbiamo un'informazione in più, che potrebbe essere o la conoscenza diretta della pendenza oppure il passaggio per un altro punto del piano.

Esempio Scrivere l'equazione delle rette passanti per il punto $(-1, 2)$. Senza molti commenti, si tratta dell'equazione $y - 2 = m(x + 1)$.

Siamo pronti per trovare l'equazione della retta per due punti.

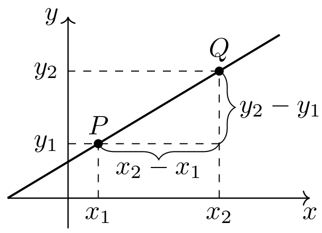
1.2 Rette passanti per due punti assegnati

Supponiamo che i due punti siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2). La condizione di passaggio per il primo punto porta a scrivere l'equazione

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

ma sappiamo anche che $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Quindi si trova

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$ [3]



Osservazione Anche qui l'equazione scritta esclude un caso possibile: infatti vale solo se $x_1 \neq x_2$. Nel caso si abbia $x_1 = x_2$, cioè punti con la stessa ascissa, la retta è ovviamente verticale e la sua equazione è $x = x_1$ (o $x = x_2$).

1.3 Rette parallele e rette perpendicolari

Vediamo ora due semplici questioni, legate sempre ai coefficienti angolari delle rette: in particolare parliamo di rette parallele e rette perpendicolari.

- *Rette parallele* in forma esplicita hanno lo stesso coefficiente angolare.

  Vediamo un'applicazione di questo fatto in un semplice esercizio: scrivere l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ e passante per il punto $(3, 2)$. Scriviamo la retta in forma esplicita: $y = 2x + 1$. La retta parallela avrà allora equazione esplicita del tipo $y = 2x + q$. Imponendo il passaggio per il punto $(3, 2)$ si deve avere $2 = 2 \cdot 3 + q$, da cui $q = -4$. L'equazione cercata è quindi $y = 2x - 4$. Si poteva anche osservare direttamente che si tratta della retta di pendenza 2 passante per il punto $(3, 2)$ e quindi è la retta di equazione $y - 2 = 2(x - 3)$.

- *Rette perpendicolari* in forma esplicita hanno coefficienti angolari m e m' legati dalla relazione $mm' = -1$ (da cui $m' = -1/m$).

  Vediamo anche qui un'applicazione in un esercizio: scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ e passante per il punto $(3, 2)$. La retta in forma esplicita è $y = 2x + 1$. La retta perpendicolare avrà equazione esplicita del tipo $y = -\frac{1}{2}x + q$. Imponendo il passaggio per il punto $(3, 2)$ si deve avere $2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + q$, da cui $q = \frac{7}{2}$. L'equazione cercata è quindi $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Osservazione Se è abbastanza naturale capire che rette parallele hanno la stessa pendenza, non è forse altrettanto naturale capire la relazione che lega le pendenze di due rette perpendicolari, a parte forse il fatto che se uno dei coefficienti angolari è positivo, l'altro deve essere negativo.

Per il momento allora abbiamo visto che le equazioni di primo grado individuano nel piano delle rette. Ci si chiede a questo punto se vale anche il viceversa, se cioè ogni retta del piano sia l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado. La risposta è affermativa, ma la corrispondenza tra equazioni di primo grado e rette *non* è biunivoca, come si potrebbe inizialmente pensare: un'equazione individua una sola retta, ma la stessa retta è soluzione di molte (infinite) equazioni. Questo è naturale, dato che una certa equazione ne ha infinite altre equivalenti ad essa. Ad esempio le due equazioni

$$x - 2y + 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad -2x + 4y - 6 = 0$$

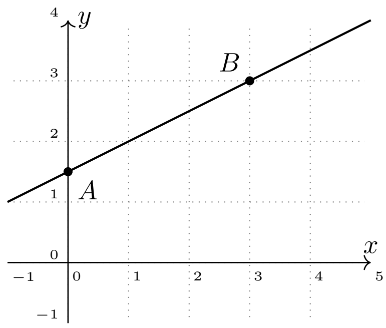
sono equivalenti, cioè hanno lo stesso insieme di soluzioni e cioè individuano la stessa retta.[4]

Possono essere utili e istruttivi due tipi di esercizi: data un'equazione, disegnare la retta che rappresenta le sue soluzioni e, data una retta nel piano, trovare un'equazione che la individui.

[3] È chiaro che se avessimo utilizzato la condizione di passaggio per il secondo punto avremmo trovato l'equazione $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$, che è formalmente diversa dall'altra, ma che individua la stessa retta.

[4] La seconda si ottiene dalla prima moltiplicando ambo i membri per -2.

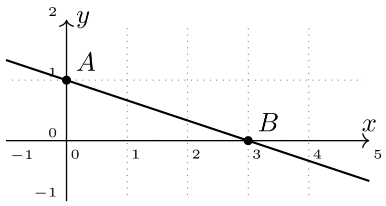
Vediamo il tutto su di un esempio. Consideriamo l'equazione di prima, $x - 2y + 3 = 0$. Vogliamo disegnare la retta corrispondente.



Qui si può fare così: basta trovare due particolari soluzioni dell'equazione, rappresentarle nel piano (sono due punti) e congiungerle con una retta (per uno dei postulati della geometria euclidea, per due punti passa una sola retta). Per facilitare la ricerca delle due soluzioni possiamo scrivere l'equazione esplicita

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Scegliamo ora due valori di x, ad esempio 0 e 3, e, sostituendo nell'equazione otteniamo rispettivamente $\frac{3}{2}$ e 3. Le due soluzioni sono dunque $A = (0, \frac{3}{2})$ e $B = (3, 3)$. La retta è allora quella raffigurata qui a fianco.

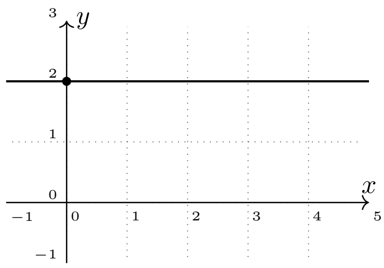


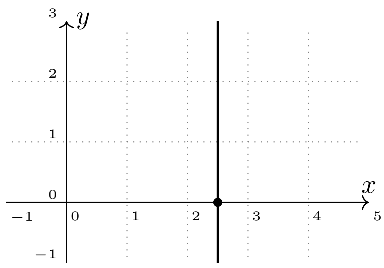
Viceversa, se abbiamo la retta raffigurata qui a sinistra e vogliamo trovarne un'equazione, basta intanto trovare due punti che stanno sulla retta, qui ad esempio $A = (0, 1)$ e $B = (3, 0)$. Usando l'equazione esplicita $y = mx + q$, dovrà quindi essere verificato il sistema[5]

$$\begin{cases} 0 = 3 \cdot m + q \\ 1 = 0 \cdot m + q \end{cases}$$

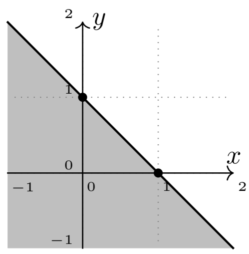
e si ricava immediatamente $q = 1$ e $m = -\frac{1}{3}$. Un'equazione esplicita che individua la retta data è $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Da questa volendo si può trovare un'equazione generale, ad esempio $x + 3y - 3 = 0$.

È chiaro che se la retta data è orizzontale o verticale è molto più semplice trovarne l'equazione. Ad esempio, con le due rette raffigurate qui sotto





è immediato che le due equazioni sono (rispettivamente) $y = 2$ e $x = 5/2$.



Concludiamo questa sezione con qualche disequazione di primo grado in due incognite e cerchiamo di capire quale regione di piano verifica la disequazione data, cioè costituisce l'insieme delle sue soluzioni. Ad esempio, consideriamo la disequazione

$$x + y - 1 \leq 0.$$

Qui si può procedere in questo modo: si esplicita la y, scrivendo $y \leq -x+1$. Ora abbiamo visto poco fa che l'equazione corrispondente ($y = -x + 1$) individua una retta.

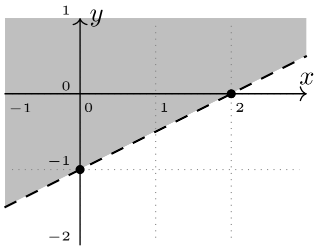
La regione che stiamo ora cercando contiene evidentemente questa retta, dato che la disequazione è con il "$\leq$". Supponiamo che (x, y) sia un punto sulla retta in questione. Oltre a questo punto, la regione contiene anche tutti quelli che hanno ordinata minore di y (e la stessa ascissa). La regione è quindi quella che si trova al di sotto della retta, retta compresa.

Se l'equazione fossa stata $x + y - 1 < 0$, avremmo avuto ovviamente solo i punti al di sotto della retta.

Avremmo potuto ragionare anche esplicitando la x con la disequazione $x \leq -y+1$. Ovviamente la retta è la stessa. Se ancora (x, y) è un punto sulla retta, oltre a questo la regione contiene anche tutti quelli che hanno ascissa minore di x (e la stessa ordinata). La regione è quindi quella che si trova alla sinistra della retta, retta compresa. Chiaramente è la stessa regione di prima.

[5] Si poteva ovviamente anche scrivere direttamente l'equazione della retta passante per i due punti $A = (0, 1)$ e $B = (3, 0)$, cioè

$$y - 1 = \frac{0-1}{3-0}(x - 0) \quad \text{e quindi} \quad y = -\frac{1}{3}x + 1.$$



Un altro esempio. La disequazione è

$$x - 2y - 2 < 0.$$

L'equazione corrispondente individua la retta rappresentata qui a sinistra. Esplicitiamo la x scrivendo $x < 2y + 2$. Si tratta dei punti che stanno alla sinistra della retta in figura. Esplicitando la y avremmo ottenuto $y > \frac{1}{2}x - 1$, cioè la regione al di sopra della retta.

Esercizio 1.1 Si scriva l'equazione della retta passante per i punti $(0, 1)$ e $(2, -1)$.

Esercizio 1.2 Si scriva l'equazione della retta per il punto $(2, -1)$ e parallela alla retta di equazione $2x+3y = 5$.

Esercizio 1.3 Si scriva l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y + 2 = 0$ e passante per il punto $(2, 1)$.

Esercizio 1.4 Si descriva l'insieme del piano dei punti soluzione della disequazione $3x - 2y + 4 < 0$.

Abbiamo visto tutto per quanto riguarda le equazioni (e disequazioni) di primo grado.

Passiamo alle equazioni di secondo grado, sempre in due incognite. Qui le cose in realtà si farebbero molto più complicate, se volessimo affrontare il problema nella sua generalità. Non arriveremo infatti a considerare il caso più generale, che è rappresentato dall'equazione

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \tag{1}$$

Esamineremo soltanto alcuni casi particolari dell'equazione scritta qui sopra, che ci porteranno ad alcune particolari curve nel piano.

2 Parabole

1. Consideriamo in (1) il caso particolare

$$ax^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{, con } a \neq 0.\text{[6]} \tag{2}$$

Mancano due dei tre termini di secondo grado e resta il termine in x^2. Qui si possono presentare due casi rilevanti: $e = 0$ oppure $e \neq 0$. Se $e = 0$, allora l'equazione equivale a

$$ax^2 + dx + f = 0.$$

Ora, se questa equazione in una sola variabile non ha soluzioni, essa non individua nulla nel piano.

Se ha una sola soluzione x_0, definisce la retta (verticale) di equazione $x = x_0$.

Se ha due soluzioni distinte x_1 e x_2, definisce una coppia di rette parallele verticali di equazione $x = x_1$ e $x = x_2$.

Il caso $e \neq 0$ è più interessante, dato che si ottiene una nuova curva nel piano, che si chiama *parabola*.[7]

Possiamo esplicitare facilmente la y in funzione della x e, ridenominando opportunamente i coefficienti, possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$y = ax^2 + bx + c \text{ , con } a \neq 0, \tag{3}$$

da cui si vede che nelle parabole c'è una relazione di tipo quadratico tra la x e la y.

Per cogliere qualche proprietà in più della parabola possiamo scrivere

$$\begin{array}{rcl} & y = & ax^2 + bx + c \\ & = & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ \text{(completamento del quadrato)} & = & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ & = & a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ & = & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right) \\ & = & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}. \end{array}$$

[6] Con $a = 0$ si tornerebbe all'equazione di primo grado.

[7] Lo studente interessato può andare a rivedere le proprietà geometriche della parabola in un testo di scuola secondaria.

Questo dovrebbe far capire che la parabola presenta una simmetria rispetto alla retta (verticale) di equazione $x = -\frac{b}{2a}$, che prende il nome di *asse della parabola*. L'intersezione tra la parabola e il suo asse si chiama *vertice della parabola*, che ha coordinate $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$. Le parabole di equazione (2) hanno l'asse parallelo all'asse y.

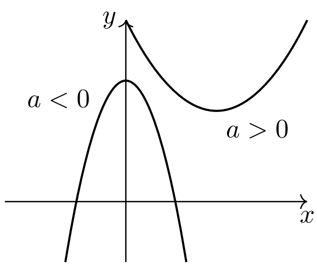
Esempio Consideriamo l'equazione $y = 2x^2+4x+5$. Procedendo con il completamento del quadrato si ottiene

$$y = 2\left(x^2 + 2x + \tfrac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 + 2x + 1 + \tfrac{3}{2}\right) = 2(x+1)^2 + 3.$$

Il vertice della parabola è il punto $(-1, 3)$, l'asse è la retta di equazione $x = -1$.

Osservazioni Prima di vedere qualche altro esempio, vediamo qual è il significato geometrico dei coefficienti. Consideriamo per semplicità direttamente l'equazione esplicita (3). Il significato del coefficiente c è semplicemente, come per le rette, l'ordinata all'origine della parabola.

Il significato invece del coefficiente a è duplice: il suo segno dice se la parabola ha la *concavità*[8] rivolta verso l'alto o verso il basso (se il coefficiente è positivo la concavità è verso l'alto, il contrario se negativo). Il valore assoluto del coefficiente dice invece qual è la curvatura della parabola: più è grande e più la parabola è stretta, per così dire.



Importanti per tracciare un grafico della parabola sono anche le eventuali intersezioni con gli assi.

Se consideriamo l'equazione (3), le ascisse delle eventuali intersezioni con l'asse x (le ordinate di quella con la y la conosciamo già) sono le eventuali soluzioni dell'equazione di secondo grado (in una incognita)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e sappiamo che possono essere due, una o nessuna.

2. Consideriamo ora in (1) l'altro caso particolare

$$by^2 + dx + ey + f = 0 \quad , \text{con } b \neq 0. \tag{4}$$

Qui mancano ancora due dei tre termini di secondo grado, ma stavolta resta il termine in y^2.

La discussione procede come prima. Si possono presentare due casi: $d = 0$ oppure $d \neq 0$.

Se $d = 0$, l'equazione equivale a

$$by^2 + ey + f = 0.$$

Se questa equazione in una sola variabile non ha soluzioni, essa non definisce nulla nel piano.

Se ha una sola soluzione y_0, definisce la retta (orizzontale) di equazione $y = y_0$.

Se ha due soluzioni distinte y_1 e y_2, definisce una coppia di rette parallele orizzontali di equazione $y = y_1$ e $y = y_2$.

Se invece $d \neq 0$, si ottiene ancora una parabola e si dovrebbe intuire facilmente ciò che succede: questa volta è possibile esplicitare direttamente la x in funzione della y e, ridenominando opportunamente i coefficienti, possiamo scrivere

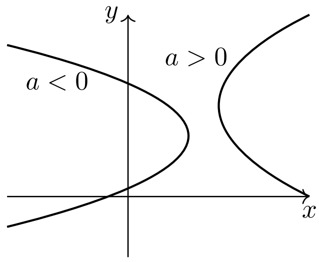
$$x = ay^2 + by + c. \tag{5}$$

È ancora una parabola poiché il tipo di curva è determinato solamente dal tipo di legame che c'è tra le due incognite (qui ancora un legame di tipo quadratico). Quello che cambia è solo l'ordine delle variabili: è come se avessimo scambiato la x con la y. E si intuisce che questo scambio porta a "rovesciare" la parabola, portando il suo asse ad essere parallelo all'asse x questa volta.

Le parabole di equazione (4) hanno appunto l'asse parallelo all'asse x.

[8] La concavità della parabola dice, in parole povere, da che parte la parabola si piega.

Osservazioni L'interpretazione geometrica dei coefficienti è analoga al caso precedente, tenendo conto ovviamente dello scambio degli assi. Quindi, avendo a che fare con l'equazione esplicita (5), basta tradurre le considerazioni precedenti scambiando gli assi. Il coefficiente c è ora l'ascissa all'origine della parabola, mentre a dice da che parte è la concavità (a destra se positivo e a sinistra se negativo), oltre alla curvatura.



Importanti anche qui, per tracciare un grafico della parabola, sono le eventuali intersezioni con gli assi.

Considerando l'equazione (5), le ordinate delle eventuali intersezioni con l'asse y sono le eventuali soluzioni dell'equazione di secondo grado

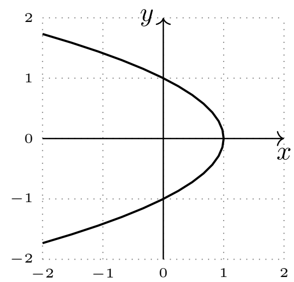
$$ay^2 + by + c = 0,$$

anche qui due, una o nessuna.

Rivediamo il tutto in un paio di esempi.

- Consideriamo l'equazione

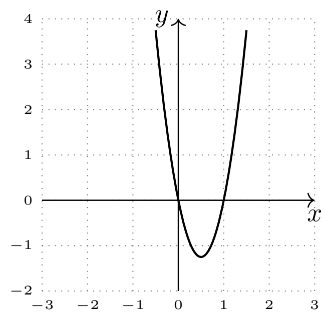
$$x + y^2 - 1 = 0 \quad \text{, che diventa } x = -y^2 + 1 \text{ in forma esplicita.}$$



Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse x, con la concavità rivolta verso sinistra, ascissa all'origine 1 (quindi passa per il punto $(1, 0)$). Le intersezioni con l'asse y sono nei due punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$, dato che -1 e 1 sono le soluzioni dell'equazione $-y^2 + 1 = 0$. L'asse della parabola coincide con l'asse x e il vertice della parabola è il punto $(1, 0)$.

- L'equazione

$$5x^2 - 5x - y = 0 \quad \text{diventa } y = 5x(x - 1) \text{ in forma esplicita.}$$

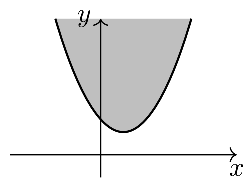


Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y, con la concavità rivolta verso l'alto, ordinata all'origine 0 (quindi passa per l'origine); ha intersezioni con l'asse x nei due punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$. L'asse di simmetria è la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ e il vertice è nel punto $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$.

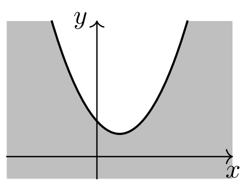
Osservazione Lo studente attento avrà notato che abbiamo parlato solo di parabole con asse di simmetria parallelo agli assi. Naturalmente ci sono nel piano anche parabole con asse "obliquo". Di queste non parleremo, anche se con una teoria più generale di quella vista potremmo essere in grado di riconoscere l'equazione anche di queste.

Non è difficile capire quale sia la regione di piano individuata da una disequazione del tipo

$$y \geq ax^2 + bx + c \qquad \text{oppure} \qquad y > ax^2 + bx + c.$$



Si tratta della regione che sta al di sopra della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. La differenza tra i due insiemi è che il primo contiene i punti che stanno sulla parabola, mentre il secondo no.



Dovrebbe essere chiaro qual è la regione individuata dalle disequazioni

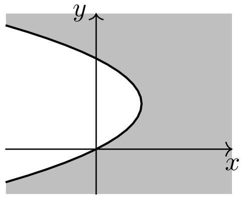
$$y \leq ax^2 + bx + c \qquad \text{oppure} \qquad y < ax^2 + bx + c.$$

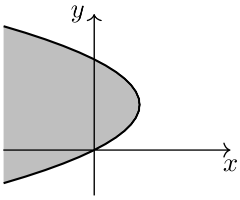
Si tratta della parte di piano che sta al di sotto della parabola di equazione data, con la solita precisazione riguardante il bordo dell'insieme.

Se invece consideriamo una disequazione del tipo

$$x \geq ay^2 + by + c \qquad \text{oppure} \qquad x > ay^2 + by + c$$

abbiamo la regione che sta alla destra della parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$.





Infine la regione individuata dalle disequazioni

$$x \leq ay^2 + by + c \qquad \text{oppure} \qquad x < ay^2 + by + c$$

è quella che sta alla sinistra della parabola di equazione data.

Esempi

- La disequazione $2x^2 - y + 1 \geq 0$ equivale a $y \leq 2x^2 + 1$ e quindi ha per soluzione l'insieme dei punti del piano al di sotto della parabola di equazione $y = 2x^2 + 1$. Tale parabola ha asse verticale, concavità rivolta verso l'alto e non ha intersezioni con l'asse x. I punti sulla parabola sono soluzioni (cioè la regione contiene il bordo).
- La disequazione $y - 2 + x^2 > 0$ equivale a $y > 2 - x^2$ e quindi ha per soluzione l'insieme dei punti del piano al di sopra della parabola di equazione $y = 2 - x^2$. Tale parabola ha asse verticale, concavità rivolta verso il basso e interseca l'asse x nei punti di ascissa $x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{2}$. I punti sulla parabola non sono soluzioni.
- La disequazione $x + y^2 - 1 \geq 0$ equivale a $x \geq 1 - y^2$ e quindi ha per soluzione l'insieme dei punti del piano alla destra della parabola di equazione $x = 1 - y^2$. Tale parabola ha asse orizzontale, concavità rivolta verso sinistra e interseca l'asse y nei punti di ordinata $y_1 = -1$ e $y_2 = 1$. I punti sulla parabola sono soluzioni.
- La disequazione $x + 2 - 3y^2 < 0$ equivale a $x < 3y^2 - 2$ e quindi ha per soluzione l'insieme dei punti del piano alla sinistra della parabola di equazione $x = 3y^2 - 2$. Tale parabola ha asse orizzontale, concavità rivolta verso destra e interseca l'asse y nei punti di ordinata $y_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. I punti sulla parabola non sono soluzioni.

Esercizio 2.1 Si consideri la curva del piano definita dall'equazione $x^2 + 2y - 1 = 0$. Tale curva passa per l'origine? E passa per il punto $(2, -\frac{3}{2})$? Si descriva poi tale curva.

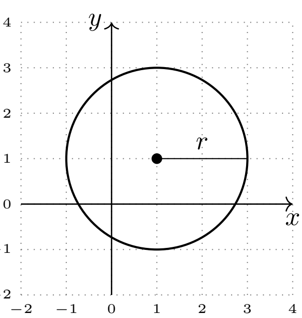
Esercizio 2.2 Si consideri la curva del piano definita dall'equazione $3x - 2y^2 + 1 = 0$. Tale curva passa per l'origine? Si descriva poi tale curva e si indichi un punto del primo quadrante che sta sulla curva.

Esercizio 2.3 Si descrivano in modo sufficientemente completo e si disegnino le regioni di piano individuate dalle disuguaglianze:

(a) $y + 2x^2 - 3 < 0$ (b) $x^2 + x - y - 2 \leq 0$ (c) $2x - y^2 + 4 \geq 0$

Esercizio 2.4 Si disegnino nel piano le curve di equazione $x^2 + 4x + 4 = 0$ e di equazione $y^2 - 4y + 3 = 0$.

3 Circonferenze



Ricordiamo intanto che la *distanza euclidea* di due punti del piano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è data da $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (teorema di Pitagora).
La circonferenza di centro il punto (x_0, y_0) e raggio $r \geq 0$ è l'insieme dei punti del piano che distano r dal centro. Ad esempio qui a sinistra è raffigurata una circonferenza di centro il punto $(1, 1)$ e raggio 2.
Ricordando questa definizione geometrica si vede facilmente (utilizzando la distanza euclidea in $\mathbb{R}^2$) che i punti di tale circonferenza soddisfano l'equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{6}$$

È chiaro che un'equazione di questo tipo individua una (e solo quella) circonferenza e ormai dovrebbe essere altrettanto chiaro che questa non è l'unica equazione le cui soluzioni sono i punti di quella circonferenza.[9]

[9] Si ricordi che esistono infinite equazioni equivalenti alla (6).

Come già visto per le rette e per le parabole, si possono presentare due tipi di problemi anche qui, e cioè: data una circonferenza nel piano, con centro e raggio noti, scriverne l'equazione oppure, data un'equazione, disegnare la circonferenza, cioè rappresentare le soluzioni di quell'equazione.

Il primo problema è molto più semplice. Scrivere l'equazione, nota la circonferenza, è in effetti molto facile dato che, conoscendo il centro (x_0, y_0) ed il raggio r, devo solo scrivere la (6). Quindi, ad esempio, se il centro è $(-2, 1)$ e il raggio è 3, l'equazione della circonferenza è $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Può sembrare che anche il problema inverso sia ugualmente facile ed in effetti lo è se l'equazione data è nella forma (6). Ma può essere che l'equazione non sia nella forma (6) e che sia parte dell'esercizio capire se può essere riscritta nella forma (6). È chiaro che, quando saremo riusciti a scrivere la nostra equazione nella forma (6), tracciare la circonferenza sarà banale, dato che l'equazione dice chi è il centro e chi è il raggio.

Affrontiamo così la questione: quali equazioni possono essere l'equazione di una circonferenza? Ad esempio, un'equazione di primo grado non può essere l'equazione di una circonferenza. È chiaro che solo le equazioni di secondo grado possono esserlo. Ma possiamo scoprire di più, semplicemente svolgendo i calcoli nella (6). Si ottiene l'equazione (equivalente)

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2.$$

Se vogliamo descrivere a parole le caratteristiche di un'equazione di questo tipo possiamo dire che: è un'equazione di secondo grado con coefficienti uguali nei termini x^2 e y^2 (non è detto che questi coefficienti siano necessariamente uguali ad 1: si ricordi che ci sono infinite equazioni equivalenti) e manca il termine xy. Queste sono le equazioni candidate ad individuare una circonferenza. Però attenzione che prima di affermare che di circonferenza si tratta occorre che si verifichi un altro fatto.

Ma vediamo il tutto, compreso come si può procedere in pratica, su qualche esempio.

- Consideriamo l'equazione
$$x^2 + y^2 = 2.$$
Essa definisce certamente la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$ e non c'è molto da aggiungere.

- Consideriamo l'equazione
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0.$$
Può avere per soluzioni i punti di una circonferenza. Si può procedere per *completamento dei quadrati*, facendolo sia sulle x sia sulle y. Otteniamo[10]
$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 2 = 0 \quad \text{cioè} \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$
Solo ora possiamo dire che è in effetti l'equazione di una circonferenza, precisamente di centro $(1, -1)$ e raggio 2.

- Consideriamo l'equazione
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0.$$
Anche questa è una buona candidata ad essere una circonferenza. Con il completamento dei quadrati otteniamo[11]
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + 14 = 13 \quad \text{cioè} \quad (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = -1.$$
Questa volta non è una circonferenza (il -1 che c'è a destra dovrebbe essere il quadrato del raggio).
Possiamo dire che quest'ultima equazione, che è equivalente alla nostra iniziale, non ha nessuna soluzione, dato che non può mai essere vera. Quindi essa non definisce nulla nel piano, o se si preferisce definisce l'insieme vuoto.

- Consideriamo l'equazione
$$x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0.$$
Anche questa può essere una circonferenza. I quadrati sono già completi e possiamo riscrivere
$$x^2 + (y + 3)^2 = 0.$$
Nemmeno questa volta è una circonferenza, oppure qui possiamo dire che è una circonferenza degenere (raggio nullo). L'unica soluzione di questa equazione è un solo punto del piano (il centro della circonferenza), cioè $(0, -3)$.

[10] Per completare il quadrato sulle x devo aggiungere 1 e lo stesso per il quadrato sulle y. Naturalmente devo anche togliere le quantità aggiunte.

[11] Aggiungo 4 per completare il quadrato sulle x e 9 per il quadrato sulle y. Anziché togliere 13 a sinistra posso aggiungerlo a destra.

Quelli visti sono i tre casi che si possono presentare quando si ha un'equazione che può definire una circonferenza. Vediamo ancora qualche utile esempio.

- Consideriamo l'equazione
$$x^2 + y^2 + x - 3y - \tfrac{3}{2} = 0.$$
Possiamo facilmente ottenere i doppi prodotti dove apparentemente non ci sono con
$$x^2 + y^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}x - 2 \cdot \tfrac{3}{2}y - \tfrac{3}{2} = 0$$
e, completando i quadrati,
$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} + y^2 - 2 \cdot \tfrac{3}{2}y + \tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{10}{4} \quad \text{cioè} \quad \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 4.$$
Si tratta della circonferenza di centro il punto $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e raggio 2.

- L'equazione
$$36x^2 + 36y^2 - 36x + 48y - 11 = 0$$
risulta una candidata a definire una circonferenza. Completiamo i quadrati, ottenendo
$$36x^2 - 36x + 9 + 36y^2 + 48y + 16 - 11 = 25 \quad \text{cioè} \quad (6x - 3)^2 + (6y + 4)^2 = 36.$$
Attenzione qui. Per riconoscere meglio centro e raggio conviene riscrivere
$$36\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 36\left(y + \tfrac{2}{3}\right)^2 = 36 \quad \text{cioè} \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{2}{3}\right)^2 = 1.$$
Si tratta allora della circonferenza di centro il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ e raggio 1.
Si poteva anche, ripartendo dall'equazione iniziale, dividere tutto per 36 eliminando quindi il problema del coefficiente diverso da 1. Si ottiene, completando poi i quadrati,
$$x^2 + y^2 - x + \tfrac{4}{3}y - \tfrac{11}{36} = 0 \quad , \quad x^2 - x + \tfrac{1}{4} + y^2 + \tfrac{4}{3}y + \tfrac{4}{9} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{11}{36} \quad , \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{2}{3}\right)^2 = 1.$$

- Consideriamo l'equazione
$$9x^2 + 9y^2 + 2x - 3y - 1 = 0,$$
che è candidata a definire una circonferenza. Completiamo i quadrati, ottenendo
$$9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + 9y^2 - 2 \cdot 3y \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} \quad \text{cioè} \quad \left(3x + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(3y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{49}{36}.$$
Attenzione che ora, prima di concludere, occorre "portare il 3 fuori dai quadrati". Si poteva anche dividere per il coefficiente 9 all'inizio: si ottiene
$$x^2 + y^2 + \tfrac{2}{9}x - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{9} = 0 \quad , \quad x^2 + \tfrac{2}{9}x + \tfrac{1}{81} + y^2 - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{36} \quad , \quad \left(x + \tfrac{1}{9}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{49}{324}.$$
Si tratta quindi della circonferenza di centro il punto $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{6})$ e raggio $\frac{7}{18}$.

Osservazione Possiamo vedere la questione in questo modo: la tecnica del completamento del quadrato permette di scoprire se la nostra circonferenza si ottiene come traslazione di una circonferenza con centro nell'origine. Infatti, consideriamo le due equazioni
$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{e} \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
La prima è la circonferenza di centro l'origine e raggio r e la seconda la circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r. Quindi la seconda si ottiene attraverso una traslazione nel piano della prima, che porta l'origine nel punto (x_0, y_0).

La stessa interpretazione la possiamo utilizzare anche con le parabole. Infatti, considerando le due equazioni
$$y = ax^2 \qquad \text{e} \qquad y - y_0 = a(x - x_0)^2,$$
possiamo vedere che la seconda parabola si ottiene con una traslazione della prima, traslazione che anche qui porta l'origine nel punto (x_0, y_0).

Ad esempio, se abbiamo l'equazione $x^2 + x - y + 1 = 0$ e la riscriviamo come $y = x^2 + x + 1$, completando il quadrato sulle x possiamo ottenere

$$y = x^2 + x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + 1 \quad \text{cioè} \quad y = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} \quad \text{e infine} \quad y - \tfrac{3}{4} = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 .$$

Ora si capisce che la parabola in questione si ottiene dalla parabola di equazione $y = x^2$ con una traslazione che porta il vertice dall'origine al punto $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Faccio osservare che così riusciamo a ricavare esattamente come è fatta la parabola.

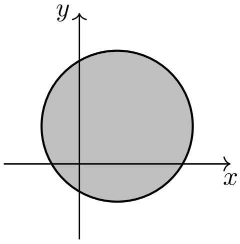
Per quanto riguarda l'insieme individuato da una disequazione del tipo

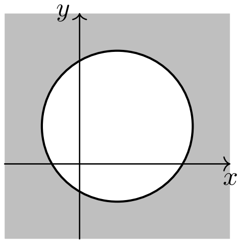
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2 \qquad \text{oppure} \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

è immediato capire che si tratta della regione interna alla circonferenza di equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ (la solita differenza per quanto riguarda la disuguaglianza di minore o di minore o uguale). Ovvio che invece le disequazioni

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ge r^2 \qquad \text{oppure} \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$

individuano la regione esterna alla circonferenza.





Esempi

- La disequazione $x^2 + y^2 < 3$ ha come soluzione l'insieme dei punti interni al cerchio[12] di centro $(0, 0)$ e raggio $r = \sqrt{3}$.
- La disequazione $(x + 1)^2 + y^2 \ge 9$ ha come soluzione la regione esterna alla circonferenza di centro $(-1, 0)$ e raggio $r = 3$, compresa la circonferenza stessa.
- Consideriamo le due disequazioni $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \ge 0$ e $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 > 0$.

  La prima è ovviamente verificata in ogni punto del piano (la somma di due quantità non negative è chiaramente non negativa), mentre le soluzioni della seconda sono tutti i punti del piano ad eccezione però del punto $(1, -1)$, che rende nullo il primo membro.
- Consideriamo le due disequazioni $(x + 2)^2 + y^2 \le 0$ e $(x + 2)^2 + y^2 < 0$.

  La seconda non è verificata in nessun punto del piano (come si diceva prima la somma di due quantità non negative è non negativa), mentre la prima ha un'unica soluzione, data dal punto $(-2, 0)$, che rende nullo il primo membro.

Esercizio 3.1 Si scriva l'equazione della circonferenza di centro il punto $(3, -2)$ e raggio 4.

Esercizio 3.2 Si descriva in modo sufficientemente completo e si disegni la curva di equazione $x^2 + (y + 1)^2 = 3$. Che regione di piano soddisfa poi la disuguaglianza $x^2 + (y + 1)^2 \le 3$?

Esercizio 3.3 Si disegni la regione di piano individuata dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 - x + 4y < 0$.

4 Ellissi

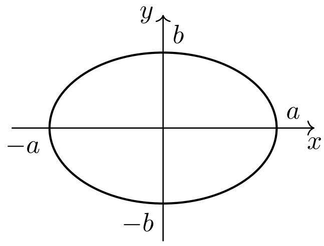
Altre equazioni di secondo grado rilevanti sono quelle che si possono scrivere nella forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ [13]} \tag{7}$$

[12] Come vedremo meglio più avanti, si definisce in modo rigoroso il significato di *punto interno* ad un insieme. Anticipo qui che dicendo punti interni al cerchio si intendono tutti i punti del cerchio che non stanno sul bordo.

Questo tipo di equazioni definiscono un altro particolare tipo di curva nel piano che si chiama *ellisse*.

La (7) definisce un'ellisse con centro nell'origine e vedremo tra breve l'equazione dell'ellisse con centro in un punto qualunque.



Non è difficile trovare le intersezioni dell'ellisse con gli assi cartesiani: se poniamo $x = 0$ nella (7), otteniamo $y = \pm b$ e quindi l'ellisse incontra l'asse y nei punti $(0, -b)$ e $(0, b)$; se poniamo invece $y = 0$ nella (7), otteniamo $x = \pm a$ e quindi l'ellisse incontra l'asse x nei punti $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

I numeri a e b (entrambi positivi) si dicono i *semiassi dell'ellisse*. Il loro significato geometrico dovrebbe essere chiaro guardando la figura a fianco.

Osservazioni Si noti che l'ellisse ha due assi di simmetria. Nel caso dell'equazione (7) gli assi di simmetria sono gli assi cartesiani.

Si noti anche che a e b sono i semiassi rispettivamente sulle x e sulle y. Se a è molto più grande rispetto a b l'ellisse risulta molto allungata lungo le x (cioè orizzontalmente), mentre lo è lungo le y (verticalmente) se b è grande rispetto ad a. Se invece a e b non sono molto diversi tra loro l'ellisse tende ad assomigliare ad una circonferenza (se $a = b$ in effetti si tratta di una circonferenza di raggio $r = a$).

C'è una forma più generale che possiamo vedere senza troppa fatica in più, dato che abbiamo già visto l'analogo con le circonferenze. Dopo aver confrontato l'equazione di una circonferenza con centro l'origine con quella di una circonferenza con centro in un punto diverso dall'origine, non è difficile intuire che in generale l'equazione di un'ellisse con centro (x_0, y_0) è

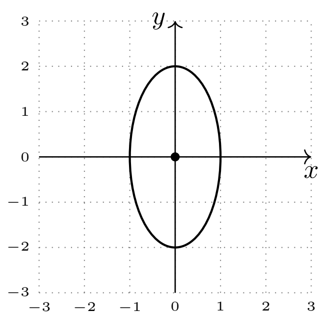
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$ [14]

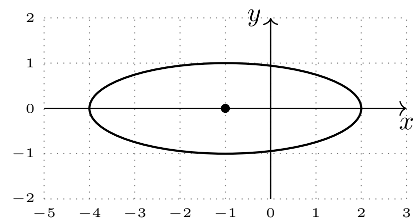
Disegnare un'ellisse noto il centro e i due semiassi è praticamente immediato, come è immediata la scrittura della relativa equazione. Ad esempio l'equazione dell'ellisse di centro $(1, -2)$ e semiassi 3 e 4 è $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

Come per le circonferenze, un po' più elaborato può essere il problema inverso, cioè scoprire se una certa equazione è l'equazione di un'ellisse.

Vediamo anche qui qualche esempio.

- Le due equazioni
$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(x+1)^2}{9} + y^2 = 1$$
definiscono rispettivamente un'ellisse di centro l'origine e semiassi 1 e 2 e un'ellisse di centro $(-1, 0)$ e semiassi 3 e 1. Sono raffigurati qui sotto.



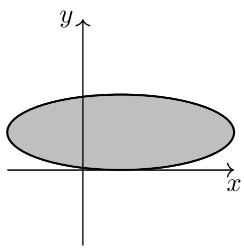


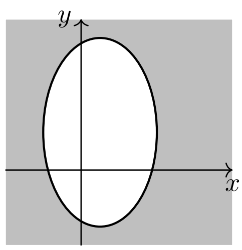
- L'equazione
$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$
è candidata ad essere l'equazione di un'ellisse (lo studente cerchi di darsene una ragione). Per riconoscere i parametri dell'ellisse basta portare a destra il 36 e dividere tutto per 36:
$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad , \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$
Quindi è l'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi $a = 3$ e $b = 2$.

[13]Qui conviene dire che pensiamo a e b positivi.
[14]Lo studente avrà intuito che questa equazione, come accadeva prima con le parabole, non è del tutto generale, nel senso che non definisce tutte le possibili ellissi del piano, ma soltanto quelle con assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani.

- L'equazione
$$2x^2 + y^2 - 2y = 0$$
è candidata ad essere l'equazione di un'ellisse (lo studente cerchi di darsene una ragione). Completando il quadrato su y la possiamo riscrivere come
$$2x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \quad \text{e cioè} \quad \frac{x^2}{1/2} + (y-1)^2 = 1.$$
Si tratta quindi dell'ellisse di centro $(0, 1)$ e semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = 1$.
- L'equazione
$$4x^2 + 8x + y^2 + 6y + 9 = 0$$
è candidata ad essere l'equazione di un'ellisse. Completando il quadrato su x (quello su y è già completo) la possiamo riscrivere come
$$4x^2 + 8x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4 \quad \text{e cioè} \quad (2x+2)^2 + (y+3)^2 = 4.$$
Dividendo tutto per 4 si ottiene
$$(x+1)^2 + \frac{(y+3)^2}{4} = 1,$$
che è l'equazione dell'ellisse di centro $(-1, -3)$ e semiassi $a = 1$ e $b = 2$.

Per quanto riguarda le disequazioni, il caso è analogo a quello delle circonferenze: l'insieme individuato da una disequazione del tipo
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,$$
è la regione interna all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, mentre le disequazioni
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ge 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$$
individuano la regione esterna all'ellisse.





Esercizio 4.1 Si descriva in modo sufficientemente completo e si disegni la curva di equazione $2x^2+3(y-1)^2 = 1$. Che regione di piano soddisfa poi la disuguaglianza $2x^2 + 3(y-1)^2 > 1$?

Esercizio 4.2 Si disegni la regione del piano formata dalle soluzioni della disuguaglianza $x^2 + 4y^2 - 8y < 0$.

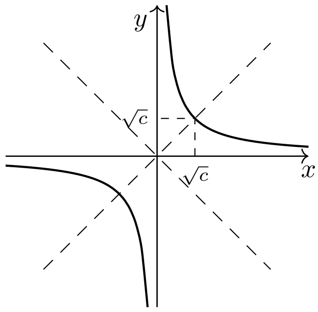
5 Iperboli

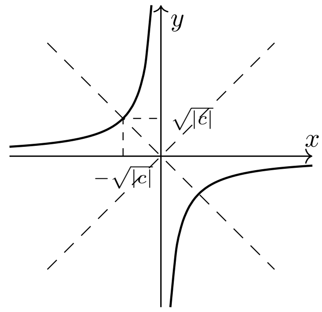
Vediamo ancora tre tipi di equazioni, per la verità diverse tra loro, ma che definiscono lo stesso tipo di curva: l'iperbole.

1. L'equazione di secondo grado
$$xy = c$$
definisce una curva nel piano che prende il nome di *iperbole equilatera*.

   Qui ci sono due semplici casi possibili: $c > 0$ o $c < 0$ (il caso $c = 0$ è banale e l'iperbole degenera in una coppia di rette: infatti l'equazione $xy = 0$ definisce gli assi cartesiani).

- Se $c > 0$, l'iperbole è raffigurata sotto a sinistra. Come si vede è una curva che presenta un aspetto nuovo rispetto a tutte quelle viste finora, è cioè costituita da due parti distinte, detti *rami dell'iperbole*. Se $c > 0$, i rami occupano il primo e il terzo quadrante. L'origine è il centro dell'iperbole.
  Più grande è il valore di c e più l'iperbole è "lontana" dall'origine.[15]
  Ci sono due assi di simmetria: le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ (tratteggiate in figura).
- Se $c < 0$, l'iperbole è raffigurata sotto a destra. I rami dell'iperbole occupano il secondo e il quarto quadrante.
  Anche qui, più grande è il valore di $|c|$ e più l'iperbole è lontana dall'origine.[16]
  Ci sono anche qui gli stessi assi di simmetria di prima: le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$.

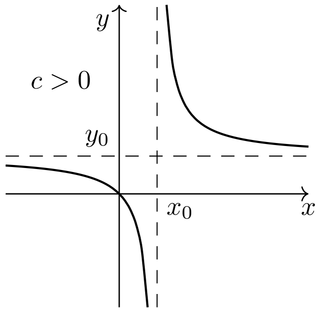


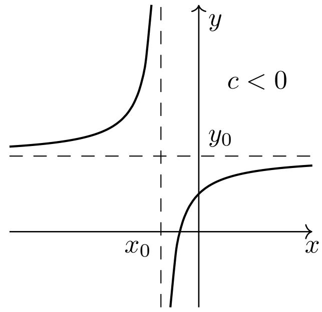


In entrambi i casi gli assi cartesiani hanno una rilevanza particolare per l'iperbole. Sono infatti rette alle quali i rami dell'iperbole "tendono ad avvicinarsi". Si chiamano gli *asintoti dell'iperbole*. Si noti che l'iperbole non interseca mai i suoi asintoti.
Non dovrebbe essere difficile intuire ora che cosa definisce un'equazione del tipo

$$(x - x_0)(y - y_0) = c.$$

Si tratta ancora di un'iperbole, simile a quella dell'equazione $xy = c$, ma traslata in modo che il centro sia nel punto (x_0, y_0). Gli asintoti sono ora, anziché gli assi cartesiani, le due rette di equazione $x = x_0$ e $y = y_0$. A seconda del segno di c si possono avere i due casi raffigurati qui sotto:





2. Anche un'equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [17] \tag{8}$$

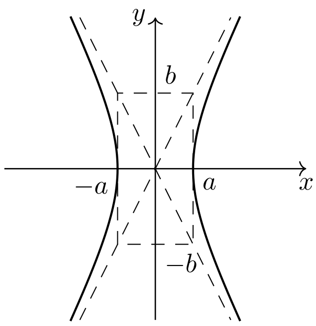
definisce un'iperbole, qui a fianco raffigurata.[18]

Si noti che, come fatto prima con l'ellisse, possiamo cercare le intersezioni con gli assi cartesiani. Ponendo $x = 0$ si ottiene $-\frac{y^2}{b^2} = 1$, che è impossibile. Quindi questo tipo di iperbole non ha intersezioni con l'asse y.

Ponendo invece $y = 0$ si ottiene $\frac{x^2}{a^2} = 1$, cioè $x^2 = a^2$, che ha per soluzioni $x = \pm a$. L'iperbole interseca l'asse x nei punti $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

Si noti che, come la figura cerca di illustrare, anche in questo caso l'iperbole ha due asintoti (le rette tratteggiate in figura), che però questa volta non sono gli assi cartesiani. Si può vedere che gli asintoti sono le rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$. [19] L'origine è il centro dell'iperbole.

L'iperbole, in questo caso, ha negli assi cartesiani due assi di simmetria.

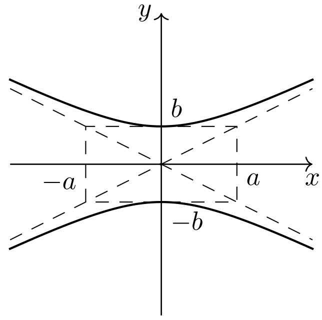


[15] I punti dell'iperbole più vicini all'origine sono i punti $(-\sqrt{c}, -\sqrt{c})$ e $(\sqrt{c}, \sqrt{c})$.
[16] I punti dell'iperbole più vicini all'origine sono ora i punti $(-\sqrt{|c|}, \sqrt{|c|})$ e $(\sqrt{|c|}, -\sqrt{|c|})$.
[17] Anche qui intendiamo a e b positivi.
[18] In effetti per dare una buona definizione di iperbole si dovrebbero dare le sue proprietà geometriche, come d'altro canto anche per le parabole e le ellissi, cioè per tutte le *coniche*. Gli studenti che alla scuola secondaria hanno studiato geometria euclidea dovrebbero aver visto queste proprietà. Qui non entro nel merito.
[19] Basta guardare la figura: la pendenza positiva dell'asintoto si trova facendo il quoziente tra variazione in ordinata e variazione in

3. Infine anche l'equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{9}$$

definisce un'iperbole, qui sotto raffigurata. Qui si dovrebbe intuire che c'è di mezzo soltanto uno scambio tra x e y (come visto con le parabole).[20]



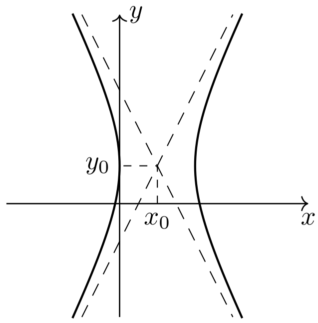
Se cerchiamo le intersezioni con gli assi cartesiani, ponendo $x = 0$ si ottiene $-\frac{y^2}{b^2} = -1$, cioè $y^2 = b^2$, da cui $y = \pm b$: l'iperbole interseca l'asse y nei punti $(0, -b)$ e $(0, b)$.

Ponendo invece $y = 0$ si ottiene $\frac{x^2}{a^2} = -1$, che è impossibile. Quindi questo tipo di iperbole non ha intersezioni con l'asse x.

Anche in questo caso l'iperbole ha due asintoti (le rette tratteggiate in figura), che non sono gli assi cartesiani, bensì come prima le rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.

Anche in questo caso l'iperbole ha negli assi cartesiani due assi di simmetria.

Possiamo avere anche con questi tipi di iperboli il "caso traslato".



Le equazioni

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$$

definiscono iperboli, analoghe a quelle viste prima, ma traslate rispetto all'origine. Quella che prima era l'origine è ora il punto (x_0, y_0). A fianco è raffigurato ad esempio il caso di sinistra.

Chiudiamo con qualche considerazione sulle possibili disequazioni.
Consideriamo una disequazione del tipo

$$xy \geq c \qquad \text{oppure} \qquad xy > c.$$

Esaminiamo i vari casi possibili:

- Se $c = 0$ le disequazioni individuano il primo e terzo quadrante (cioè l'insieme che si ottiene come unione del primo e del terzo quadrante).[21] La corrispondente figura è sotto a sinistra.
- Se $c > 0$ come visto i due rami dell'iperbole di equazione $xy = c$ stanno nel primo e terzo quadrante. L'equazione divide il piano in tre regioni illimitate. Una sola di queste contiene gli asintoti dell'iperbole: conveniamo di chiamare regione interna all'iperbole questa regione, che contiene gli asintoti. La disequazione $xy > c$ individua allora la regione esterna all'iperbole, l'unione cioè delle due regioni che non contengono gli asintoti. Nel caso che stiamo ora esaminando, cioè relativo alla disequazione $xy > c$, con c positivo, si tratta di una regione che è contenuta in parte nel primo e in parte nel terzo quadrante. La corrispondente figura è sotto al centro.

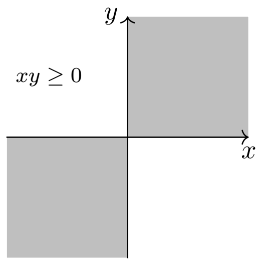
  L'unica differenza tra le due disequazioni $xy \geq c$ e $xy > c$ è ovviamente che la prima individua una regione che contiene il bordo (cioè i punti dell'iperbole), mentre la seconda individua una regione che non contiene il bordo.
- Se $c < 0$ i rami dell'iperbole di equazione $xy = c$ stanno nel secondo e quarto quadrante e la disequazione individua la regione interna all'iperbole, cioè in questo caso quella che contiene l'origine.[22] La corrispondente figura è sotto a destra.

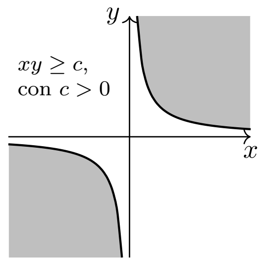
ascissa e quindi b/a. Se b è grande rispetto ad a, e quindi b/a è grande, allora l'iperbole è molto "aperta", mentre se succede il contrario l'iperbole è "schiacciata".

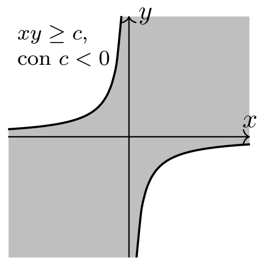
[20] Infatti l'equazione si può anche riscrivere come $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, forma in cui è evidente lo scambio tra x e y rispetto alla forma precedente.

[21] La disequazione $xy \geq 0$ è verificata in tutti i punti (x, y) del piano in cui le due componenti hanno lo stesso segno, o entrambe positive o entrambe negative, quindi nel primo oppure nel terzo quadrante. Ovviamente l'unica differenza tra $xy \geq 0$ e $xy > 0$ è che il bordo è compreso nelle soluzioni della prima ma non in quelle della seconda.

[22] Dico *in questo caso* perché si intuisce che con altri tipi di iperboli, specialmente quando ci sono traslazioni, la posizione dell'origine può non avere più lo stesso significato. Se diciamo invece "la regione che contiene il centro", possiamo usare la stessa espressione anche nei casi con traslazioni.





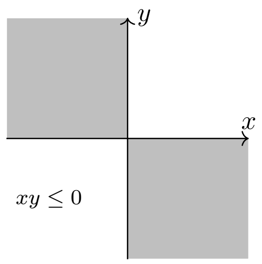


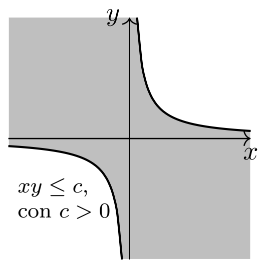
Invece con le disequazioni

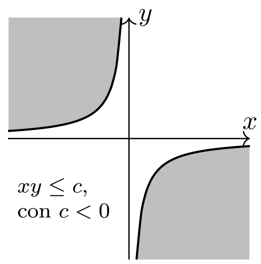
$$xy \leq c \qquad \text{oppure} \qquad xy < c$$

si ha

- Se $c = 0$ la disequazione individua il secondo e quarto quadrante.
- Se $c > 0$ l'iperbole sta nel primo e terzo quadrante e la disequazione individua la regione interna all'iperbole, cioè quella che contiene l'origine.
- Se $c < 0$ l'iperbole sta nel secondo e quarto quadrante e la disequazione individua la regione esterna all'iperbole, cioè quella che sta in parte nel secondo e in parte nel quarto quadrante.



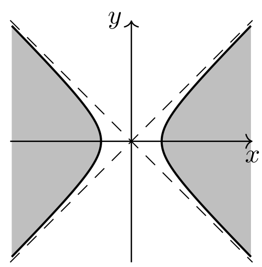




Facile intuire a questo punto come si rappresentano i casi di disequazione in cui l'iperbole è traslata.

Con gli altri tipi di iperboli si hanno questi casi.
Le disequazioni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$$

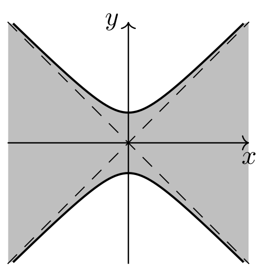


individuano la regione esterna all'iperbole, cioè quella che non contiene il centro (come nella figura a fianco), mentre le disequazioni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$$

individuano la regione interna all'iperbole, cioè quella che contiene il centro.

Con le disequazioni



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq -1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > -1$$

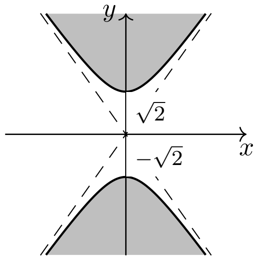
si ha la regione che contiene il centro (come nella figura a fianco), mentre infine con le disequazioni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq -1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < -1$$

si ha la regione che non contiene il centro.

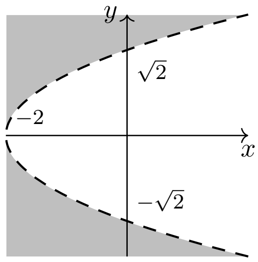
Se siamo in presenza di un'iperbole "traslata", le situazioni sono le stesse, tenendo conto della traslazione.

Non è ovviamente facile ricordare tutti questi casi. Ma c'è un trucco per capire facilmente in quale dei casi ci si trova: dopo aver disegnato l'iperbole basta verificare la disuguaglianza che abbiamo davanti in un punto qualunque, per comodità ad esempio nell'origine: se la disuguaglianza è vera, l'origine è compresa nella regione e quindi anche tutta la regione che si trova "dalla stessa parte dell'origine" rispetto all'iperbole. Se invece la disuguaglianza non è verificata nell'origine, allora si tratta dell'altra regione, cioè di quella che non contiene l'origine.



Esempio Consideriamo la disequazione $x^2 - \frac{y^2}{2} \le -1$.

L'equazione corrispondente individua un'iperbole con rami al di sopra e al di sotto dell'origine. Possiamo anche osservare che gli asintoti hanno pendenza $\pm\sqrt{2}$, quindi un po' più di 1. Dato che l'origine non soddisfa la disuguaglianza ($0 \le -1$ è falso), la regione individuata dalla disequazione è quella che sta al di sopra o al di sotto dei due rami dell'iperbole. Tale regione inoltre contiene i punti dell'iperbole, dato che la disuguaglianza è di minore o uguale.



Osservazione Il metodo qui utilizzato per stabilire quale regione soddisfa una disequazione data (cioè verificare la disequazione stessa in un punto particolare) è in realtà un metodo del tutto generale, che può essere applicato con qualsiasi tipo di equazione.

Ad esempio, con la disequazione $x - y^2 + 2 < 0$, dopo aver capito che il bordo è la parabola con asse parallelo all'asse x raffigurata a fianco, per stabilire che la regione individuata dalla disequazione è quella che sta a sinistra della parabola basta osservare che l'origine non soddisfa la disequazione stessa.

Per la scelta del punto in cui verificare la disuguaglianza l'unica avvertenza è di non andare a prendere un punto che sta sul bordo della regione, cioè un punto che soddisfi l'equazione associata. Ad esempio, con la disequazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2$, verificare la disuguaglianza stessa nell'origine non sarebbe una buona idea, dato che l'origine sta sulla circonferenza che è il bordo della regione.

Esercizio 5.1 Quale curva del piano individua l'equazione $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$? Si disegni poi la regione delle soluzioni della disuguaglianza $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} \le 1$.

Esercizio 5.2 Quale curva del piano individua l'equazione $2x^2 - y^2 = 1$? Si disegni poi la regione delle soluzioni della disuguaglianza $2x^2 - y^2 > 1$.

Esercizio 5.3 Quale curva del piano individua l'equazione $x^2 - 4y^2 = 0$? Si disegni poi l'insieme delle soluzioni dalla disuguaglianza $x^2 - 4y^2 > 0$?

Esercizio 5.4 Che curva individua l'equazione $x(y-1) = 1$? Si disegni poi l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza $x(y-1) \ge 1$ e della disuguaglianza $x(y-1) \le 0$.

Esercizio 5.5 Che curva individua l'equazione $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$? Si disegni poi l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y < 0$?

Esercizio 5.6 Quale sottoinsieme del piano soddisfa la disuguaglianza $x^2+y^2-2x+4y+5 \le 0$? E la disuguaglianza $x^2+y^2-2x+4y+5 \ge 0$? E la disuguaglianza $x^2+y^2-2x+4y+5 > 0$? E la disuguaglianza $x^2+y^2-2x+4y+5 < 0$?

6 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Basta applicare la formula: è ancora più semplice però aiutarsi con un grafico, dal quale si vede subito che l'equazione esplicita è $y = 1 - x$.

Esercizio 1.2

Si può procedere così: l'equazione esplicita della retta assegnata è $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$. Il coefficiente angolare della retta cercata è allora $m = -\frac{2}{3}$ e quindi l'equazione cercata è $y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$.

Esercizio 1.3

Si può procedere così: l'equazione esplicita è $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. Il coefficiente angolare della retta perpendicolare è allora $m = 3$ e quindi l'equazione cercata è $y - 1 = 3(x - 2)$.

Esercizio 1.4

La disequazione equivale alla $2y > 3x + 4$ e questa alla $y > \frac{3}{2}x + 2$. L'insieme è il semipiano che sta al di sopra della retta di equazione $y = \frac{3}{2}x + 2$, retta di pendenza $\frac{3}{2}$ e di altezza all'origine 2 (quindi passa per il punto $(0, 2)$). Tale retta non fa parte dell'insieme in questione.

Esercizio 2.1

La curva di equazione $x^2 + 2y - 1 = 0$ non passa per l'origine, dato che il punto $(0, 0)$ non soddisfa l'equazione stessa (infatti sostituendo i valori risulta $-1 = 0$). La curva passa invece per il punto $(2, -\frac{3}{2})$, dato che tale punto soddisfa l'equazione stessa.
Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y e concavità rivolta verso il basso: l'equazione esplicita è $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ e il vertice è nel punto $(0, \frac{1}{2})$. La parabola incontra l'asse x nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

Esercizio 2.2

La curva in questione non passa per l'origine, dato che il punto $(0, 0)$ non soddisfa l'equazione data.
Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse x e concavità rivolta verso destra: l'equazione esplicita è $x = \frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{3}$ e il vertice è nel punto $(-\frac{1}{3}, 0)$. La parabola incontra l'asse y nei punti $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Un punto del primo quadrante che sta sulla curva è ad esempio il punto $(1, \sqrt{2})$.

Esercizio 2.3

(a) La disequazione equivale alla $y < -2x^2 + 3$ e individua la parte di piano che sta al di sotto della parabola di equazione $y = -2x^2 + 3$, parabola con asse parallelo all'asse y, concavità verso il basso e con vertice nel punto $(0, 3)$. La parabola non fa parte della regione (vedi figura in appendice alla fine della dispensa).
(b) La disequazione equivale alla $y \geq x^2 + x - 2$ e individua la parte di piano che sta al di sopra della parabola di equazione $y = x^2 + x - 2$, parabola con asse parallelo all'asse y, concavità verso l'alto e che incontra l'asse x nei punti $(-2, 0)$ e $(1, 0)$. La parabola fa parte della regione (vedi figura in appendice).
(c) L'equazione $2x - y^2 + 4 = 0$, cioè $x = \frac{1}{2}y^2 - 2$, definisce una parabola con asse parallelo all'asse x, concavità rivolta verso destra, vertice nel punto $(-2, 0)$ e passante per i punti $(0, -2)$ e $(0, 2)$. La disuguaglianza individua pertanto la regione che si trova alla destra di tale parabola, bordo compreso (vedi figura in appendice).

Esercizio 2.4

a) Con l'equazione $x^2 + 4x + 4 = 0$ attenzione a non cadere nel tranello. Anche se c'è un quadrato qui le parabole non c'entrano. L'equazione $x^2 + 4x + 4 = 0$ equivale alla $(x + 2)^2 = 0$, che è verificata se e solo se $x = -2$. Questa definisce la retta (verticale) di ascissa -2.
b) L'equazione $y^2 - 4y + 3 = 0$ ha per soluzioni $y = 3$ oppure $y = 1$, quindi la curva del piano che viene individuata è formata da una coppia di rette (orizzontali) di ordinate 1 e 3. I due grafici sono riportati alla fine nell'appendice.

Esercizio 3.1

L'equazione è $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

Esercizio 3.2

L'equazione individua la circonferenza di centro il punto $(0, -1)$ e raggio $r = \sqrt{3}$.
La disequazione proposta individua la regione interna alla circonferenza, bordo compreso (quindi la regione è il cerchio di centro il punto $(0, -1)$ e raggio $r = \sqrt{3}$). Si osservi che la regione si estende, sulle x, da $-\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$ e, sulle y, da $-1 - \sqrt{3}$ a $-1 + \sqrt{3}$ (vedi figura in appendice).

Esercizio 3.3

Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 - x + 4y = 0$ e completiamo i quadrati. Si ha

$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 = \tfrac{1}{4} + 4 \quad \text{e cioè} \quad (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \tfrac{17}{4}.$$

Si tratta quindi della circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, -2)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$. Si noti che la circonferenza passa per l'origine. La disuguaglianza individua la parte interna a tale circonferenza, bordo escluso (vedi figura in appendice).

Esercizio 4.1

L'equazione individua l'ellisse di centro il punto $(0, 1)$ e semiassi $a = 1/\sqrt{2}$ (sulle x) e $b = 1/\sqrt{3}$ (sulle y). L'ellisse si estende quindi, sulle x, da $-1/\sqrt{2}$ a $1/\sqrt{2}$ e, sulle y, da $1 - 1/\sqrt{3}$ a $1 + 1/\sqrt{3}$.
La disequazione proposta individua la regione esterna all'ellisse e non comprende i punti che stanno sull'ellisse (vedi figura in appendice).

Esercizio 4.2

Consideriamo l'equazione $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$. Completando il quadrato sulle y abbiamo

$$x^2 + 4y^2 - 8y + 4 = 4 \quad \text{cioè} \quad x^2 + (2y-2)^2 = 4 \quad \text{cioè} \quad \tfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1.$$

L'equazione individua quindi l'ellisse di centro il punto $(0,1)$ e semiassi $a = 2$ (sulle x) e $b = 1$ (sulle y). Le soluzioni riempiono la parte interna all'ellisse. Il bordo, cioè l'ellisse, è escluso (figura in appendice).

Esercizio 5.1

L'equazione individua un'iperbole, di asintoti le rette di equazione $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$. I due rami dell'iperbole incontrano l'asse y (ad altezza $\pm\sqrt{2}$) e non l'asse x. La disuguaglianza individua la regione, limitata dall'iperbole, che contiene l'origine, bordo compreso (figura in appendice).

Esercizio 5.2

L'equazione individua un'iperbole, di asintoti le rette di equazione $y = \pm\sqrt{2}x$. I due rami dell'iperbole incontrano l'asse x (nei punti di ascissa $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$). La disuguaglianza individua la regione, limitata dall'iperbole, che non contiene l'origine. Il bordo è escluso (figura in appendice).

Esercizio 5.3

L'equazione $x^2 - 4y^2 = 0$ equivale alla $(x-2y)(x+2y) = 0$, che quindi a sua volta equivale a $x - 2y = 0$ oppure $x + 2y = 0$. Si tratta di una coppia di rette, di equazione esplicite $y = \frac{x}{2}$ e $y = -\frac{x}{2}$.
La disuguaglianza $x^2 - 4y^2 > 0$ equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 2y > 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 2y < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y < \frac{x}{2} \\ y > -\frac{x}{2} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y > \frac{x}{2} \\ y < -\frac{x}{2}. \end{cases}$$

La regione è quella compresa tra le due rette e che contiene l'asse x (per la verità non lo contiene tutto, dato che, essendo la disuguaglianza stretta, l'origine non è soluzione, come non lo sono i punti che stanno sulle due rette) (figura in appendice).

Esercizio 5.4

a) Si tratta di un'iperbole di centro il punto $(0,1)$ e asintoti le rette di equazione $x = 0$ e $y = 1$. Queste rette dividono il piano in quattro quadranti. I rami dell'iperbole occupano i quadranti in alto a destra e in basso a sinistra.
La disuguaglianza $x(y-1) \geq 1$ individua la regione, limitata dall'iperbole, che non contiene il centro. Il bordo è compreso (figura in appendice).
b) La disuguaglianza $x(y-1) \leq 0$ individua invece l'unione di due quadranti: quello in alto a sinistra e quello in basso a destra dei quattro in cui resta diviso il piano dagli asintoti dell'iperbole. Il bordo è compreso (figura in appendice).

Esercizio 5.5

Dividendo tutto per 2 l'equazione si può riscrivere come $x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{2}y = 0$ ed è candidata ad individuare una circonferenza. Completando i quadrati si ottiene

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{9}{16} - 1 - \tfrac{9}{16} = 0 \quad \text{cioè} \quad (x-1)^2 + (y + \tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{25}{16}.$$

Quindi si tratta della circonferenza di centro $(1, -\frac{3}{4})$ e raggio $r = \frac{5}{4}$ (e si noti che la circonferenza passa per l'origine).
La disequazione individua la regione interna alla circonferenza, bordo escluso. La regione si estende, sulle x, da $1 - \frac{5}{4}$ a $1 + \frac{5}{4}$ e, sulle y, da $-\frac{3}{4} - \frac{5}{4}$ a $-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$ (figura in appendice).

Esercizio 5.6

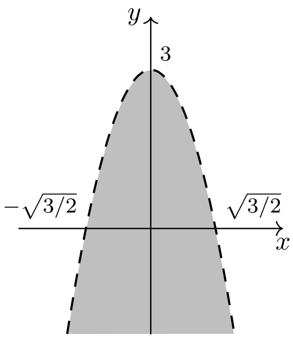
Occorre intanto completare i quadrati nell'equazione corrispondente:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 5 + 5 = 0 \quad \text{cioè} \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0, \text{che individua il punto } (1,-2).$$

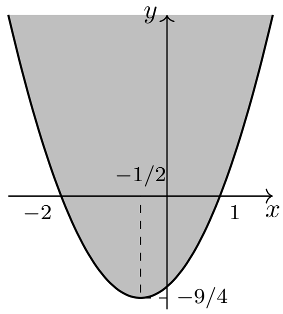
a) La disequazione con il $\leq$ individua allora il solo punto $(1,-2)$. b) La disequazione con il $\geq$ individua tutto il piano.
c) la disequazione con il $>$ tutto il piano ad esclusione del punto $(1,-2)$. d) la disequazione con il $<$ l'insieme vuoto.

Appendice – Grafici

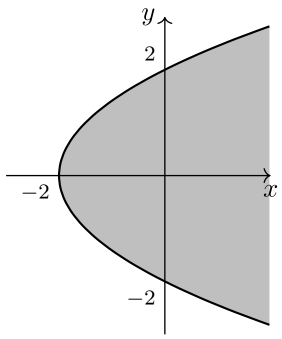
Questi sono i grafici richiesti, con l'indicazione del relativo esercizio.



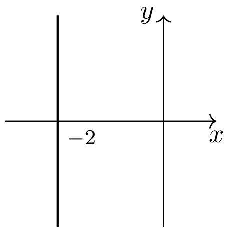
Esercizio 2.3a



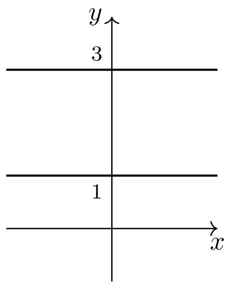
Esercizio 2.3b



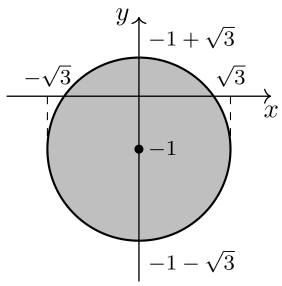
Esercizio 2.3c



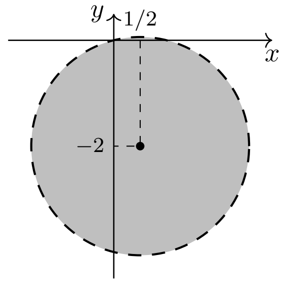
Esercizio 2.4a



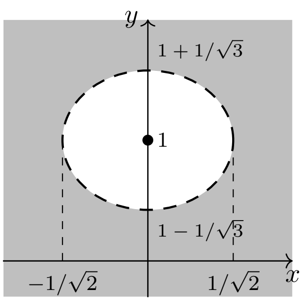
Esercizio 2.4b



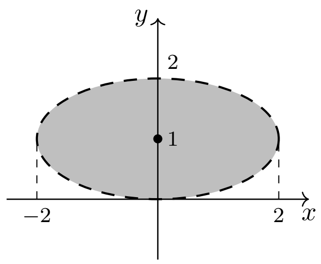
Esercizio 3.2



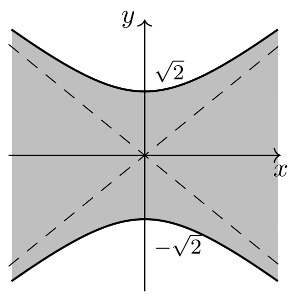
Esercizio 3.3



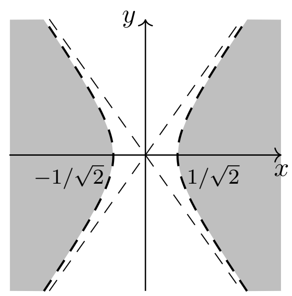
Esercizio 4.1



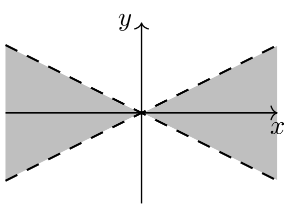
Esercizio 4.2



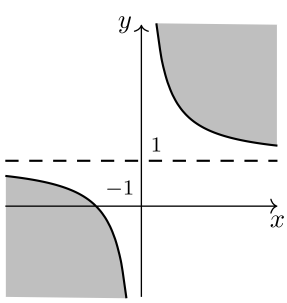
Esercizio 5.1



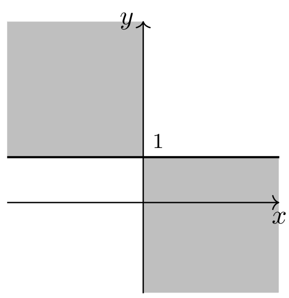
Esercizio 5.2



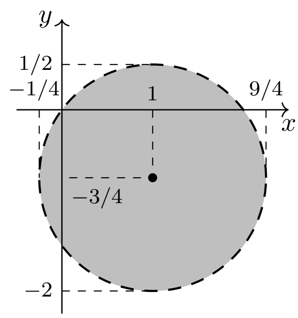
Esercizio 5.3



Esercizio 5.4a



Esercizio 5.4b



Esercizio 5.5