II-1 Funzioni

Indice

In questa dispensa affrontiamo il concetto di funzione, nella sua generalità. Successivamente, nelle dispense che seguono, ci concentreremo in particolare sulle funzioni reali.

1 Il concetto di funzione

Qui definiamo un concetto assolutamente fondamentale in matematica: il concetto di funzione.

Siano X e Y due insiemi. Una **funzione** f da X a Y è una legge, una corrispondenza che associa **ad ogni elemento di** X **uno ed un solo elemento di** Y. Quindi per ogni $x \in X$ esiste uno ed un solo $y \in Y$ associato ad x. Tale y si indica con il simbolo $f(x)$ e si può chiamare il *valore* della funzione f in x.

Formalmente si scrive $f : X \to Y$ per dire appunto che

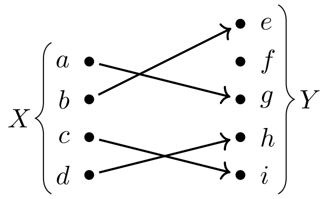
$$\forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y \;:\; y = f(x)$$

(la scrittura si legge: *per ogni x che appartiene ad X esiste un unico y in Y tale che y è uguale ad $f(x)$*).

L'insieme X di dice il *dominio della funzione* f, l'insieme Y si dice il *codominio della funzione* f. Si dice anche che la funzione f *è da X ad Y*, oppure *definita in X a valori in Y*.

Se voglio definire una funzione particolare devo specificare il suo dominio, il suo codominio e la legge di corrispondenza. Ad esempio, se scrivo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = n + 1$, intendo considerare la funzione f, definita in $\mathbb{N}$, a valori in $\mathbb{N}$, che associa ad ogni numero naturale il numero stesso aumentato di uno.

Per indicare una funzione in generale si può scrivere semplicemente f; se c'è la necessità di indicarne dominio e codominio scrivo $f : X \to Y$. A volte si usano le notazioni $y = f(x)$ oppure $x \mapsto f(x)$, che però non specificano dominio e codominio; x si chiama l'*argomento* della funzione f e $f(x)$ è detto a volte anche l'*immagine* di x attraverso la funzione f. Nella figura a fianco è rappresentata una funzione dall'insieme $X = \{a, b, c, d\}$ all'insieme $Y = \{e, f, g, h, i\}$.



Qualche esempio:

- La scrittura $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ definisce la funzione f dall'insieme dei numeri naturali nell'insieme dei numeri naturali che associa ad ogni naturale il suo doppio.

- La scrittura $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(m, n) = m + n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ definisce la funzione f dall'insieme delle coppie di numeri naturali nell'insieme dei numeri naturali che associa ad ogni coppia la somma delle due componenti.

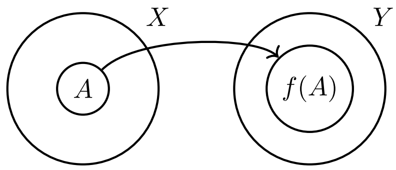
- Un altro esempio è la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero dei divisori di n.[1] In questo caso non è così semplice la formulazione della legge di corrispondenza.

Altre definizioni importanti. Supponiamo di avere una funzione $f : X \to Y$.

[1] Accordiamoci sul fatto che 1 non è un divisore di alcun numero naturale e che nessun numero è divisore di se stesso. Ecco perché ho scritto che il codominio è $\mathbb{N}_0$, cioè i naturali con lo zero: infatti $f(1) = 0$. Abbiamo anche, per capire come funziona, $f(2) = 0$ (2 è divisibile per 1 e per se stesso), $f(3) = 0$ e così per tutti i numeri primi, che sono appunto divisibili solo per 1 e per se stessi. Invece $f(4) = 1$ (il 2), $f(6) = 2$ (il 2 e il 3), $\ldots$, $f(100) = 7$ (2,4,5,10,20,25,50), $\ldots$. Questa funzione ha valore zero sui numeri primi e solo su questi.

Definizione Se $A \subset X$ si chiama *immagine di A attraverso f* l'insieme

$$f(A) = \big\{ f(a) \ : \ a \in A \big\}.$$ [2]



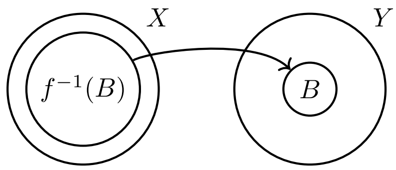
Osservazioni L'immagine di A è quindi l'insieme degli elementi $f(a)$, al variare di a nell'insieme A; si tratta dell'insieme dei valori che la funzione può assumere in corrispondenza degli elementi dell'insieme A ed è chiaramente un sottoinsieme di Y, quindi $f(A) \subset Y$.

Si osservi, come caso particolare, che $f(\{x\}) = \{f(x)\}$, per ogni $x \in X$, cioè l'immagine dell'insieme $\{x\}$ è l'insieme il cui unico elemento è $f(x)$.

Nell'altro caso particolare $A = X$ l'immagine di X attraverso f, cioè $f(X)$, è detta anche l'*immagine di f*. Si tratta dell'insieme di tutti i valori che la funzione può assumere. Non è detto che tale insieme sia tutto l'insieme Y.

Definizione Se $B \subset Y$ si chiama *controimmagine (o immagine inversa) di B attraverso f* l'insieme

$$f^{-1}(B) = \big\{ x \in X \ : \ f(x) \in B \big\}.$$



Osservazione È tradizionalmente un concetto difficile per molti studenti. La controimmagine di un insieme B (B è un sottoinsieme di Y) è quindi l'insieme degli elementi di X la cui immagine sta in B. Ovviamente quindi $f^{-1}(B) \subset X$.

Nel caso particolare $B = Y$ la controimmagine di Y, cioè $f^{-1}(Y)$ è uguale ad X, dato che tutti gli elementi di X hanno corrispondente in Y. Si noti anche che ovviamente la controimmagine di $\{f(x)\}$ contiene x, ma in generale essa può contenere anche altri elementi oltre ad x, dato che possono esserci altri elementi che hanno per immagine $f(x)$. Si rifletta infatti che una cosa è dire che ad ogni $x \in X$ corrisponde un solo $f(x)$ (e tutte le funzioni hanno questa proprietà), altra cosa è dire che dato un $y \in Y$ esso sia il corrispondente di un solo $x \in X$.

Qualche esempio su immagine e controimmagine.

- Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = 2n$, l'immagine della funzione (cioè l'immagine di tutto il dominio, come abbiamo visto) è l'insieme dei numeri naturali pari. L'immagine dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari minori o uguali a 10 e possiamo scrivere quindi $f(A) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. L'immagine dei naturali dispari è ancora l'insieme dei naturali pari. Come si vede, l'immagine di una funzione, non è necessariamente uguale al codominio.

  La controimmagine dell'insieme $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ è l'insieme $\{5, 6, 7\}$ e scriveremo quindi $f^{-1}(B) = \{5, 6, 7\}$. La controimmagine dell'insieme dei numeri dispari è l'insieme vuoto.

- Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = n^2$, l'immagine dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ è l'insieme $\{1, 4, 9, 16, 25\}$. L'immagine della funzione è evidentemente l'insieme dei naturali che sono quadrati, quindi anche qui solo una parte dei naturali.

  La controimmagine dell'insieme $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \le 100\}$ è l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \le 10\}$. La controimmagine dell'insieme dei numeri pari è l'insieme dei numeri pari, mentre la controimmagine dei dispari è data dai dispari: questo perché il quadrato di un numero pari è un numero pari, mentre il quadrato di un numero dispari è un numero dispari.

- Data la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(m, n) = m + n$, l'immagine dell'insieme

  $$A = \big\{ (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) \big\} \text{ è l'insieme } \{2, 3, 4\}.$$

  L'immagine della funzione è l'insieme $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. [3]

  La controimmagine dell'insieme $B = \{10\}$ è l'insieme

  $$\big\{ (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1) \big\}.$$

Vediamo ora due proprietà che possono avere le funzioni.

[2] Quindi, se $x \in X$ con $f(x)$ indichiamo l'immagine di x attraverso f, ed è un *elemento* di Y; se $A \subset X$, con $f(A)$ indichiamo l'immagine di A attraverso f, ed è un *sottoinsieme* di Y.

[3] Ricordo che $\setminus$ è il simbolo di differenza tra insiemi: $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ è l'insieme dei naturali diversi da 1.

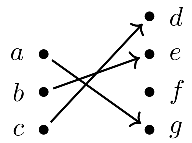
Definizioni Diciamo che la funzione $f : X \to Y$ è *iniettiva* se ad elementi distinti di X associa elementi distinti di Y. Formalmente, f è iniettiva se

$$\forall t, z \in X \;,\; t \neq z \;\Rightarrow\; f(t) \neq f(z).$$

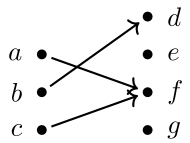
Diciamo invece che la funzione $f : X \to Y$ è *suriettiva* se la sua immagine coincide con il codominio. Formalmente, f è suriettiva se

$$f(X) = Y.$$

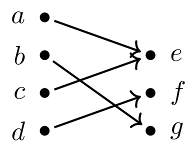
Diciamo infine che f è *biiettiva* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.



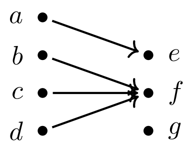
funzione iniettiva



funzione non iniettiva



funzione suriettiva



funzione non suriettiva

A commento delle rappresentazioni qui sopra, la prima da sinistra illustra una funzione iniettiva poiché a elementi distinti associa elementi distinti. La seconda non è iniettiva perché gli elementi a e c hanno la stessa immagine e. La terza è suriettiva perché tutti gli elementi del codominio, che è $\{e, f, g\}$, sono immagine di qualche elemento del dominio. Infine la quarta non è suriettiva perché l'elemento e del codominio non è immagine di alcun elemento del dominio. Possiamo anche notare che solo la prima è iniettiva e solo la terza è suriettiva.

Osservazioni Una funzione è iniettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'immagine inversa di $\{y\}$ contiene *al più* un elemento. Questo significa infatti che non ci sono elementi in X che hanno la stessa immagine.

Una funzione è suriettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'immagine inversa di $\{y\}$ contiene *almeno* un elemento. Questo significa infatti che ogni elemento di Y è immagine di qualche elemento di X e quindi che $f(X) = Y$.

Quindi una funzione è biiettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'immagine inversa di $\{y\}$ contiene esattamente un (*uno e uno solo*) elemento.

Vediamo qualche esempio con le funzioni che abbiamo già usato prima.

- Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = 2n$, essa è iniettiva, dato che numeri naturali distinti hanno ovviamente immagini distinte. La funzione non è suriettiva dato che, come già osservato, la sua immagine è formata dai soli numeri pari, che non sono tutti i numeri naturali. Quindi questa funzione non è biiettiva.
- Anche la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = n^2$, è iniettiva ma non suriettiva.
- La funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(m, n) = m + n$, non è né iniettiva, né suriettiva. Infatti le due coppie $(1, 2)$ e $(2, 1)$ hanno la stessa immagine 3. [4] La funzione non è nemmeno suriettiva dato che, come già osservato, l'immagine è $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ e non tutto $\mathbb{N}$.
- Un esempio di funzione biiettiva è invece la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, con $f(z) = z + 1$. Essa è iniettiva dato che aggiungendo 1 a due numeri interi distinti si ottengono interi distinti. Essa è anche suriettiva dato che l'immagine è tutto l'insieme $\mathbb{Z}$. [5]

Osservazione Se una funzione $f : X \to Y$ non è suriettiva, c'è un modo abbastanza semplice e "indolore" per "renderla suriettiva". Basta modificare quello che viene dichiarato il suo codominio, sostituendolo con l'immagine della funzione f, cioè quello che abbiamo indicato con $f(X)$. Infatti, se scriviamo $f : X \to f(X)$, senza modificare nient'altro, avremo certamente una funzione suriettiva, dato che ora, per la definizione data, l'immagine coincide con il codominio. Così, ad esempio, la funzione $f(n) = 2n$ sarà suriettiva se come suo codominio dichiaro l'insieme dei naturali pari.

Esempi Chiudo questa sezione con qualche esempio di funzioni che per alcuni aspetti hanno qualche elemento di novità. Lo studente ricordi questi esempi perché nel corso di Statistica, più precisamente nella definizione di probabilità, queste situazioni si presentano.

Il concetto di funzione è stato definito in questa dispensa nella sua generalità, e intendo che una funzione può essere definita in un *qualunque* insieme (e avere valori in un *qualunque* insieme), non soltanto in un insieme di numeri ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ...).[6]

[4] Si ricordi che la funzione è iniettiva se le immagini sono distinte *per ogni* scelta di valori distinti nel dominio. Quindi basta trovare un solo controesempio, cioè un caso in cui questo non si verifica, per provare che la funzione non è iniettiva.

[5] Per provare questo basta ad esempio dimostrare che, dato un qualunque numero intero t esiste almeno una controimmagine, cioè un intero z tale che $z + 1 = t$. Tale intero è ovviamente $t - 1$. Si noti che la stessa legge di corrispondenza definita in $\mathbb{N}$ anziché in $\mathbb{Z}$ (cioè la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = n + 1$) è iniettiva ma non suriettiva!

[6] Così potremmo pensare ad esempio ad una funzione definita sull'insieme dei residenti nella provincia di Vicenza, funzione ad esempio che associa a ciascuno la sua data di nascita. Tale funzione è definita su un insieme non numerico e ha valori in un insieme non numerico, almeno non nel senso di numeri naturali, interi, ...

Qui voglio presentare il caso di una funzione definita sui sottoinsiemi di un insieme dato. Consideriamo un insieme qualunque A. Possiamo definire una funzione su alcuni sottoinsiemi di A (o su tutti i sottoinsiemi di A, cioè sull'insieme della parti di A). Ad esempio, sia A un insieme *finito* (cioè con un numero finito di elementi). Definiamo la funzione

$$\varphi : \mathscr{P}A \to \mathbb{N}_0 \quad \text{definita da} \quad \varphi(B) = \text{ numero di elementi di } B.$$

La funzione φ associa quindi ad ogni sottoinsieme B di A il numero di elementi del sottoinsieme. Si noti che l'ipotesi che A sia finito è importante, altrimenti saremmo in difficoltà nel dare un valore ai sottoinsiemi infiniti (si potrebbe anche scrivere: numero di elementi $= +\infty$, ma $= +\infty$ non è un numero). Si noti anche che sono costretto ad utilizzare come codominio l'insieme $\mathbb{N}_0$, anziché l'insieme $\mathbb{N}$. Perché?[7]

Ci si potrebbe chiedere se questa funzione φ è iniettiva o suriettiva, ma lo lascio come facile esercizio a chi legge.

Altro esempio potrebbe essere il seguente. Definiamo la funzione

$$\psi : \mathscr{P}\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \quad \text{definita da} \quad \psi(B) = \begin{cases} \min B & \text{se } B \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } B = \emptyset, \end{cases}$$

intendendo con $\min B$, ma è facile intuirlo, il minimo dell'insieme B.[8] Anche qui lascio allo studente l'esercizio di stabilire se questa funzione ψ è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 1.1 Data la funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ , con } f(n) = n^2 + 1 \text{ , per ogni } n \in \mathbb{N}, \text{ si determini}$$

(a) l'immagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$;

(b) l'immagine di f;

(c) l'insieme $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$, cioè la controimmagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$.

(d) La funzione f è biiettiva?

Esercizio 1.2 Data la funzione

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ , con } f(z) = z^2 + 1 \text{ , per ogni } z \in \mathbb{Z}, \text{ si determini}$$

(a) l'immagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$;

(b) l'insieme $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$, cioè la controimmagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$.

(c) È vero che $f(\mathbb{N}) = f(\mathbb{Z})$? La funzione f è biiettiva?

Esercizio 1.3 Data la funzione

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ , con } f(z) = |z| - 10 \text{ , per ogni } z \in \mathbb{Z},$$

si determini

(a) l'immagine dell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$;

(b) l'immagine di f;

(c) l'insieme $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$, cioè la controimmagine dell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$;

(d) l'insieme $f^{-1}(\mathbb{N})$, cioè la controimmagine dell'insieme $\mathbb{N}$.

Esercizio 1.4 Data la funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ , con } f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

si determini

(a) l'immagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$;

(b) la controimmagine dell'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$.

[7] Dato che la funzione φ è definita sull'insieme delle parti di A, cioè su ogni sottoinsieme di A, e che tra i sottoinsiemi di A c'è anche l'insieme vuoto, che ha zero elementi, non potrei usare $\mathbb{N}$, che non contiene lo zero.

[8] Qui per la verità do per scontato che ogni sottoinsieme non vuoto di numeri naturali abbia minimo, cioè un elemento minore o uguale a tutti gli altri.

2 Funzione composta

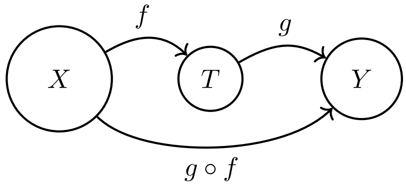
Siano X, T e Y tre insiemi e siano f e g due funzioni, con

$$f : X \to T \qquad \text{e} \qquad g : T \to Y.$$

Prima di dare una definizione formale di funzione composta, cerco di dare l'idea. Dato un qualunque elemento $x \in X$, applicando la funzione f possiamo ottenere l'elemento $f(x) \in T$. A questo ora possiamo applicare la funzione g, ottenendo così l'elemento $g(f(x)) \in Y$. Pertanto veniamo così a definire una funzione che ad ogni $x \in X$ associa un elemento in Y. Essa prende il nome di funzione composta di f e g e si indica col simbolo $g \circ f$. Si noti l'ordine in cui vengono scritte le due funzioni: scrivendo $g \circ f$ (che equivale a $g(f)$) vuol dire che prima opera f e poi opera g.

Ecco la definizione formale: si chiama *funzione composta di f e g* la funzione $g \circ f : X \to Y$, definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ , per ogni } x \in X.$$



Osservazioni Si noti che, nella funzione composta $g \circ f$, i valori attraverso la prima (nel nostro caso la f) diventano gli argomenti della seconda (la g). Il simbolo "$\circ$" è appunto il simbolo di composizione tra funzioni.

Si noti ancora che nella nostra definizione il codominio della prima funzione (la f) coincide col dominio della seconda (la g). La cosa è rilevante: questo consente di scrivere $g(f(x))$, dato che $f(x)$ appartiene certamente al dominio di g. Invece potrebbe non avere significato la scrittura $f(g(x))$, dato che $g(x) \in Y$ e Y potrebbe non avere nulla a che fare con X, che è il dominio di f. Quindi l'ordine di composizione delle funzioni è fondamentale. Possiamo dire che la composizione tra funzioni è un esempio di operazione (tra funzioni) non commutativa.

Vediamo ora qualche esempio sulla composizione.

- Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = n + 1$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $g(n) = n^2$.

  Possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$, che avrà per dominio $\mathbb{N}$ e per codominio $\mathbb{N}$. La sua espressione è per definizione
  $$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = (n + 1)^2 \text{ , per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
  In questo caso si può costruire anche la funzione composta $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = n^2 + 1$, anch'essa da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$. Si noti che le due espressioni delle funzioni composte non sono uguali.

- Siano $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, con $f(z) = z^2 + 1$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, con $g(n) = (-1)^n$.

  Possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$, che avrà per dominio $\mathbb{Z}$ e per codominio $\mathbb{Z}$. La sua espressione è per definizione
  $$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = (-1)^{f(z)} = (-1)^{z^2+1} \text{ , per ogni } z \in \mathbb{Z}.$$
  Anche in questo caso possiamo costruire pure la funzione composta $f \circ g$, dato che il codominio di g e il dominio di f coincidono. La funzione composta $f \circ g$ avrà per dominio $\mathbb{N}$ e per codominio $\mathbb{N}$. La sua espressione è per definizione
  $$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = (g(n))^2 + 1 = ((-1)^n)^2 + 1 = (-1)^{2n} + 1 = 2 \text{ , per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
  Come si vede $g \circ f$ e $f \circ g$ sono due funzioni diverse, sia perché sono definite tra insiemi diversi, sia perché hanno espressioni diverse ($g \circ f$ vale 1 o -1, mentre $f \circ g$ vale sempre 2).

  Quindi in generale ricordare che primo: non è detto si possa fare la composizione in entrambi i sensi e secondo: quando anche si può fare, può portare a funzioni completamente diverse tra loro.

- Indichiamo con $\mathbb{P}$ l'insieme dei naturali pari, cioè $\{2, 4, 6, \ldots\}$ e siano $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, con $f(p) = \frac{p^2}{2}$ e $g : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, con $g(p) = \frac{p}{2}$. [9]

[9] Le due definizioni di f e g meritano un commento, per capire che sono entrambe "ben poste". Se p è un numero pari, allora p^2 è divisibile per 4 e di conseguenza $\frac{p^2}{2}$ è divisibile per 2, cioè è pari (e quindi posso scrivere $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$). Per quanto riguarda la funzione g, se p è pari, allora $\frac{p}{2}$ è certamente un numero naturale (non necessariamente pari) e quindi posso scrivere $g : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$. Si rifletta sul fatto che occorre sempre chiedersi se una data definizione sia ben posta, in quanto potrebbe sfuggire qualche "dettaglio" che invece la rende priva di senso. Un esempio di definizione "mal posta" è $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = \frac{n}{2}$: infatti, se n è dispari, $\frac{n}{2}$ non è un numero naturale.

Possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$, che avrà per dominio $\mathbb{P}$ e per codominio $\mathbb{N}$. La sua espressione è per definizione

$$(g \circ f)(p) = g(f(p)) = \frac{p^2/2}{2} = \frac{p^2}{4} \text{ , per ogni } p \in \mathbb{P}.$$

Non è invece possibile costruire la funzione composta $f \circ g$. Possiamo constatarlo in due modi. Il primo è molto semplice: consideriamo $p = 2$ e cerchiamo di calcolare $(f \circ g)(2) = f(g(2))$. Dato che $g(2) = 1$, non possiamo calcolare $f(1)$ in quanto 1 non è pari.

Il secondo modo è forse più generale: dato che $g(p) = \frac{p}{2}$, $f(g(p))$ avrebbe espressione $f(\frac{p}{2}) = \frac{(p/2)^2}{2} = \frac{p^2/4}{2} = \frac{p^2}{8}$, ma se p è pari non necessariamente p^2 è divisibile per 8 e quindi in qualche caso la f non la posso calcolare.

- Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, con $f(n) = (-1)^n$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, con $g(z) = z^{z+1}$. [10]

  Possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$, che avrà per dominio $\mathbb{N}$ e per codominio $\mathbb{Q}$. La sua espressione è per definizione

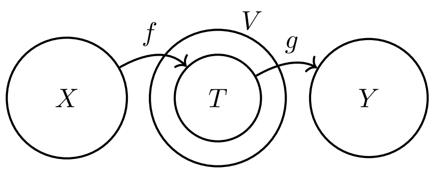
  $$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = [f(n)]^{f(n)+1} = [(-1)^n]^{(-1)^n+1} \text{ , per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

  Possiamo vedere facilmente che, per n pari $(g \circ f)(n) = 1^{1+1} = 1$ e per n dispari $(g \circ f)(n) = (-1)^{-1+1} = 1$. Quindi la funzione composta è la funzione che vale 1 per ogni numero naturale.

  In questo caso non si può costruire la funzione composta $f \circ g$, dato che il codominio della g è l'insieme dei numeri razionali, mentre il dominio di f è l'insieme dei naturali.

  Possiamo anche osservare che l'espressione della funzione composta $f \circ g$ si può formalmente scrivere, ed è $(f \circ g)(z) = (-1)^{z^{z+1}}$, ma che tale scrittura può perdere di significato: si pensi ad esempio al suo significato per $z = -2$.

Osservazione Riflettendo sulla definizione di funzione composta si può osservare che essa può essere definita in una situazione leggermente più generale, quella in cui il codominio della prima funzione è *contenuto* nel dominio della seconda.



Siano allora $f : X \to T$ e $g : V \to Y$ e sia $T \subset V$.
La funzione $g \circ f : X \to Y$, definita come prima da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, è la funzione composta di f e g.
Questo può essere utile in alcuni casi per definire la funzione composta in questa situazione più generale. Ad esempio, con le funzioni

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \text{ con } f(z) = 2z + 1 \text{ e } g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \text{ con } g(z) = 2^{|z|},$$

si può certamente costruire la funzione composta $g \circ f$, con dominio $\mathbb{Z}$ e codominio $\mathbb{N}$ ed espressione

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = 2^{|f(z)|} = 2^{|2z+1|} \text{ , per ogni } z \in \mathbb{Z}.$$

Ma tenendo in considerazione quanto detto poco fa possiamo anche costruire la funzione composta $f \circ g$, con dominio $\mathbb{Z}$ e codominio $\mathbb{Z}$ ed espressione

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = 2g(z) + 1 = 2 \cdot 2^{|z|} + 1 = 2^{|z|+1} + 1 \text{ , per ogni } z \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2.1 Date le funzioni

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \text{ , con } f(z) = z^2 + 2$$

e

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ , con } g(n) = 2n + 1,$$

si scrivano le espressioni delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$;

Esercizio 2.2 Date le funzioni

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ , con } f(z) = |z|$$

e

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ , con } g(t) = t^2,$$

(a) si scrivano le espressioni delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$; le due funzioni coincidono?

(b) Qual è l'immagine dell'insieme $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ attraverso le due funzioni composte?

(c) Qual è la controimmagine dell'insieme $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ attraverso le due funzioni composte?

[10] Si osservi che la potenza z^{z+1} è sempre definita ed è un numero razionale. Ad esempio si ha $g(0) = 0^1 = 0$, $g(-1) = (-1)^0 = 1$ e $g(-2) = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$.

3 Funzione inversa

Il concetto di funzione inversa di una data funzione f è forse abbastanza intuitivo. Se la f è definita in X a valori in Y, la sua funzione inversa è un'altra funzione, definita invece nel codominio Y e con valori in X; non solo, ma se la f associa ad un qualunque $x \in X$ il valore $f(x)$ nell'insieme Y, allora l'inversa deve associare a questo $f(x)$ di nuovo l'elemento x. Questa è in effetti l'idea.

La domanda importante che ci si deve porre subito è se tutte le funzioni abbiano una funzione inversa, se cioè l'inversione sia una cosa "automatica" che si può fare con tutte le funzioni.

Ci si rende conto abbastanza facilmente che non è così. Restando ancora sul terreno dell'intuitivo, si pensi ad esempio ad una funzione che non è iniettiva, che cioè associa a due elementi diversi x_1, x_2 dell'insieme X lo stesso valore $y \in Y$. Si capisce che, nel cercare una funzione che da Y ci riporta in X avremo difficoltà nell'associare a questo y un valore, dato che dovremo scegliere tra x_1 e x_2. E non possiamo dire: scegliamo ad esempio x_1, e x_2 lo assoceremo a qualcos'altro, dato che nessun altro valore di Y veniva associato ad x_2 (si ricordi che una funzione associa agli elementi del dominio *un solo* valore nel codominio).

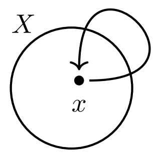
Ecco, così ragionando, abbiamo anche intuito la condizione affinché una funzione possa avere una funzione inversa: la funzione deve essere *iniettiva*.

Per la verità occorrerebbe anche un'altra proprietà, ma abbiamo già visto che questa in pratica si può sempre avere con un semplice espediente. Se la funzione f non è suriettiva significa che non tutti gli elementi di Y sono valori che la funzione assume. Pertanto, se vogliamo che l'inversa sia definita su tutto Y, questa inversa non potremo costruirla. Quindi la f deve anche essere suriettiva. Ma abbiamo già osservato in precedenza che per avere una funzione suriettiva basta dichiarare un codominio coincidente con l'immagine della funzione stessa. Quindi la vera proprietà che non può mancare per avere la funzione inversa è l'iniettività, salvo fare pesanti modifiche sul dominio. Quando una funzione ha una funzione inversa, si dice che è *invertibile*.

Fornisco qui di seguito un modo più rigoroso di definire la funzione inversa. Gli studenti, avendo appena visto che cosa significa "in pratica", cerchino di riflettere anche sull'approccio rigoroso.

Se X è un insieme, la funzione che ad ogni $x \in X$ associa l'elemento x stesso si chiama *funzione identità su* X. La indichiamo con il simbolo i_X. Pertanto

$$i_X : X \to X \qquad \text{e} \qquad i_X(x) = x\ ,\ \forall x \in X.$$

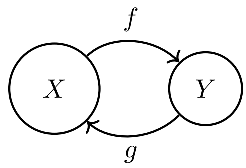


Si tratta di una funzione molto semplice, che può essere definita in un qualunque insieme. È la funzione che in pratica non trasforma nulla, facendo corrispondere ad ogni elemento l'elemento stesso.

Veniamo ora alla definizione di funzione inversa.

Sia $f : X \to Y$. La funzione f si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che

$$g \circ f = i_X \qquad \text{e} \qquad f \circ g = i_Y.$$



Osservazione Si tratta di una definizione non operativa: non ci dice come fare per riconoscere se una funzione è invertibile oppure no. L'invertibilità di una f dipende dall'esistenza o meno di un'altra funzione, la g. La richiesta che si fa sulla g è che la composizione con la f, nei due versi, dia come risultato la funzione identità, sia su X sia su Y.

Se f è invertibile, la funzione g si chiama *funzione inversa di* f e si indica col simbolo f^{-1}. [11]

Come già detto, alcune funzioni sono invertibili, altre non lo sono. Il risultato generale è il seguente:

Proposizione La funzione $f : X \to Y$ è invertibile se e solo se f è biiettiva.

Vediamo alcuni esempi.

- Abbiamo già visto prima che la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, con $f(z) = z + 1$ è biiettiva. Troviamo la sua funzione inversa. Preso un qualunque $t \in \mathbb{Z}$, l'elemento $z \in \mathbb{Z}$ tale che $f(z) = z + 1 = t$ è evidentemente $z = t - 1$. Quindi la funzione inversa è la $g(t) = t - 1$, con $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

- La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, con $f(z) = -z$ è biiettiva, essendo iniettiva e suriettiva (facile esercizio). Quindi essa è invertibile. La sua funzione inversa è evidentemente la funzione stessa, dato che $f(f(z)) = f(-z) = -(-z) = z$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

- Abbiamo visto che la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = 2n$ non è biiettiva in quanto non è suriettiva. Se però come codominio prendiamo l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari, cioè poniamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, con $f(n) = 2n$, allora la funzione f è biiettiva e quindi invertibile. La sua funzione inversa è naturalmente la funzione $g : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, con

[11] Il simbolo è lo stesso già usato per indicare la controimmagine. Là però definiva un insieme, qui definisce una funzione.

$g(p) = \frac{p}{2}$. Questo esempio mostra che l'invertibilità di una funzione può dipendere dal dominio o dal codominio che scegliamo. Infatti qui abbiamo fatto diventare la funzione suriettiva cambiando il suo codominio.

- (Esempio difficile) Anche la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, con $f(n) = \frac{1}{4}(-1)^n(2n + (-1)^n - 1)$ è biiettiva (lo si verifichi distinguendo i due casi n pari ed n dispari e costruendo una tabella che riporti n e $f(n)$ per i primi valori di n). Pertanto è invertibile. La funzione inversa è la funzione $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da

$$g(z) = \begin{cases} 2z & z > 0 \\ 1 - 2z & z < 0 \\ 1 & z = 0. \end{cases}$$

Torneremo con altri esempi quando esamineremo le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.1 Data la funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ , con } f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n - 1 & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases}$$

si determini

(a) l'immagine dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$; è vero che per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ l'immagine di A è A?

(b) l'immagine di f;

(c) la controimmagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$.

(d) La funzione f è invertibile?

Esercizio 3.2 Data la funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ , con } f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (n + 1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

si determini

(a) l'immagine dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$;

(b) l'immagine di f;

(c) la controimmagine dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

(d) La funzione f è invertibile?

4 Restrizione e prolungamento di una funzione

Anche qui do prima l'idea dei concetti che voglio esporre. Talvolta c'è la necessità o la convenienza di considerare una funzione in una parte del suo dominio: si parlerà allora di una restrizione della funzione stessa. Altre volte, data una funzione, sarà utile considerarne un'altra che è definita esattamente come la prima nel dominio di questa, e inoltre è definita anche in qualche altro punto: parleremo di prolungamento. Ecco le definizioni formali.

- Data una qualunque funzione $f : X \to Y$, se A è un sottoinsieme di X, si definisce *restrizione di f all'insieme A* la funzione

$$f\big|_A : A \to Y \text{ , con } f\big|_A(a) = f(a), \text{ per ogni } a \in A$$

($f\big|_A$ si legge f *ristretta all'insieme* A).

Si tratta della funzione, definita su un sottoinsieme del dominio di f, che nei punti di tale insieme coincide con f. Un paio di esempi:

▷ Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$, la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$ è la funzione

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ , con } g(x) = x^2, \text{ per ogni } x \geq 0.$$

▷ Data la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, la sua restrizione all'insieme $\mathbb{N}$ è la funzione

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ , con } g(n) = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \text{, per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

L'utilità di questo concetto sta nel fatto che, rinunciando ad una parte del dominio della f, si può ottenere una funzione che ha qualche proprietà in più rispetto ad f. Si consideri il primo esempio: la funzione $x \mapsto x^2$, definita in tutto $\mathbb{R}$, non è invertibile (non è iniettiva). Se però prendiamo la sua restrizione in $[0, +\infty)$ e prendiamo questo stesso intervallo come codominio, la funzione risulta invertibile.

- Data una qualunque funzione $f : X \to Y$, se A è un insieme che contiene X (cioè $X \subset A$), si definisce *prolungamento di f all'insieme A* la funzione

$$h : A \to Y \text{ , con } h(x) = f(x) \text{, per ogni } x \in X.$$ [12]

Si noti che, essendo $X \subset A$, ogni x che sta in X sta anche in A. Si tratta di una funzione, definita in un insieme più grande di X, che ristretta ad X coincide con f. Anche qui un paio di esempi:

▷ Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con $f(n) = \frac{1}{n}$, un suo prolungamento all'insieme $\mathbb{N}_0$ (i naturali con lo zero) è, ad esempio, la funzione

$$f_0 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \text{ , con } f_0(n) = \begin{cases} 1/n & n \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

▷ Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \frac{x^2}{x}$, un suo prolungamento a tutto $\mathbb{R}$ è la funzione

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ , con } g(x) = x \text{, per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si noti, in quest'ultimo esempio, che sarebbe errato pensare che l'espressione $\frac{x^2}{x}$ definisca già una funzione in tutto $\mathbb{R}$, in quanto $\frac{x^2}{x} = x$. Infatti, $\frac{x^2}{x} = x$ solo se $x \neq 0$.

5 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) Dato che $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 10$, l'immagine dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ è

$$\{2, 5, 10\}.$$

(b) Una scrittura generale dell'immagine di f, che possiamo indicare con $f(\mathbb{N})$, è

$$f(\mathbb{N}) = \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

cioè l'insieme dei numeri naturali che si possono scrivere come $n^2 + 1$, dove n è un qualche numero naturale. Certo questa non dice molto. Possiamo anche elencare i primi elementi di questo insieme, e cioè scrivere

$$f(\mathbb{N}) = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots\}.$$

(c) Sono i naturali che hanno per immagine 1,2 oppure 3: quindi (soltanto 2 può essere immagine di qualcosa)

$$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{1\}.$$

(d) La funzione non è biiettiva, dato che non è suriettiva: infatti, come si vede sopra, l'immagine di f non coincide con tutto l'insieme $\mathbb{N}$.

In questa sezione spesso le domande chiedono di fornire insiemi. Gli insiemi possono essere talvolta scritti indicando tutti gli elementi dell'insieme (questo ovviamente si può fare solo se l'insieme è finito, cioè ha un numero finito di elementi). Altre volte può essere preferibile l'altra notazione, quella che definisce un insieme attraverso una proprietà dei suoi elementi.

[12] Avremmo potuto anche dire $h : A \to Y$, tale che $h|_X = f$.

Esercizio 1.2

Si noti che la legge che definisce la funzione f è la stessa dell'esercizio precedente, cambiano invece gli insiemi tra cui è definita la funzione, che ora sono $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$.

(a) Chiaramente è lo stesso insieme del punto (a) di prima, dato che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: $\{2, 5, 10\}$.

(b) $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$ è questa volta l'insieme $\{-1, 0, 1\}$, infatti $f(0) = 1$ e $f(-1) = f(1) = 2$.

(c) Non è vero che $f(\mathbb{N}) = f(\mathbb{Z})$. Infatti $f(\mathbb{Z}) = f(\mathbb{N}) \cup \{1\}$. La funzione non è biiettiva, per lo stesso motivo di prima.

Esercizio 1.3

(a) $f(\{0, 1, 2, 3\}) = \{-10, -9, -8, -7\}$.

(b) $f(\mathbb{Z}) = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq -10\}$.

(c) $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\}) = \{\pm 10, \pm 11, \pm 12, \pm 13\}$.

(d) $f^{-1}(\mathbb{N}) = \{\pm 11, \pm 12, \pm 13, \ldots\} = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \geq 11\}$.

Esercizio 1.4

(a) $f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 3, 4\}$.

(b) $f^{-1}(\{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

Esercizio 2.1

Consideriamo prima $f \circ g$. È una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$. Si ha

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n + 1) = (2n + 1)^2 + 2 = 4n^2 + 4n + 3.$$

Consideriamo ora $g \circ f$. È una funzione da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$. Si ha

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z^2 + 2) = 2(z^2 + 2) + 1 = 2z^2 + 5.$$

Esercizio 2.2

(a) Entrambe le funzioni composte, cioè $f \circ g$ e $g \circ f$, sono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$. Poi

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(z^2) = |z^2|$$

e

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(|z|) = |z|^2.$$

Le due espressioni, pur essendo formalmente diverse, coincidono (ricordare la definizione di valore assoluto).

(b) $(f \circ g)(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$. Ovviamente l'altra è uguale.

(c) $(f \circ g)^{-1}(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \{-1, 0, 1\}$ e l'altra è uguale.

Esercizio 3.1

In questo caso può essere utile costruire una tabella che riporti n e $f(n)$ per i primi valori di n. Così facendo si capisce come opera la funzione.

(a) $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Non è vero che per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ l'immagine di A è A (come invece succede per l'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. Infatti ad esempio $f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 4\}$.

(b) L'immagine di f è $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

(c) $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 4\}$.

(d) La funzione f è invertibile, dato che è sia iniettiva sia suriettiva. Non fornisco una dimostrazione formale. Diciamo solo semplicemente che dalla tabella dei valori, una volta capito come opera la funzione, risultano vere queste sue due proprietà: valori distinti hanno immagini distinte (la funzione è quindi iniettiva); tutti i numeri naturali del codominio sono immagine di qualche naturale del dominio (cioè $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ e quindi f è suriettiva).

Esercizio 3.2

Anche qui può essere utile la tabella dei primi valori.

(a) $f(\{1,2,3,4\}) = \{1,2\}$.

(b) L'immagine di f è $\mathbb{N}$.

(c) La controimmagine dell'insieme $\{1,2,3,4\}$ è l'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\}$.

(d) La funzione f non è invertibile, dato che, pur essendo suriettiva, non è iniettiva: infatti ad esempio $f(1) = f(2) = 1$.