II-2 Numeri reali

Indice

Prima di affrontare gli argomenti delle dispense successive è bene vedere alcuni concetti che riguardano le proprietà dei numeri reali e dei sottoinsiemi di numeri reali.

Almeno in parte dovrebbero essere proprietà note allo studente. Occorre però riprenderle attentamente, in quanto si tratta di aspetti di non immediata acquisizione.

1 Alcune considerazioni iniziali

Prima di entrare nel formalismo, voglio proporre qualche spunto di riflessione. Alla scuola secondaria avete già incontrato i numeri reali. In effetti, ad esempio, tutte le equazioni che avete visto prima di arrivare all'università le avete risolte nell'insieme dei numeri reali. Quindi non sono una novità, anzi il rischio è quello di dare per scontato che stiamo lavorando con i numeri reali, senza riflettere mai sulle proprietà profonde che essi hanno, che li contraddistinguono dagli altri insiemi numerici, e che noi utilizziamo senza accorgercene.

Tali proprietà emergono invece appena incontriamo le definizioni che presto arrivano.

Allora voglio in qualche modo prepararvi. Vi propongo, per cominciare, questa domanda: qual è il numero reale più vicino ad 1 (1 escluso, ovviamente)? Se avessi chiesto: qual è il numero intero più vicino ad 1, non ho dubbi che avreste subito pensato a 0 e 2, correttamente. Ma se si tratta dei numeri reali?

La risposta è semplicemente che non esiste un numero reale più vicino a 1. Se fissate l'attenzione su di un numero reale "molto vicino a 1",[1] ne trovate subito un altro ancora più vicino, quindi non c'è "quello più vicino".

Ma gli studenti portati alla matematica diranno subito: questa non è una novità, succede anche nei numeri razionali. Infatti è vero. Questo non è un fatto strano, tipico soltanto dei numeri reali. Non c'è la frazione più vicina ad 1.[2]

Altra domanda: quanti reali ci sono tra 1 e 2? Questo lo sapete tutti, ce ne sono infiniti. E quanti numeri razionali? Lo stesso, infiniti (spero non abbiate dubbi su questo).[3] Quindi anche questa è una proprietà che hanno entrambi.

Ancora possiamo dire che tra due numeri reali qualunque (o razionali, è lo stesso) possiamo sempre trovare infiniti altri numeri reali e infiniti altri numeri razionali. Anche qui non ci sono fatti nuovi, apparentemente tutto quello che succede nei reali succede anche nei razionali. E allora dove sta la differenza? Perché alla scuola secondaria vi hanno fatto lavorare con i numeri reali?

Dovreste saper dare una risposta, che peraltro non è per nulla "evidente": sono più di duemila anni che l'uomo si è accorto che le frazioni non sono, per certi aspetti, sufficienti. La risposta non ve la do qui, perché la troviamo presto nelle righe qui sotto, espressa in modo rigoroso.

2 Struttura di ordine e struttura algebrica di $\mathbb{R}$

Iniziamo ricordando in quali proprietà consiste la *struttura di ordine* e la *struttura algebrica* dei numeri reali.[4]

Con struttura di ordine si intende la seguente proprietà.

In $\mathbb{R}$ c'è una relazione, che si indica con il simbolo $<$, tale che

[1] Riflettete che la dicitura "molto vicino a ..."non ha, tra l'altro, alcun senso.

[2] La frazione (cioè il numero razionale) $\frac{99}{100}$ è "molto vicino ad 1", ma $\frac{999}{1000}$ lo è di più e $\frac{9999}{10000}$ ancora di più ....

[3] A proposito, chi mi sa indicare una formula che, date due frazioni, mi permette di trovare una frazione compresa tra le due? Questo dovrebbe convincere che tra due frazioni ce ne sono infinite.

[4] Con il termine struttura si intende un insieme di proprietà di un certo oggetto matematico.

- se $x, y \in \mathbb{R}$, allora vale una e una sola tra le tre relazioni
$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x;$$
- (*proprietà transitiva*) se $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$.

Valendo tali proprietà, si dice che $\mathbb{R}$ è un insieme *ordinato*. La scrittura $x \leq y$ come noto significa "$x < y$ oppure $x = y$"; è noto anche che la scrittura $y > x$ significa $x < y$.

Con struttura algebrica dei reali si intende l'insieme delle seguenti proprietà.

(i) In $\mathbb{R}$ è definita un'operazione di *addizione*, tale che

- (A1) (*proprietà commutativa*) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- (A2) (*proprietà associativa*) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$;
- (A3) c'è in $\mathbb{R}$ un elemento, detto *zero* e indicato con 0, tale che $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
- (A4) per ogni reale a c'è un altro reale, detto *opposto di* a ed indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$.

(ii) In $\mathbb{R}$ è definita un'operazione di *moltiplicazione*, tale che

- (M1) (*proprietà commutativa*) $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- (M2) (*proprietà associativa*) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$;
- (M3) c'è in $\mathbb{R}$ un elemento, detto *uno* e indicato con 1, tale che $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
- (M4) per ogni reale $a \neq 0$ c'è un altro reale, detto *reciproco di* a ed indicato con a^{-1}, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$.

(iii) Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- (D) (*proprietà distributiva*[5]) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$;
- (CO1) per ogni $y, z \in \mathbb{R}$ tali che $y < z$, e per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $x + y < x + z$;
- (CO2) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x > 0$ e $y > 0$, si ha che $xy > 0$.

Le sigle che vedete a fianco delle varie proprietà sono di facile interpretazione, ad eccezione delle ultime due dove figura il CO. Questa sigla sta per "corretto ordinamento". Sono due proprietà che coinvolgono nello stesso tempo sia l'ordinamento sia le operazioni algebriche.

Le proprietà relative alla struttura algebrica fanno di $\mathbb{R}$ un *campo commutativo* (cioè ogni insieme numerico che ha quelle proprietà viene chiamato campo commutativo). Le proprietà relative alla struttura algebrica e alla struttura di ordine fanno di $\mathbb{R}$ un *campo commutativo ordinato*.

Osservazione Anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un campo commutativo ordinato. Infatti tutte le proprietà scritte sopra valgono anche nei numeri razionali.

3 Insiemi limitati ed estremi di un insieme

Prima di arrivare alla novità di $\mathbb{R}$ rispetto a $\mathbb{Q}$, occorrono alcune definizioni.

Definizione Un sottoinsieme non vuoto $S \subset \mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se esiste un elemento $b \in \mathbb{R}$ tale che
$$b \geq x, \quad \forall x \in S.$$
L'elemento b si chiama **limitazione superiore** (o **maggiorante**) di S.

Osservazione Attenzione a non fare confusione tra quello che sta in S, che è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e quello che sta in $\mathbb{R}$, e quindi non necessariamente in S. Il maggiorante può non appartenere ad S.

Esempio Se consideriamo l'insieme $S = (-\infty, 1]$, un suo maggiorante è $b = 2$. A questo punto è chiaro che di maggioranti di S, se ce n'è uno, ce ne sono infiniti. Nel nostro esempio tutti i numeri naturali sono maggioranti di S, anche 1. Tra questi 1 è l'unico che appartiene ad S.

Un sottoinsieme non vuoto $S \subset \mathbb{R}$ si dice invece **inferiormente limitato** se esiste un elemento $a \in \mathbb{R}$ tale che
$$a \leq x, \quad \forall x \in S.$$
L'elemento a si chiama **limitazione inferiore** (o **minorante**) di S.

Un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ si dice poi **limitato** se è sia superiormente sia inferiormente limitato.

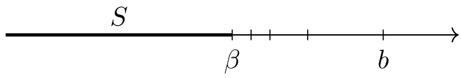
[5] Si dovrebbe dire più completamente *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*. Si noti che non vale un'analoga proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, che sarebbe $(a \cdot b) + c) = (a + c) \cdot (b + c)$.

Esempi I numeri naturali sono un insieme inferiormente limitato, ma non superiormente limitato in $\mathbb{R}$. I numeri razionali compresi tra -1 e 2 sono un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

Osservazione Nel caso esistano limitazioni superiori per un insieme è ragionevole chiedersi se ci sia una minima limitazione superiore (analogamente per l'esistenza di una massima limitazione inferiore). Qui sta la vera differenza tra i numeri reali e i numeri razionali. Si può dimostrare che per ogni insieme di numeri reali superiormente limitato esiste, tra i numeri reali, una minima limitazione superiore. Con i numeri razionali questo non è vero.

Tralasciando ogni dimostrazione formale di tale esistenza, possiamo dare ora una definizione fondamentale.

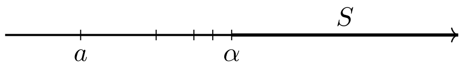
Definizione Sia S un sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente di $\mathbb{R}$. Si chiama **estremo superiore** di S la minima delle limitazioni superiori di S. Si scrive allora $\beta = \sup S$.



Osservazione Se β è estremo superiore dell'insieme S e se $\beta \in S$, si dice che β è **massimo** di S (o che S ha massimo) e si scrive $\beta = \max S$. È chiaro che non sempre il massimo di un insieme esiste, dato che può capitare che $\beta \notin S$, cioè che l'estremo superiore non appartenga ad S.

Riporto anche la definizione di estremo inferiore, che peraltro si intuisce facilmente.

Definizione Sia S un sottoinsieme non vuoto e limitato inferiormente di $\mathbb{R}$. Si chiama **estremo inferiore** di S la massima delle limitazioni inferiori di S. Si scrive allora $\alpha = \inf S$.



Se $\alpha \in S$, si dice che α è **minimo** di S (o che S ha minimo) e si scrive $\alpha = \min S$.

Tornando al fatto che nei numeri razionali può non esserci la minima limitazione superiore, preciso che questo significa quanto segue: ci sono sottoinsiemi superiormente limitati di numeri razionali per cui non esiste, *tra i numeri razionali*, una minima limitazione superiore. Per citare il classico esempio a questo riguardo basta considerare l'insieme

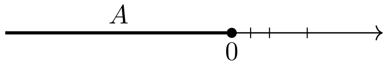
$$S = \left\{ r \in \mathbb{Q} \ : \ r^2 < 2 \right\},$$

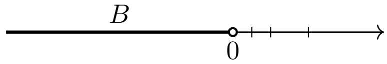
cioè l'insieme dei razionali il cui quadrato è minore di 2. Tale insieme non ha (nell'insieme dei razionali) estremo superiore.[6]

Quindi l'insieme $\mathbb{Q}$, pur avendo la stessa struttura algebrica e la stessa struttura d'ordine di $\mathbb{R}$, non ha un'altra proprietà importante che invece ha $\mathbb{R}$. Questo è un "brutto difetto" per l'insieme $\mathbb{Q}$, una sorta di *incompletezza*, mentre $\mathbb{R}$ si dice per questo *completo*.[7]

Alcuni esempi sul concetto di estremo superiore.

- Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = (-\infty, 0]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = (-\infty, 0)$. Osserviamo che:
  - ▷ 1 è un maggiorante sia di A sia di B, quindi entrambi gli insiemi sono limitati superiormente.
  - ▷ Sia per A sia per B 0 è la minima tra le limitazioni superiori, quindi $\sup A = \sup B = 0$. Poiché $0 \in A$, si ha che 0 è il massimo di A; dato che $0 \notin B$, allora B non ha massimo.

  Non esiste invece l'estremo inferiore dei due insiemi (entrambi sono limitati superiormente ma non limitati inferiormente).

[6] Un modo equivalente, forse più famigliare allo studente, per esprimere lo stesso concetto è dire che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è uguale a 2, cioè tra i razionali la *radice di 2*.

[7] Per usare un'immagine poco matematica, ma che forse aiuta a cogliere il concetto, i numeri reali coprono con continuità la retta, non ci sono spazi liberi, se prendiamo un qualunque punto sulla retta lì c'è un numero reale. Invece i numeri razionali, le frazioni, formano un insieme "pieno di spazi vuoti". Ma attenzione, pieno di spazi vuoti non vuol dire che ci sono degli intervalli vuoti: ricordate sempre che tra due razionali, per quanto vicini, ce ne sono infiniti altri, quindi non ci sono intervalli privi di numeri razionali, ma nonostante questo i razionali non formano quello che intuitivamente pensiamo dicendo un continuo di punti. La teoria della probabilità direbbe che la probabilità di "colpire"un numero razionale scegliendo a caso un punto sulla retta è zero. Ciò che colma i vuoti lasciati dalle frazioni sono i numeri che non sono frazioni, cioè i numeri *irrazionali*: razionali e irrazionali formano i numeri reali, ma ricordate che il grosso, e il merito della completezza, va ai numeri non razionali.

- Consideriamo in generale il caso degli intervalli.

  Se l'intervallo, chiamiamolo I, è illimitato superiormente (inferiormente) allora non esiste il suo estremo superiore (inferiore).

  Per un intervallo limitato I, di estremi a, b (con $a < b$), non è difficile capire che in ogni caso si ha

  $$a = \inf I \qquad \text{e} \qquad b = \sup I$$

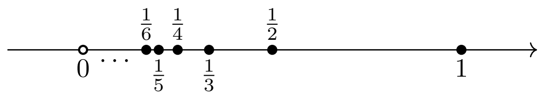
  e non ha importanza se gli estremi fanno parte oppure no dell'intervallo.

  Possiamo precisare che, se l'estremo appartiene all'intervallo, esso è massimo o minimo, a seconda dei casi. Quindi, ad esempio, possiamo scrivere

  $$\inf[a, b) = a \quad , \quad \min[a, b) = a \quad , \quad \sup[a, b) = b \quad , \quad \text{e l'intervallo non ha massimo.}$$

- Sia $C \subset \mathbb{R}$, con

  $$C = \left\{ \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6} \dots \right\}.$$

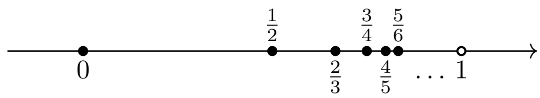


  Osserviamo che:

  - ▷ C è superiormente limitato (2 è un maggiorante); la minima limitazione superiore è 1, che risulta essere il massimo dell'insieme;
  - ▷ C è inferiormente limitato (-1 è un minorante); la massima limitazione inferiore è 0, quindi $\inf C = 0$. Questo perché un qualunque numero positivo a non è più una limitazione inferiore, dato che possiamo sempre trovare una frazione $1/n$ che è minore di a;
  - ▷ 0 non è il minimo di C, dato che $0 \notin C$ (quindi C non ha minimo).

- Sia $D \subset \mathbb{R}$, con

  $$D = \left\{ 1 - \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6} \dots \right\}.$$



  La figura illustra che le frazioni del tipo $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ sono tutte minori di 1 e si avvicinano ad 1 al crescere di n. Possiamo osservare che:

  - ▷ D è inferiormente limitato (-1 è un minorante). La massima limitazione inferiore è 0, che appartiene a D. Quindi 0 è il minimo di D;
  - ▷ dato che ogni elemento di D è minore di 1, allora 1 è un maggiorante di D;
  - ▷ 1 è anche la minima tra le limitazioni superiori, quindi 1 è l'estremo superiore di D. Questo perché anche qui risulta chiaro che un qualunque numero minore di 1 non può essere ancora una limitazione superiore.

Osservazione Se A è un insieme non limitato superiormente possiamo dire che non esiste il suo estremo superiore o possiamo anche scrivere $\sup A = +\infty$. Analogamente, se B è un insieme non limitato inferiormente diciamo che non esiste il suo estremo inferiore o scriviamo $\inf B = -\infty$.

Si tenga comunque sempre presente che $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali.

Esercizio 3.1 Per ciascuno dei seguenti insiemi (considerati come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$), si dica se l'insieme è superiormente/inferiormente limitato, si indichino, se esistono, un maggiorante e un minorante, si indichino l'estremo superiore e l'estremo inferiore e infine si indichino, se esistono, il massimo e il minimo.

(a) $(-\infty, 1]$ (b) $(0, +\infty)$

(c) $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ (d) $[-1, 2)$

(e) $\mathbb{N}$ (f) $\mathbb{Z}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 2\}$ (h) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > 0\}$

4 Proprietà metriche dei numeri reali

Ricordiamo intanto una definizione molto importante.

Definizione Si dice **valore assoluto o modulo** di un numero reale x la quantità

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Non è difficile dimostrare che valgono le proprietà seguenti: se $x,\ y \in \mathbb{R}$, allora

(i) $|x| \geq 0$ per ogni x e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;

(ii) $|xy| = |x|\,|y|$ per ogni x, y (in particolare $|-x| = |x|$);

(iii) (*disuguaglianza triangolare*) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni x, y.

Osservazione Le prime due sono immediate. Per la terza, si può osservare che in generale si ha $t \leq |t|$, per ogni t reale, e che ovviamente $t^2 = |t|^2$, per ogni t reale. Allora si ha

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &\leq x^2 + y^2 + 2|xy| \\ &= (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

da cui segue la disuguaglianza triangolare (si ricordi che, se a è positivo, sono equivalenti $t^2 \leq a^2$ e $|t| \leq a$).

Utilizzando la definizione di valore assoluto di un numero reale possiamo definire l'importante concetto di *distanza* in $\mathbb{R}$.

Definizione Chiamiamo **distanza euclidea** di due numeri reali x e y il numero reale non negativo

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y|.$$

Possiamo anche definire la distanza di un numero reale da un insieme di numeri reali: siano $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **distanza di x da E** il numero

$$d(x, E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \big\{ |x - y| : y \in E \big\}.$$ [8]

Ad esempio, la distanza di $x = 1$ dall'intervallo $(2, +\infty)$ è 1.

Possiamo anche definire l'*ampiezza* di un insieme: se $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto, possiamo dire che

$$\text{ampiezza di } E \stackrel{\text{def}}{=} \sup \big\{ |x - y| : x, y \in E \big\}.$$

Se ad esempio E è l'intervallo (a, b), si ha che l'ampiezza di E è $b - a$.[9]

Se E è l'intervallo $(a, +\infty)$, l'ampiezza di E è $+\infty$.

Osservazioni

- Se $E = \{y\}$, allora $d(x, E) = |x - y| = d(x, y)$.
- Osserviamo che, se $x \in E$, allora $d(x, E) = 0$.
  Viceversa, $d(x, E) = 0$ non implica che x appartenga a E. Ad esempio, $d\big(0, (0, 1]\big) = 0$, ma $0 \notin (0, 1]$.

Osservazione Se a è un numero reale positivo, si ha

$$|t| < a \Longleftrightarrow t \in (-a, a).$$

Infatti

$$|t| < a \Longleftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t < a \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} t < 0 \\ -t < a \end{cases} \Longleftrightarrow -a < t < a \Longleftrightarrow t \in (-a, a).$$ [10]

[8] Si noti che non poniamo $d(x, E) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{|x - y| : y \in E\}$. Questo perché il minimo potrebbe anche non esistere.

[9] Si osservi che il risultato non cambia se si tratta di un qualunque intervallo di estremi a e b, cioè $[a, b]$, $[a, b)$, oppure $(a, b]$.

Naturalmente, sempre se a è positivo, vale che $|t| \leq a \iff t \in [-a, a]$.

Lo studente si abitui a questo punto a chiedersi: l'ipotesi è che a sia positivo; perché questa ipotesi? E se togliamo questa ipotesi, il risultato resta valido? Se no, come si modifica?[11]

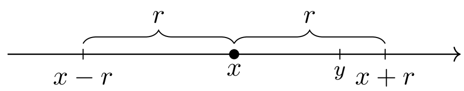
Osservazione Se a è un numero reale positivo, si ha

- $|t| > a \iff t \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$
- $|t| \geq a \iff t \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

Lo studente provi a dimostrare queste doppie implicazioni e poi, come fatto prima, si chieda come cambierebbero le cose se fosse $a \leq 0$.

Osservazione Se x è un qualunque numero reale e se r è un numero reale positivo, vale l'implicazione

$$y \in (x - r, x + r) \iff |y - x| < r.$$



Lo si può vedere come immediata conseguenza di quanto visto nell'osservazione precedente,[12] oppure facendo passaggi analoghi a quelli appena fatti:

$$y \in (x - r, x + r) \iff x - r < y < x + r \iff -r < y - x < r \iff |y - x| < r.$$

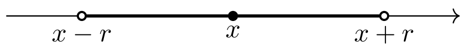
5 Cenni di topologia in $\mathbb{R}$

La definizione di distanza in $\mathbb{R}$ consente di dare altre importanti definizioni, che rientrano in quella che si chiama *topologia* di $\mathbb{R}$.

Definizione

- ▷ Se $x \in \mathbb{R}$, chiamiamo **intorno di x di raggio** r, con $r > 0$, l'intervallo

  $$(x - r, x + r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\},$$

  cioè l'insieme dei reali che distano da x meno di r.
- ▷ Chiamiamo **intorno di** $+\infty$ ogni intervallo del tipo $(a, +\infty)$, dove a è un numero reale.
- ▷ Chiamiamo infine **intorno di** $-\infty$ ogni intervallo del tipo $(-\infty, b)$, dove b è un numero reale.

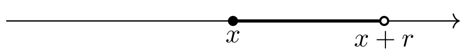
Osservazione Ribadisco ancora una volta che, anche se abbiamo definito i loro intorni, $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali.

È utile definire anche gli intorni destri e gli intorni sinistri. Saranno infatti questi che useremo per primi nella definizione di limite.

Definizione

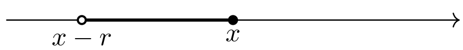
- ▷ Se $x \in \mathbb{R}$, chiamiamo **intorno destro di x di raggio** r, con $r > 0$, l'intervallo

  $$[x, x + r) = \{y \in \mathbb{R} : x \leq y < x + r\},$$

  cioè l'insieme dei reali maggiori o uguali ad x, che distano da x meno di r.
- ▷ Se $x \in \mathbb{R}$, chiamiamo invece **intorno sinistro di x di raggio** r, con $r > 0$, l'intervallo

  $$(x - r, x] = \{y \in \mathbb{R} : x - r < y \leq x\}.$$

[10] Approfitto dell'occasione per ricordare ancora che la disuguaglianza $|t| < a$, con a positivo, equivale alla $t^2 < a^2$. Attenzione che l'elevamento al quadrato di ambo i membri di una disequazione è un"operazione pericolosa", nel senso che porta ad una disequazione equivalente se ambo i membri sono non negativi. Qui lo sono: $|t|$ per la proprietà (i) e a per ipotesi.

[11] Se $a = 0$ la disuguaglianza $|t| < 0$ è impossibile, come conseguenza della proprietà (i). Se $a < 0$ la disuguaglianza $|t| < a$ è a maggior ragione impossibile. Nel caso della disuguaglianza larga, se $a = 0$ la $|t| \leq 0$ equivale a $t = 0$ mentre nel caso di $a < 0$ la $|t| \leq a$ è impossibile.

[12] Infatti $|y - x| < r \iff y - x \in (-r, r) \iff y \in (x - r, x + r)$.

Passiamo alle definizioni topologiche.

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R}$.

- ▷ Diciamo che x è **interno ad** A se esiste almeno un intorno di x interamente contenuto in A;
- ▷ Diciamo che x è **esterno ad** A se x è interno al complementare di A;[13]
- ▷ Diciamo che x è **di frontiera per** A se ogni intorno di x contiene punti di A e punti del complementare di A.
- ▷ Diciamo che x è **di accumulazione per** A se ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.
- ▷ Diciamo che x è **isolato in** A se $x \in A$ ed esiste almeno un suo intorno che non contiene alcun punto di A eccetto x;

Osservazioni Un punto interno all'insieme A appartiene necessariamente ad A.

Un punto esterno all'insieme A appartiene certamente al complementare di A, e quindi non può appartenere ad A.

Un punto di frontiera per un insieme A può appartenere o non appartenere all'insieme. Lo stesso vale per i punti di accumulazione. I punti di frontiera di A sono i punti che non sono né interni né esterni ad A.

Un punto isolato di A è un punto di A che però non ha altri punti di A "nelle immediate vicinanze".

Esempio Consideriamo l'intervallo $A = [0, 1]$.

- Il numero reale $\frac{1}{3}$ è interno ad A. Infatti il suo intorno $(0, \frac{2}{3})$ è interamente contenuto in A.
- I punti interni ad A sono i punti dell'intervallo $(0, 1)$. Infatti, se $x \in (0, 1)$, ponendo $r = \min(x, 1 - x)$,[14] certamente l'intorno di x di raggio r è interamente contenuto in A.
- Il numero reale -1 è esterno ad A, dato che il suo intorno $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ è interamente contenuto nel complementare di A, e quindi -1 è interno al complementare. I punti esterni ad A sono i punti dell'insieme $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
- Il punto 0 è di frontiera per A: infatti ogni suo intorno è un intervallo del tipo $(-r, r)$, e quindi contiene punti di A e punti del complementare di A. Anche il punto 1 è di frontiera per A.
- In A non ci sono punti isolati. Un esempio di insieme con un punto isolato è l'insieme $A \cup \{2\}$: il punto 2 è isolato in tale insieme, dato che il suo intorno $(1, 3)$ non contiene alcun punto dell'insieme ad eccezione di 2 stesso.
- Il punto 1 è di accumulazione per A: infatti ogni intorno di 1 contiene infiniti punti di A. Anche 0 è di accumulazione per A, ma anche ogni altro punto di A è di accumulazione per A. L'insieme dei punti di accumulazione per A è l'insieme A stesso.

Sulle definizioni appena viste si basano altre definizioni importanti.

Definizione

- ▷ Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice **aperto** se ogni punto di A è interno ad A.
- ▷ Un insieme $C \subset \mathbb{R}$ si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto.

Osservazioni Si può vedere facilmente che gli insiemi aperti sono quelli che non contengono i propri punti di frontiera, mentre gli insiemi chiusi sono quelli che contengono tutti i propri punti di frontiera. Attenzione a non pensare che ogni insieme sia necessariamente o aperto o chiuso: ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi. Vedi negli esempi che seguono.

Esempi

- Ancora con l'insieme $A = [0, 1]$, dato che i punti di frontiera sono 0 e 1 e che questi appartengono ad A, allora A è chiuso.
- In generale gli intervalli del tipo $[a, b]$ sono chiusi. Infatti i punti di frontiera di $[a, b]$ sono a e b ed appartengono all'intervallo.

  Anche l'intervallo $[a, +\infty)$ è chiuso. Infatti l'unico suo punto di frontiera, a, sta nell'intervallo. Lo stesso dicasi per $(-\infty, b]$. Quindi si noti che chiuso non vuol dire limitato.

[13] Ricordo che il complementare di A è l'insieme dei numeri reali che non appartengono ad A.

[14] La scrittura significa che r è il minimo tra x e $1 - x$.

- Invece gli intervalli del tipo (a, b) sono aperti. Infatti, se $x \in (a, b)$, poniamo $r = \min(x - a, b - x)$. Allora l'intorno $(x - r, x + r)$ di x è interamente contenuto in (a, b) e quindi x è interno all'intervallo.

  Anche gli intervalli del tipo $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ sono aperti.

- Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi: gli intervalli del tipo $(a, b]$ oppure $[a, b)$ sono un esempio.

- Ci sono insiemi che non hanno punti interni. Ogni insieme finito, cioè formato da un numero finito di elementi, è privo di punti interni.[15] Il fatto di avere infiniti elementi non garantisce però che l'insieme abbia punti interni: ad esempio, l'insieme $\mathbb{N}$ contiene infiniti elementi ma non ha nessun punto interno. L'insieme $\mathbb{N}$ è fatto tutto di punti isolati, che sono anche di frontiera, quindi in particolare è chiuso.

Esercizio 5.1 Scrivere un intorno circolare di $t = -1$.

Esercizio 5.2 Esistono intorni di $+\infty$ che contengono numeri reali negativi?

Esercizio 5.3 Esistono intorni di $+\infty$ che non contengono numeri interi?

Esercizio 5.4 Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) 0 è interno a $(-1, 0]$

(b) 0 è esterno a $(-1, 0)$

(c) 0 è di frontiera sia per $(-1, 0]$ sia per $(-1, 0)$

(d) 0 è di accumulazione sia per $(-1, 0]$ sia per $(-1, 0)$

(e) Dati i due insiemi $A = (-\infty, 0] \cup [1, 2]$ e $B = [0, +\infty)$, 0 è punto isolato dell'insieme $A \cap B$.

Esercizio 5.5 Indicato con A l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$, si classifichino i punti di A, specificando quali sono interni, quali esterni, quali di frontiera, quali di accumulazione e quali isolati.

6 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 3.1

(a) L'intervallo $(-\infty, 1]$ è superiormente limitato e inferiormente non limitato. Un maggiorante è ad esempio $t = 2$, ma anche $t = 1$. L'estremo superiore è 1, che è anche il massimo.

(b) L'intervallo $(0, +\infty)$ è inferiormente limitato e superiormente non limitato. Un minorante è ad esempio $t = -1$, ma anche $t = 0$. L'estremo inferiore è 0. L'insieme non ha minimo.

(c) L'insieme $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ non è né superiormente né inferiormente limitato. Non ci sono maggioranti o minoranti. Possiamo anche dire che il sup e l'inf sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.

(d) L'intervallo $[-1, 2)$ è limitato (sia superiormente sia inferiormente). Un maggiorante è ad esempio $t = 3$, e un minorante è ad esempio $t = -5$. L'estremo superiore è 2, l'estremo inferiore è -1 (scriviamo $\sup[-1, 2) = 2$ e $\inf[-1, 2) = -1$). L'intervallo ha minimo (-1) ma non ha massimo.

(e) L'insieme $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato e superiormente non limitato. Un minorante è ad esempio $t = 0$. L'estremo inferiore è 1, che è anche minimo di $\mathbb{N}$.

(f) L'insieme $\mathbb{Z}$ non è né superiormente né inferiormente limitato. Non ci sono maggioranti o minoranti. Possiamo scrivere $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ e $\inf \mathbb{Z} = -\infty$. L'insieme $\mathbb{Z}$ non ha né massimo né minimo.

(g) L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 2\}$, cioè l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^3 < 2$, è l'intervallo $(-\infty, \sqrt[3]{2})$. Tale insieme è limitato solo superiormente e non ha massimo. Si ha $\sup(-\infty, \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$.

(h) L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > 0\}$ è l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - 2x + 1 > 0$ e coincide con l'insieme $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Tale insieme non è limitato e quindi si ha $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$.

[15] Si pensi al fatto che un intorno ha sempre infiniti elementi, e quindi un insieme che ha un punto interno deve necessariamente contenere infiniti elementi.

Esercizio 5.1

Ad esempio, un intorno circolare di $t = -1$ è l'intervallo $(-2, 0)$, ma anche $(-3, 1)$ oppure $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 5.2

Certo, ad esempio $(-1, +\infty)$.

Esercizio 5.3

No. Ogni intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$. Dato che certamente esistono interi maggiori di a, qualunque sia a, questi stanno in questo intervallo.

Esercizio 5.4

(a) 0 non è interno a $(-1, 0]$: non esiste infatti alcun intorno circolare di 0 che sia tutto contenuto nell'intervallo.

(b) 0 non è esterno a $(-1, 0)$: infatti il complementare di $(-1, 0)$ è $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ e 0 non è interno a tale insieme.

(c) 0 è di frontiera sia per $(-1, 0]$ sia per $(-1, 0)$: infatti ogni intorno circolare di 0 contiene punti dell'insieme e del suo complementare. Questo vale sia per $(-1, 0]$ sia per $(-1, 0)$, in quanto non dipende dall'appartenenza di 0 ai due intervalli.

(d) 0 è di accumulazione sia per $(-1, 0]$ sia per $(-1, 0)$: ogni intorno circolare di 0 contiene infiniti punti dell'insieme, sia in un caso sia nell'altro (anche qui non dipende dall'appartenenza di 0 all'insieme).

(e) L'intersezione di A e B è l'insieme $\{0\} \cup [1, 2]$. Allora 0 è punto isolato di tale insieme: esiste cioè almeno un intorno circolare di 0 che dell'insieme contiene soltanto il punto 0 stesso (ad esempio l'intorno circolare $(-1, 1)$).

Esercizio 5.5

Occorre anzitutto trovare l'insieme A risolvendo la disequazione. Il polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ si fattorizza facilmente nel prodotto $(x + 1)(x - 1)^2$ e quindi la disequazione data equivale alla $(x + 1)(x - 1)^2 \le 0$, che ha per soluzioni $x = 1$ oppure le $x \le -1$. Quindi $A = (-\infty, -1] \cup \{1\}$. Allora l'insieme dei punti interni è $\mathscr{I} = (-\infty, -1)$, l'insieme dei punti esterni è $\mathscr{E} = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, l'insieme dei punti di frontiera è $\mathscr{F} = \{-1, 1\}$, l'insieme dei punti di accumulazione è $\mathscr{A} = (-\infty, -1]$ e infine l'insieme dei punti isolati è $\mathscr{J} = \{1\}$.