II-3 Funzioni reali di variabile reale

Indice

In questa dispensa studiamo un caso particolarmente rilevante di funzioni, quelle definite nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (o suoi sottoinsiemi), a valori ugualmente in $\mathbb{R}$. Quindi, con le notazioni viste in precedenza, si tratta delle funzioni

$$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

cioè delle cosiddette funzioni reali (cioè con codominio reale) di variabile reale (cioè con dominio reale).

Nei casi che considereremo l'insieme A sarà sempre per noi o un intervallo di $\mathbb{R}$ o un'unione finita di intervalli.[1]

Esistono, come vedremo, strumenti analitici molto potenti per *studiare* questo tipo di funzioni.

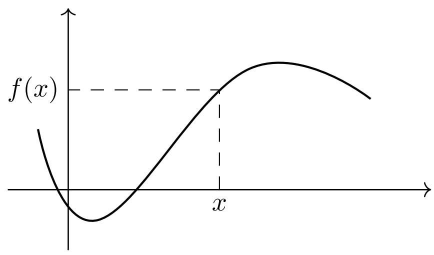
1 Grafico di una funzione reale

Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si definisce **grafico** di f un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, precisamente il sottoinsieme

$$G_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x), x \in A\big\}.$$

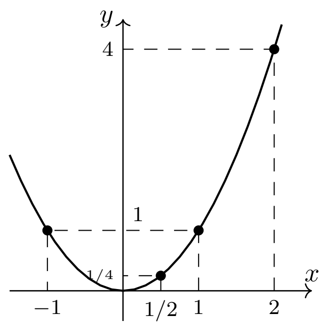
Detto a parole, il grafico di una funzione f è l'insieme delle coppie di numeri reali in cui la seconda componente (la y) è il valore che la funzione f assume nella prima componente (la x).

Trattandosi di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, il grafico di una funzione si può rappresentare nel piano cartesiano. Tale rappresentazione consente di dare della funzione un'immagine grafica molto efficace, quello che si chiama appunto il *grafico* della funzione. Una volta disegnato il suo grafico, risultano praticamente evidenti le proprietà e gli aspetti più importanti della funzione.



Non l'ho fatto in figura, ma solitamente l'asse orizzontale viene indicato con x e quello verticale con y, e sono sicuramente familiari allo studente le diciture "asse delle x" e "asse delle y". Siamo abituati a rappresentare quindi sull'asse orizzontale l'argomento della funzione e sull'asse verticale i suoi valori. Metto in guardia gli studenti sul fatto che molti errori vengono commessi perché non è chiaro "che cosa sta sull'asse x e che cosa sta invece sull'asse y".

[1] Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è unione finita di intervalli se è unione di un numero finito di intervalli. Abbiamo già osservato in precedenza che ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che non rientrano in questa tipologia, che non sono cioè né intervalli, né unioni finite di intervalli, ad esempio $\mathbb{Z}$.



Data una funzione, non è difficile ottenere alcuni punti del suo grafico: basta infatti calcolare il valore della funzione per qualche valore della x e si ottengono i corrispondenti punti nel grafico.
Ad esempio, data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$, calcolando

$$f(0) = 0\ ,\ f(1) = 1\ ,\ f(-1) = 1\ ,\ f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\ ,\ f(2) = 4$$

si possono ottenere i seguenti 5 punti del grafico di f:

$$(0, 0)\ ,\ (1, 1)\ ,\ (-1, 1)\ ,\ \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)\ ,\ (2, 4).$$

Ottenere però il grafico di una funzione per punti non è un buon modo di procedere. Ci sono metodi molto più efficaci, come vedremo.

Esercizio 1.1 Per ciascuna delle seguenti funzioni si determini il relativo dominio (insieme di definizione).[2]

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{1+x}$ (b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}}$ (d) $f(x) = \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$ (f) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$

(g) $f(x) = \sqrt{1 - |1-x|}$ (h) $f(x) = \ln\left(1 - \ln x\right)$

Esercizio 1.2 Per ciascuna delle seguenti funzioni si dica che curva del piano è il relativo grafico.

(a) $f(x) = 1 - x + x^2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ (d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(e) $f(x) = 1 - \sqrt{2 - (x-1)^2}$ (f) $f(x) = -\sqrt{1 - 2x^2}$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ (h) $f(x) = -\sqrt{x^2 - 2}$

2 Funzioni elementari

Con il termine *funzioni elementari* intenderò le *funzioni potenza*, le *funzioni esponenziali* e le *funzioni logaritmiche*.

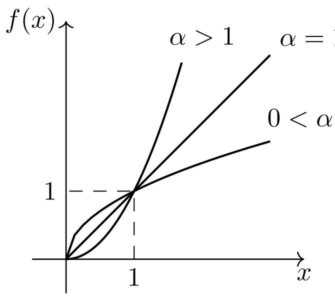
2.1 Funzione potenza

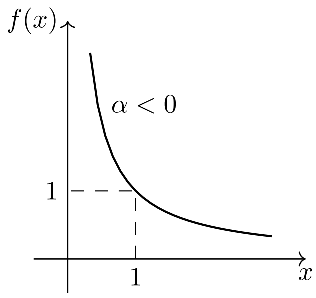
Viene definita attraverso l'espressione $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \neq 0$. Il dominio e le proprietà della funzione potenza dipendono dall'esponente α. Ricordando quanto detto nella prima parte sulla definizione di potenza, occorre distinguere alcuni casi, a seconda dell'insieme cui appartiene appunto l'esponente α.

- Se $\alpha \in \mathbb{N}$, la funzione potenza è definita su tutto $\mathbb{R}$.
- Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, la funzione potenza è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Se $\alpha \in \mathbb{Q}$ oppure $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la funzione potenza è definita in $\mathbb{R}^+$, cioè in $(0, +\infty)$.

Fornisco qui sotto i grafici delle funzioni potenza, limitandomi a tracciarli in $(0, +\infty)$.

[2] Si tratta di trovare qual è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui la funzione risulta definita, cioè ha senso l'espressione analitica che definisce f.





Si può osservare che la funzione potenza in $(0, +\infty)$ è crescente se $\alpha > 0$, mentre è decrescente se $\alpha < 0$.

I grafici in tutto $\mathbb{R}$, quando la funzione è definita anche sui reali negativi, si possono ottenere facilmente in base a considerazioni sulla simmetria: se $\alpha \in \mathbb{N}$, la funzione x^α è pari se α è pari, e invece è dispari se α è dispari.

Lo stesso se $\alpha \in \mathbb{Z}$, con $\alpha < 0$, dato che in questi casi $x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$.

Facciamo ora alcune considerazioni sull'invertibilità della funzione potenza.

- Consideriamo la funzione potenza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$. La funzione f non è invertibile, dato che non è iniettiva. Se però considero la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$ ottengo una funzione iniettiva, che è dunque invertibile qualora consideri come suo codominio la sua immagine, che è $[0, +\infty)$. Quindi la funzione

  $$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \text{ , con } f(x) = x^2$$

  è invertibile e la sua funzione inversa è la

  $$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \text{ , con } f^{-1}(y) = \sqrt{y} = y^{1/2}.$$ [3]

- Consideriamo la funzione potenza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3$. La funzione f è invertibile, dato che è iniettiva e suriettiva. La sua funzione inversa è la funzione

  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ , con } f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}.$$ [4]

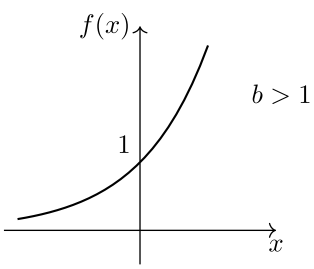
- Consideriamo la funzione potenza $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^\alpha$, con α reale non razionale (potrebbe essere ad esempio $x^{\sqrt{2}}$). La funzione è iniettiva ma non suriettiva, dato che comunque il valore della potenza è positivo. Basta però semplicemente cambiare il codominio di f in $(0, +\infty)$: la funzione $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, con $f(x) = x^\alpha$, è invertibile e la sua funzione inversa è

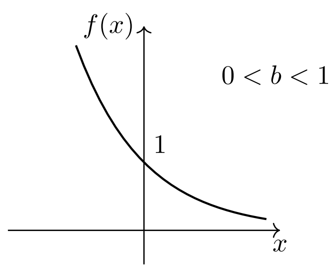
  $$f^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty) \text{ , con } f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}.$$

2.2 Funzione esponenziale

Funzione esponenziale di base b è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = b^x$. [5]

Ecco i grafici della funzione esponenziale.





[3]Qui si è preferito indicare l'argomento della funzione inversa con la lettera y, per mantenere le notazioni usate precedentemente nella trattazione generale della funzione inversa. È chiaro che non sarebbe cambiato nulla usando la x anche per l'argomento di f^{-1}.

[4]Si noti che qui dovremmo evitare di scrivere $f^{-1}(y) = y^{1/3}$, dato che la potenza con esponente razionale è stata definita solo con base positiva. Volendo scrivere il radicale come potenza sarebbe più opportuno scrivere

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y^{1/3} & y \geq 0 \\ -|y|^{1/3} & y < 0. \end{cases}$$

[5]Il numero b deve essere positivo. Il caso $b = 1$ è poco significativo, dato che si ottiene una funzione costante.

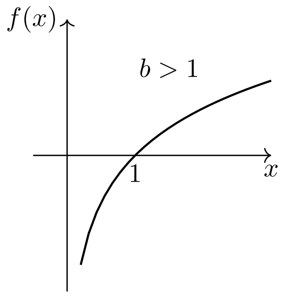
Si osservi che la funzione esponenziale di base b è crescente in tutto $\mathbb{R}$ se $b > 1$, mentre è decrescente in tutto $\mathbb{R}$ se $b < 1$. Assume comunque valori sempre positivi. La sua immagine in entrambi i casi è l'intervallo $(0, +\infty)$.

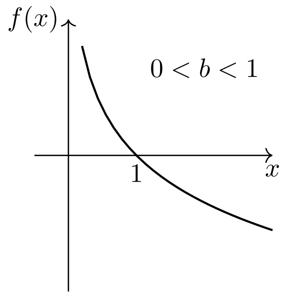
Tutte queste proprietà della funzione esponenziale si potrebbero dimostrare rigorosamente.

La funzione esponenziale di base b, con dominio tutto $\mathbb{R}$ e codominio $(0, +\infty)$, è invertibile. La sua funzione inversa è la funzione logaritmica, sempre di base b. [6]

2.3 Funzione logaritmica

Funzione logaritmica di base b è la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \log_b x$. [7]





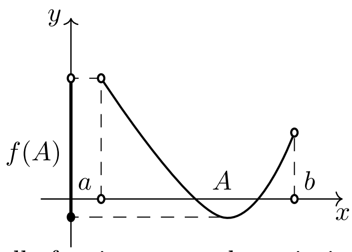
Si osservi che la funzione logaritmica di base b è crescente nel suo dominio se $b > 1$, mentre è decrescente nel suo dominio se $0 < b < 1$. Può assumere tutti i valori reali. La sua immagine in entrambi i casi è quindi tutto $\mathbb{R}$.

La funzione logaritmica di base b è invertibile e la sua funzione inversa è ovviamente la funzione esponenziale.

3 Immagine ed estremo superiore di una funzione reale

Come già visto per le funzioni nel caso generale, l'immagine di f è l'insieme dei valori (ora reali) che la funzione può assumere al variare del suo argomento.
Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale, la sua immagine è l'insieme

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \ : \ x \in A\}.$$ [8]



Se lo studente sta pensando alla rappresentazione, faccio notare che l'immagine della funzione, essendo un insieme di valori, dobbiamo pensarlo rappresentato nell'asse y. Nella figura qui sopra è rappresentato il caso di un insieme A dato da un intervallo aperto (a, b). Si noti che nel caso considerato l'immagine $f(A)$ non è un intervallo aperto (ma in altri casi può esserlo, dipende da come è fatta la funzione). Nell'esempio rappresentato l'immagine è un intervallo chiuso in basso e aperto in alto.

Un numero reale y sta nell'immagine di f se esiste un valore $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Utilizzando questa considerazione non è difficile trovare l'immagine delle funzioni nei due esempi che seguono.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$. Osservando che se $y \geq 0$, l'equazione $x^2 = y$ ha soluzione mentre se $y < 0$, l'equazione $x^2 = y$ non ha soluzione, si deduce che l'immagine di f è l'intervallo $[0, +\infty)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3$. Osservando che, qualunque sia $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $x^3 = y$ ha soluzione, si deduce che l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione Abbiamo parlato finora di immagine di tutta la funzione, cioè di tutto il suo dominio. Lo studente ricorderà che si può definire l'immagine anche di un sottoinsieme del dominio.

[6] Questo deriva da relazioni già note. Infatti, se poniamo $f(x) = b^x$ e $g(y) = \log_b y$, abbiamo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b^x) = \log_b(b^x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = b^{\log_b y} = y, \ \forall y \in (0, +\infty).$$

Pertanto le due funzioni sono una inversa dell'altra.

[7] Il numero b, cioè la base del logaritmo, deve essere positivo e diverso da 1.

[8] Trattandosi dell'insieme degli $f(x)$, con $x \in A$, è chiaramente un sottoinsieme del codominio.

Esercizio 3.1 Per le funzioni elementari seguenti si determinino le immagini a fianco indicate.

(a) $f(x) = x^2$: l'immagine di f, $f(0,1)$,[9] $f[-1,2]$, $f(-1,+\infty)$;

(b) $f(x) = 2^x$: l'immagine di f, $f(0,1)$, $f(-1,2)$, $f(-\infty,1)$;

(c) $f(x) = \log_2 x$: l'immagine di f, $f(0,1)$, $f(\frac{1}{2},2)$, $f(1,+\infty)$.

Di particolare importanza è il concetto di **estremo superiore** e di **estremo inferiore** di una funzione reale. Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si definisce

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f \stackrel{\text{def}}{=} \sup f(A) = \sup \{ f(x) \ : \ x \in A \}$$

e analogamente

$$\inf_{x\in A} f(x) = \inf f \stackrel{\text{def}}{=} \inf f(A) = \inf \{ f(x) \ : \ x \in A \}.$$

Non sono necessari molti commenti: l'estremo superiore (inferiore) di una funzione non è altro che l'estremo superiore (inferiore) della sua immagine.

Può succedere che l'immagine di f non sia superiormente limitata: si può scrivere allora $\sup f = +\infty$. Se l'immagine di f non è inferiormente limitata si può scrivere $\inf f = -\infty$.

Nel primo dei due esempi visti sopra, l'inf della funzione x^2 è 0, mentre il sup è $+\infty$. Nel secondo, per la funzione x^3, si ha $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$.

Altri esempi: per la funzione $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$ si ha $\sup f = 4$ e $\inf f = 0$; per la funzione $f : (-2,-1) \cup (0,1) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$ si ha $\sup f = 4$ e $\inf f = 0$.

Può succedere che una funzione reale abbia **massimo** (o **minimo**). Se la sua immagine ha massimo (o minimo), questo viene detto il massimo (o minimo) della funzione (si indicano con $\max f$ e con $\min f$).

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$, ha minimo e si ha $\min f = 0$; invece non ha massimo.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3$, non ha né massimo né minimo.

La funzione $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$, ha massimo e minimo e si ha $\max f = 4$ e $\min f = 0$; infine la funzione $f : (-2,-1) \cup (0,1) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$, non ha né massimo né minimo.

Esercizio 3.2 Si determinino gli estremi (estremo inferiore ed estremo superiore) delle seguenti funzioni. Si precisi inoltre se i valori trovati sono il massimo e/o il minimo della funzione.

(a) $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$

(b) $f : (-\infty,0) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$

(c) $f : (-\infty,0) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = e^x$

(d) $f : [2,4) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \log_2 x$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

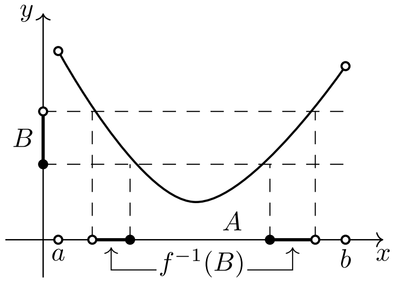
(g) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = 3^{-x}$

(h) $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \ln x$

4 Controimmagine o immagine inversa di una funzione reale

Parlando di funzioni in generale abbiamo visto la definizione di controimmagine (immagine inversa) di un insieme attraverso una funzione. Ricordo che, data una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}$, si chiama controimmagine di B attraverso f l'insieme

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in A \ : \ f(x) \in B \}.$$ [10]



Fissato quindi un certo insieme di valori (cioè B), la sua controimmagine è data dagli x tali che $f(x)$ è uno dei valori fissati.

Attenzione. Il concetto di controimmagine è tradizionalmente ostico a molti studenti. Vediamo qualche esempio.

[9] In tutti questi esercizi scrivo ad esempio $f(0,1)$ per semplicità, anziché $f((0,1))$ come sarebbe forse più corretto. La scrittura indica l'immagine dell'intervallo $(0,1)$ attraverso la funzione f.

[10] Non si faccia confusione: B è un sottoinsieme del codominio e la sua controimmagine è invece un sottoinsieme del dominio.

Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$.

  Se ad esempio $B = (-\infty, 0)$, si ha $f^{-1}(B) = \emptyset$: per nessun x si può avere $x^2 < 0$. Se $B = (-\infty, 0]$, si ha $f^{-1}(B) = \{0\}$: solo $x = 0$ ha un quadrato che sta in B. Se $B = (-\infty, 1)$, si ha $f^{-1}(B) = (-1, 1)$: si tratta in pratica di risolvere la disequazione $x^2 < 1$, che come noto ha per soluzioni $-1 < x < 1$. Se $B = [-1, 4]$, si ha $f^{-1}(B) = [-2, 2]$. Se $B = (0, 4]$, si ha $f^{-1}(B) = [-2, 0) \cup (0, 2]$. Fare sempre attenzione al tipo di parentesi.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3$.

  Se ad esempio $B = (-\infty, 0)$, si ha $f^{-1}(B) = (-\infty, 0)$, dato che le soluzioni di $x^3 < 0$ sono le $x < 0$. Se $B = [-1, 1]$, si ha $f^{-1}(B) = [-1, 1]$, dato che $-1 \leq x^3 \leq 1$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1$. Se $B = (-8, 8)$, si ha $f^{-1}(B) = (-2, 2)$.

Esercizio 4.1 Per le funzioni elementari seguenti si determinino le immagini e le controimmagini a fianco indicate.

(a) $f(x) = x^2$: $f[1,2]$, $f[-2,1]$, $f^{-1}(-1,1)$, $f^{-1}(1,2]$ [11]

(b) $f(x) = x^3$: $f(-\infty,1)$, $f(-3,2)$, $f^{-1}(-1,2)$, $f^{-1}(2,3)$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$: $f(1,2)$, $f(3,+\infty)$, $f^{-1}(-1,1)$, $f^{-1}(-\infty,4)$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$: $f(1,2)$, $f(-\infty,-1)$, $f^{-1}(-1,+\infty)$, $f^{-1}(-3,4)$

(e) $f(x) = 2^x$: $f(-1,2)$, $f(0,+\infty)$, $f^{-1}(-\infty,0]$, $f^{-1}(-\infty,2)$

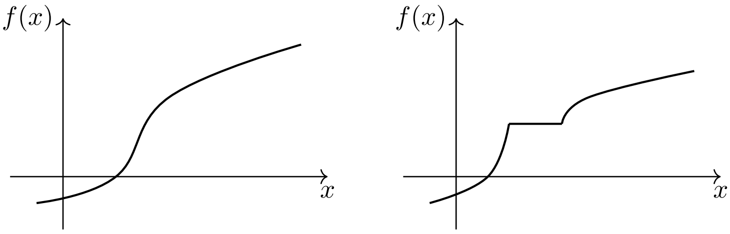
(f) $f(x) = \log_2 x$: $f(1,4)$, $f(0,16)$, $f^{-1}(1,+\infty)$, $f^{-1}(-\infty,-1)$

5 Proprietà delle funzioni reali

Per le funzioni reali esistono alcune proprietà rilevanti.

(i) Una proprietà importante è la **monotonia**, che si distingue in alcune particolari tipologie, che ora definiamo. Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo (è importante che la funzione sia definita in un intervallo).

- La funzione f è **crescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2).$$
- La funzione f è **non decrescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2).$$
- La funzione f è **decrescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2).$$
- La funzione f è **non crescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2).$$



funzione crescente funzione non decrescente

Osservazione A volte, per rimarcare la differenza tra funzione crescente e non decrescente si dice, per la prima, "strettamente crescente" o anche "crescente in senso stretto". Chiaramente una funzione crescente è anche non decrescente, ma il viceversa può essere falso, come nell'esempio di destra qui sopra. Detto in parole povere, una funzione crescente "cresce sempre", mentre una non decrescente può ad esempio essere in alcuni tratti costante.

[11] Anche qui scrivo $f^{-1}(1,2]$ per semplicità, anziché $f^{-1}((1,2])$, che sarebbe più corretto. La notazione indica la controimmagine dell'intervallo $(1,2]$.

(ii) Ovviamente tutte le proprietà già viste nel caso generale possono essere proprietà delle funzioni reali. Così ad esempio l'*iniettività* e *suriettività*: le definizioni sono ovviamente le stesse.

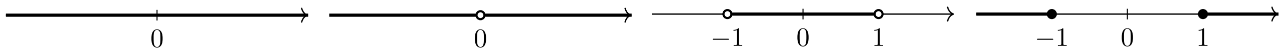
(iii) Particolare importanza ha l'**invertibilità**. Sussiste anche qui naturalmente il risultato, del tutto generale, che una funzione è invertibile se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

(iv) Altre proprietà rilevanti sono le *simmetrie*. Noi consideriamo solo due particolari tipi di simmetria.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè un insieme con la proprietà che

$$\text{se } x \in A, \text{ allora } -x \in A.$$

Alcuni esempi di insiemi simmetrici rispetto all'origine sono:



$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ $(-1,1)$ $\quad$ $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

Sia ora $f : A \to \mathbb{R}$, con A simmetrico rispetto all'origine.

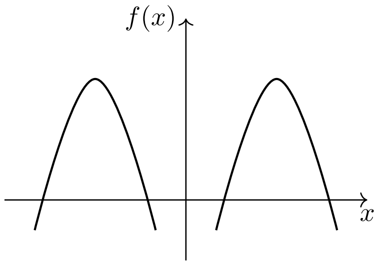
- La funzione f è *pari (o simmetrica rispetto all'asse delle ordinate)* se

$$f(-x) = f(x), \ \forall x \in A.$$

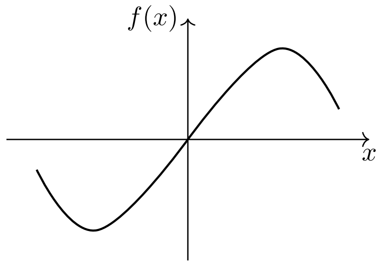
- La funzione f è *dispari (o simmetrica rispetto all'origine)* se

$$f(-x) = -f(x), \ \forall x \in A.$$

Sapere che una funzione ha una simmetria di qualche tipo può facilitare il disegno del suo grafico. Se ad esempio so che la funzione f è pari e conosco il suo grafico sui reali positivi, allora il grafico sui reali negativi si ottiene facilmente per simmetria dal primo: si tratta appunto del grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



funzione pari



funzione dispari

Esempi Sono pari tutte le funzioni del tipo $x \to x^p$, dove p è un numero naturale pari; sono dispari tutte le funzioni del tipo $x \to x^d$, dove d è un numero naturale dispari (la denominazione deriva da questo).

La funzione $x \to \sqrt{1+x^2}$ è pari, dato che $\sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione $x \to \sqrt[3]{x}$ è dispari, dato che $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.1 Le seguenti funzioni sono invertibili nel loro dominio. Si determini l'espressione della relativa funzione inversa.

(a) $f(x) = e^{1-x}$ $\quad$ (b) $f(x) = 1 - 2^{x+1}$ $\quad$ (c) $f(x) = 1 + \ln(1+2x)$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $\quad$ (e) $f(x) = 2\ln(x^3+1)$ $\quad$ (f) $f(x) = \ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$

Esercizio 5.2 Si provi che le seguenti funzioni sono simmetriche e si dica quale tipo di simmetria presentano.

(a) $f(x) = x^2 + x^4$ $\quad$ (b) $f(x) = x^3 - x^5$ $\quad$ (c) $f(x) = \ln(1+x^2)$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad$ (e) $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln(1+x^4)}$ $\quad$ (f) $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

Osservazione Un'osservazione prima di chiudere questo paragrafo. Parlando di proprietà delle funzioni reali, una distinzione che spesso si fa e che incontreremo nel seguito è quella tra proprietà *locali* e proprietà *globali*. Una proprietà di una funzione f si dice locale se vale in un intorno di un punto x del dominio di f.[12] Si dice invece globale se vale in tutto il dominio di f.

Le proprietà viste in questo paragrafo, la monotonia, l'iniettività, la suriettività, l'invertibilità, la simmetria, sono tutte di carattere globale.

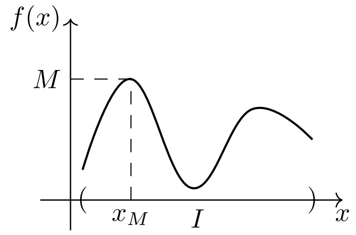
Tipicamente, per dimostrare una proprietà globale sono necessarie ipotesi forti, per dimostrare una proprietà locale bastano ipotesi più deboli.

A proposito di proprietà locali o globali, possiamo dare qui alcune definizioni importanti. Abbiamo visto in precedenza in questo capitolo la definizione di *massimo* e di *minimo* di una funzione. I concetti di massimo e di minimo sono concetti globali, perché riguardano tutto il dominio della funzione: in realtà riguardano l'immagine, ma questa dipende a sua volta da tutto il dominio.

Intanto diamo questa

Definizione Data una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama **punto di massimo globale** di f ogni punto in cui essa assume il suo massimo.[13] Se $x_M \in I$ è punto di massimo globale di f vale allora la seguente proprietà:

$$f(x_M) \geq f(x), \text{ per ogni } x \in I.$$



Analogamente per i punti di minimo globale.

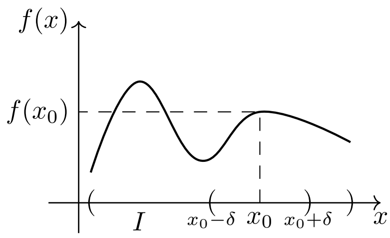
Esempio Per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = (x-1)^2$, il punto $x = 1$ è punto di minimo globale. Non si faccia mai confusione: se dico punto di minimo globale alludo alle x, mentre se dico minimo alludo ai valori della funzione. Nel nostro caso l'immagine di f è l'intervallo $[0, +\infty)$ e quindi il minimo di f è zero, mentre il punto in cui f assume il valore zero è $x = 1$.

Ora però si può definire una particolare situazione, in genere interessante e possibilmente significativa, di massimo o minimo, ma non globali. In pratica possiamo pensare ad un punto x_0 in cui la funzione abbia massimo, ma limitatamente ad un intorno di x_0.

Ecco la definizione formale:

Definizione Data una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama **punto di massimo locale** di f ogni punto $x_0 \in I$ tale che esista un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contenuto in I per cui

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$ [14]



Osservazioni Ci possono essere punti che sono di massimo (minimo) locale ma non di massimo (minimo) globale.[15] Si veda la figura qui sopra. In generale non è detto che ogni funzione abbia punti di massimo, e questo vale sia per

[12] L'intorno potrebbe essere piccolissimo, anche se abbiamo già osservato che questa espressione è priva di ogni significato. Rende comunque l'idea spero.

[13] Quindi, se poniamo $M = \max f$, ogni punto $x_M \in I$ in cui si abbia $f(x_M) = M$ è punto di massimo globale. L'aggettivo globale si usa proprio per rimarcare che si tratta di una proprietà globale e anche per distinguerlo da quello che segue.

[14] Sarebbe bene formulare la proprità del punto di massimo locale scrivendo

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

per consentire anche agli estremi dell'intervallo di poter essere punti di massimo locale. Si pensi al caso di un intervallo chiuso. Alternativamente si potrebbe precisare che l'intorno può essere un intorno destro se x_0 coincide col primo estremo dell'intervallo e un un intorno sinistro se x_0 coincide col secondo.

[15] Invece, se un punto è di massimo (minimo) globale allora è anche di massimo (minimo) locale. Facile da capire. Lo studente cerchi di farsene una ragione.

quelli globali sia per quelli locali. In particolare non è detto che, se non ne ha di globali, ne abbia necessariamente di locali. Si pensi ad esempio ad una funzione strettamente monotona in un intervallo aperto, che non ha punti di massimo di nessun tipo e nemmeno di minimo.

6 Altri esempi di funzioni, non elementari

Qui vediamo alcune funzioni che non rientrano tra quelle appena viste.

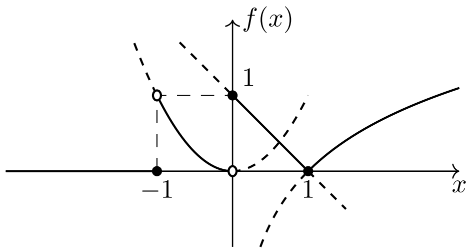
6.1 Funzioni definite a tratti

È opportuno famigliarizzarsi subito con funzioni che non sono elementari ma che lo sono su particolari intervalli del loro dominio. Vediamo subito un semplice esempio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ x^2 & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 \le x < 1 \\ \ln x & x \ge 1. \end{cases}$$

Questa funzione si dice *definita a tratti*, intendendo che è definita con espressioni diverse (tutte elementari in questo caso) su particolari intervalli del suo dominio, che nel complesso è tutto $\mathbb{R}$.

Ricordando i grafici delle funzioni elementari, il grafico di f si ottiene facilmente (è dato dai tratti più marcati):



Unico doveroso commento. Che cosa significano i "pallini pieni" e "pallini vuoti"? Il pallino pieno in corrispondenza di $x = -1$ sta ad indicare che il valore della funzione f in corrispondenza di $x = -1$ (cioè $f(-1)$) è 0 (attenzione che il valore si legge sulle y). Il pallino vuoto in corrispondenza di $x = -1$ sta ad indicare che il valore di f in corrispondenza di $x = -1$ non è 1. Analogamente per $x = 0$: il valore di $f(0)$ è 1 e non 0. In $x = 1$ il valore della funzione è 0 (il pallino vuoto non c'è o non si vede, dato che è sovrapposto a quello pieno).

6.2 Funzione valore assoluto

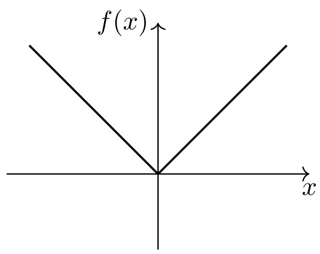
Sappiamo già che cos'è il valore assoluto di un numero reale. Possiamo definire la funzione valore assoluto semplicemente ponendo

$$f(x) = |x|.$$

Ricordando la definizione di valore assoluto di x abbiamo che

$$f(x) = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Si tratta quindi di una funzione definita a tratti. Il grafico è naturalmente questo:

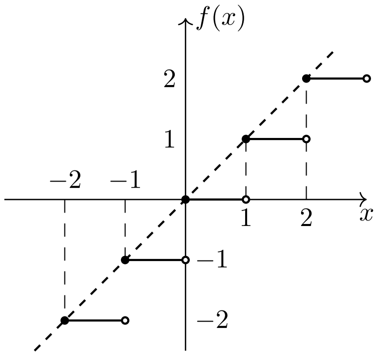


6.3 Funzione parte intera

Sebbene non importante come la precedente, vediamo anche la funzione parte intera, che potrà servire più avanti in qualche esempio. Definiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \overset{\text{def}}{=} \max\left\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\right\}.$$ [16]

Per ottenere il grafico della funzione parte intera si può osservare che, dato un qualunque numero intero z, se $x \in [z, z+1)$, allora $\lfloor x \rfloor = z$. [17] Quindi la funzione è costante sugli intervalli del tipo $[z, z+1)$, e quindi il grafico della funzione parte intera è il seguente (è sempre dato dai tratti più marcati):



Osservazione Anche la funzione parte intera è una funzione definita a tratti, l'unica differenza (peraltro di notevole importanza teorica) è che per definirla sugli intervalli occorre un numero infinito di intervalli.

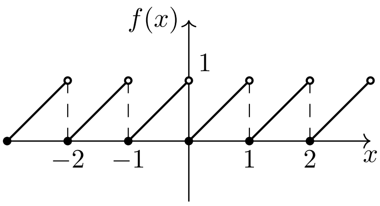
Esempio Fornisco un altro esempio di funzione, che utilizza la parte intera, e che più avanti ci sarà utile. Si consideri

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Ricordando, come appena visto, che se $x \in [z, z+1)$, allora $\lfloor x \rfloor = z$, abbiamo

$$f(x) = x - z \text{ , se } x \in [z, z+1),$$

e cioè $f(x)$ vale x in $[0,1)$, vale $x-1$ in $[1,2)$, vale $x-2$ in $[2,3)$, e così via. Quindi il grafico è il seguente:



7 Grafici di funzioni e curve nel piano

Abbiamo detto all'inizio di questa sezione che il grafico di una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è il sottoinsieme G_f del piano definito da

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x), x \in A\right\}.$$

Abbiamo poi visto, nei numerosi esempi di funzioni elementari, che i grafici sono generalmente certe curve nel piano. Può sorgere la domanda se le curve nel piano che abbiamo studiato nella sezione di geometria analitica della prima parte del corso siano tutte grafici di opportune funzioni reali. La risposta è negativa e il motivo risiede nella definizione stessa di funzione. Infatti, se f è una funzione, per ogni $x \in \mathbb{R}$ (o per ogni $x \in A$, se f è definita in A) esiste *un solo* $f(x)$. In altre parole, se f è una funzione, il suo grafico deve avere questa proprietà: ogni retta verticale del piano può incontrare il grafico di f *al più in un punto*.[18]

[16] La parte intera di x è il più grande numero intero minore o uguale ad x. Alcuni esempi: se x è un numero intero, ovviamente la sua p.i. coincide con x (e questo è l'unico caso in cui i due coincidono); $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, $\lfloor e \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -e \rfloor = -3$, ...

[17] Si noti la parentesi in $z+1$: è tonda, cioè escludo $z+1$ dall'intervallo. Infatti $\lfloor z+1 \rfloor = z+1$ e non z.

[18] Significa quindi che lo incontra o in nessun punto o in un punto solo. Dobbiamo prevedere infatti che la funzione non sia definita in tutto $\mathbb{R}$ e quindi che ci siano rette di equazione $x = t$ che non incontrano mai il grafico: sono quelle per cui t non sta nel dominio di f.

Se chiamiamo per comodità *proprietà caratteristica* dei grafici quella appena enunciata, si vede subito che ad esempio, parlando di parabole, non tutte hanno la proprietà caratteristica: infatti solo quelle con asse parallelo all'asse y hanno tale proprietà, le altre no. Le parabole con asse parallelo all'asse x non sono quindi grafici di funzioni reali.[19]

Allora ad esempio,

- il grafico della funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = x^2 + 1$$
è una parabola nel piano, precisamente la parabola di equazione esplicita $y = x^2 + 1$ o equazione generale $x^2 - y + 1 = 0$ se si preferisce.

- la parabola di equazione $x + y^2 + 1 = 0$ non è grafico di alcuna funzione reale (salvo, come si diceva nella nota poco fa, uno scambio degli assi).

- E che dire del grafico della funzione
$$f : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = \sqrt{-x-1}\ ?$$
La presenza di una radice quadrata sembrerebbe precludere legami con le parabole. Se però eleviamo al quadrato nell'equazione $y = \sqrt{-x-1}$ otteniamo $x + y^2 + 1 = 0$, che è l'equazione della parabola del punto precedente. Attenzione però. Anzitutto occorre osservare, come indicato nella definizione di f, che la funzione non è definita in tutto $\mathbb{R}$, ma solo in $(-\infty, -1]$. Inoltre i valori che la funzione assume sono soltanto valori non negativi. È evidente allora che il grafico non può essere tutta la parabola, ma è una parte di questa, la parte che sta al di sopra (meglio non al di sotto) dell'asse delle x.[20]

Le circonferenze non sono mai grafici di funzioni reali, dato che ci sono rette verticali che incontrano la circonferenza in due punti. Lo stesso dicasi per le ellissi. Però può accadere quello che abbiamo appena visto con le parabole: si consideri la funzione
$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$
L'equazione $y = \sqrt{1-x^2}$, elevando al quadrato, diventa $x^2 + y^2 = 1$, che è l'equazione della circonferenza con centro l'origine e raggio 1. Come prima però il grafico non è tutta la circonferenza, perché l'equivalenza tra le due equazioni sussiste solo con $y \geq 0$. Quindi il grafico della funzione è una semicirconferenza, quella che sta sul semipiano delle y non negative.

Ovviamente anche la semicirconferenza che sta sul semipiano delle y non positive è grafico di una funzione (ha la proprietà caratteristica): è la funzione
$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

In generale le funzioni definite da
$$f(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \qquad \text{oppure} \qquad f(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$
(il caso precedente è un caso paricolare della prima di queste due, con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $r = 1$) hanno per grafico una semicirconferenza, di centro il punto (x_0, y_0) e raggio r. Si noti che entrambe sono definite quando $r^2 - (x - x_0)^2 \geq 0$, cioè se $(x - x_0)^2 \leq r^2$, cioè $|x - x_0| \leq r$: si tratta dell'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Per quanto riguarda le iperboli, si possono in realtà presentare due casi, in base alle tipologie di iperboli che abbiamo studiato in precedenza. La funzione
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = \frac{1}{x}$$
ha per grafico un'iperbole. Infatti è definita per $x \neq 0$ e per tali valori l'equazione $y = \frac{1}{x}$ equivale alla $xy = 1$, che è l'equazione di un'iperbole. Più in generale, in questa tipologia rientrano tutte le funzioni del tipo
$$f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = y_0 + \frac{c}{x - x_0}.$$

[19] Stiamo parlando ovviamente di funzioni da x a y, cioè di funzioni che rappresentiamo come di consueto utilizzando l'asse delle ascisse per la variabile e l'asse delle ordinate per i valori della funzione. Se rappresentassimo una funzione usando l'asse y per la variabile e l'asse x per i valori, sarebbero le parabole con asse parallelo all'asse x ad essere grafici di funzioni.

[20] Come si risolve allora la questione: se l'equazione $y = \sqrt{-x-1}$ equivale alla $x + y^2 + 1 = 0$, perché il grafico è soltanto una parte della parabola? Il fatto è che *non* è vero che l'equazione $y = \sqrt{-x-1}$ equivalga alla $x + y^2 + 1 = 0$! L'equivalenza sussiste solo se ambo i membri sono non negativi, cioè se $y \geq 0$, ed ecco che i conti tornano.

Infatti l'equazione $y = y_0 + \frac{c}{x-x_0}$ equivale alla $(x - x_0)(y - y_0) = c$, che è l'equazione di un'iperbole. Il caso precedente è un caso particolare di questo, con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $c = 1$.

Anche la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

ha legami con un'iperbole: infatti elevando al quadrato otteniamo $x^2 - y^2 = 1$, che sappiamo essere l'equazione di un'iperbole. Però anche qui il grafico non coincide con tutta l'iperbole. E non si tratta in questo caso di uno dei due rami, come forse si potrebbe pensare. Ricordando quanto visto nella geometria analitica, l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ interseca l'asse x e non l'asse y (i suoi rami stanno a destra e a sinistra dell'origine, per così dire): il grafico della funzione è la parte di iperbole che sta nel semipiano delle y non negative ed è fatto di due parti distinte. Si noti che la funzione è definita quando $x^2 - 1 \geq 0$, cioè nell'insieme $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Per finire, anche la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

ha legami con un'iperbole: elevando al quadrato otteniamo $x^2 - y^2 = -1$, che è ancora l'equazione di un'iperbole, che questa volta ha i due rami sopra e sotto l'origine. Il grafico di f questa volta coincide con uno dei due rami dell'iperbole, quello che sta sopra l'origine.

8 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{1+x}$. Le condizioni per l'esistenza della funzione sono date soltanto dalla presenza del denominatore: la radice è una radice terza e quindi è definita per ogni valore per cui è definito il suo argomento. Quindi il dominio (o campo di esistenza) di f è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$. Qui il dominio è determinato da due condizioni di esistenza, che devono valere contemporaneamente: l'argomento del logaritmo deve essere positivo e l'argomento della radice (questa volta di indice pari) deve essere non negativo. Il dominio è dato allora dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Si tratta quindi dell'intervallo $[1, +\infty)$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}}$. Il dominio è determinato da due condizioni di esistenza: l'argomento della radice deve essere non negativo e il denominatore deve essere diverso da zero: sintetizzando, l'argomento della radice deve essere strettamente positivo. Quindi il dominio è dato dalle soluzioni della disequazione

$$1 - e^x > 0, \text{ cioè } e^x < 1, \text{ cioè } x < 0.$$

Pertanto il dominio è l'intervallo $(-\infty, 0)$.

(d) $f(x) = \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$ Le condizioni di esistenza sono due: argomento della radice non negativo e argomento del logaritmo positivo. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < 1. \end{cases}$$

Pertanto il dominio è l'intervallo $[0, 1)$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln x}$ Le condizioni sono: argomento del logaritmo positivo e denominatore diverso da zero. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e. \end{cases}$$

Pertanto il dominio è l'insieme $(0, e) \cup (e, +\infty)$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$. Le condizioni sono: argomento del logaritmo positivo e argomento della radice non negativo. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln^2 x \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \leq 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \ln x \leq 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ e^{-1} \leq x \leq e. \end{cases}$$

Pertanto il dominio è l'intervallo $[e^{-1}, e]$.

(g) $f(x) = \sqrt{1 - |1 - x|}$. La condizione è soltanto che l'argomento della radice sia non negativo. Quindi abbiamo la disequazione

$$1 - |1 - x| \geq 0, \ \text{cioè} \ |1 - x| \leq 1.$$

Questa equivale a

$$-1 \leq x - 1 \leq 1, \ \text{cioè} \ 0 \leq x \leq 2.$$

Pertanto il dominio è l'intervallo $[0, 2]$.

(h) $f(x) = \ln\big(1 - \ln x\big)$. Le condizioni sono la positività degli argomenti dei due logaritmi. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < e. \end{cases}$$

Pertanto il dominio è l'intervallo $(0, e)$.

Esercizio 1.2

(a) $f(x) = 1 - x + x^2$ ha per grafico la parabola di equazione $y = 1 - x + x^2$ (basta porre $y = f(x)$).

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ ha per grafico l'iperbole di equazione $(x - 1)y = 1$, di asintoti le rette di equazione $x = 1$ e $y = 0$.

(c) Osserviamo che possiamo scrivere $f(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$. La funzione $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$ ha allora per grafico l'iperbole di equazione $(x - 2)(y - 1) = 1$, di asintoti le rette di equazione $x = 2$ e $y = 1$.

(d) L'equazione $y = \sqrt{4 - x^2}$ porta alla $x^2 + y^2 = 4$, che è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Però attenzione: quest'ultima ha per soluzione anche punti con $y < 0$, mentre la precedente no. Questo perché elevando al quadrato introduciamo nuove soluzioni (in altre parole le due equazioni non sono equivalenti). Consapevoli di questo fatto, possiamo concludere che il grafico di f è allora la parte di circonferenza che sta sul semipiano delle $y \geq 0$, cioè una semicirconferenza.

(e) L'equazione $y = 1 - \sqrt{2 - (x - 1)^2}$ porta alla $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, che è l'equazione della circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$. Il grafico di f è allora la corrispondente semicirconferenza che sta sul semipiano delle $y \leq 1$.[21]

(f) L'equazione $y = -\sqrt{1 - 2x^2}$ porta alla $2x^2 + y^2 = 1$,[22] che è l'equazione dell'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = 1$. Il grafico di f è allora la corrispondente semiellisse che sta sul semipiano delle $y \leq 0$.

(g) L'equazione $y = \sqrt{x^2 + 3}$ porta alla $y^2 - x^2 = 3$, che è l'equazione di un'iperbole con rami al di sopra e al di sotto dell'origine. Il grafico di f è allora il ramo superiore dell'iperbole.

(h) L'equazione $y = -\sqrt{x^2 - 2}$ porta alla $x^2 - y^2 = 2$, che è l'equazione di un'iperbole con rami a sinistra e a destra dell'origine. Il grafico di f è la parte di iperbole che sta nel semipiano delle y non positive.

[21] Infatti, riscrivendo la prima come $\sqrt{2 - (x - 1)^2} = 1 - y$, si può osservare che deve essere $1 - y \geq 0$, cioè $y \leq 1$.

[22] Elevando direttamente al quadrato, oppure riscrivendo $\sqrt{1 - 2x^2} = -y$ e poi elevando al quadrato si ottiene appunto $2x^2 + y^2 = 1$. Si noti che se eleviamo al quadrato l'equazione originaria abbiamo certamente il secondo membro non positivo, e quindi deve essere $y \leq 0$. Se invece eleviamo al quadrato la $\sqrt{1 - 2x^2} = -y$ dobbiamo osservare che $-y \geq 0$, cioè ancora $y \leq 0$.

Esercizio 3.1

Per aiutarsi nelle risposte lo studente è invitato a disegnarsi un grafico delle funzioni.

(a) Con $f(x) = x^2$ l'immagine di f è $[0, +\infty)$. Poi

$$f(0, 1) = (0, 1) \quad , \quad f[-1, 2] = [0, 4] \quad , \quad f(-1, +\infty) = [0, +\infty).$$

(b) Con $f(x) = 2^x$ l'immagine di f è $(0, +\infty)$. Poi

$$f(0, 1) = (1, 2) \quad , \quad f(-1, 2) = (\frac{1}{2}, 4) \quad , \quad f(-\infty, 1) = (0, 2).$$

(c) Con $f(x) = \log_2 x$ l'immagine di f è $(-\infty, +\infty)$. Poi

$$f(0, 1) = (-\infty, 0) \quad , \quad f(\frac{1}{2}, 2) = (-1, 1) \quad , \quad f(1, +\infty) = (0, +\infty).$$

Esercizio 3.2

Anche qui un grafico può essere molto utile.

(a) Dal grafico della funzione (si tratta della restrizione della funzione $x \mapsto x^2$ all'intervallo $[1, +\infty)$) si vede facilmente che

$$\inf_{x \in [1, +\infty)} f(x) = \min_{x \in [1, +\infty)} f(x) = f(1) = 1$$

e

$$\sup_{x \in [1, +\infty)} f(x) = +\infty.$$

L'immagine della funzione è l'intervallo $[1, +\infty)$.

(b) Questa volta si tratta della restrizione $x \mapsto x^2$ all'intervallo $(-\infty, 0)$ e si vede facilmente che

$$\inf_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 0 \quad (\min f \text{ non esiste})$$

e

$$\sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = +\infty.$$

L'immagine della funzione è l'intervallo $(0, +\infty)$.

(c) Si tratta della restrizione della funzione esponenziale all'intervallo $(-\infty, 0)$. L'immagine è l'intervallo $(0, 1)$. Quindi

$$\inf_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 0 \quad (\min f \text{ non esiste})$$

e

$$\sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 1 \quad (\max f \text{ non esiste}).$$

(d) Si tratta della restrizione della funzione logaritmica (base 2) all'intervallo $[2, 4)$. L'immagine è l'intervallo $[1, 2)$. Quindi

$$\inf_{x \in [2, 4)} f(x) = 1 = \min f$$

e

$$\sup_{x \in [2, 4)} f(x) = 2 \quad (\max f \text{ non esiste}).$$

(e) La funzione è la funzione esponenziale di base $\frac{1}{2}$ (oppure è la funzione $x \mapsto 2^{-x}$ se si preferisce). Dal grafico si vede che

$$\inf f = 0 \qquad \text{e} \qquad \sup f = +\infty.$$

(f) È una funzione potenza con esponente intero negativo ($f(x) = x^{-3}$). Si tratta di una funzione dispari, non limitata né inferiormente né superiormente. Quindi

$$\inf f = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup f = +\infty.$$

L'immagine della funzione è l'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(g) Ancora una funzione esponenziale ($f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$), o meglio la restrizione di questa all'intervallo $(0, +\infty)$. L'immagine della funzione è l'intervallo $(0, 1)$. Si ha quindi

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} f(x) = 1$$

e

$$\inf_{x\in(0,+\infty)} f(x) = 0.$$

Non esistono né il massimo né il minimo di f.

(h) Si tratta della restrizione della funzione $x \mapsto \ln x$ (base e) all'intervallo $(1, +\infty)$. L'immagine della funzione è l'intervallo $(0, +\infty)$ e quindi si ha

$$\inf_{x\in(1,+\infty)} f(x) = 0$$

e

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} f(x) = +\infty.$$

Il valore 0 non è il minimo: il minimo non esiste.

Esercizio 4.1

Per aiutarsi nelle risposte lo studente è invitato a disegnarsi un grafico delle funzioni.

(a) Con $f(x) = x^2$ abbiamo:

$$f[1, 2] = [1, 4] \quad , \quad f[-2, 1] = [0, 4] \quad , \quad f^{-1}(-1, 1) = (-1, 1) \quad , \quad f^{-1}(1, 2] = [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}].$$

(b) Con $f(x) = x^3$ abbiamo:

$$f(-\infty, 1) = (-\infty, 1) \quad , \quad f(-3, 2) = (-27, 8) \quad , \quad f^{-1}(-1, 2) = (-1, \sqrt[3]{2}) \quad , \quad f^{-1}(2, 3) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}).$$

(c) Con $f(x) = \sqrt{x}$ abbiamo:

$$f(1, 2) = (1, \sqrt{2}) \quad , \quad f(3, +\infty) = (\sqrt{3}, +\infty) \quad , \quad f^{-1}(-1, 1) = [0, 1) \quad , \quad f^{-1}(-\infty, 4) = [0, 16).$$

(d) Con $f(x) = \frac{1}{x}$ abbiamo:

$$f(1, 2) = (\tfrac{1}{2}, 1) \quad , \quad f(-\infty, -1) = (-1, 0) \quad , \quad f^{-1}(-1, +\infty) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

e infine $f^{-1}(-3, 4) = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$.

(e) Con $f(x) = 2^x$ abbiamo:

$$f(-1, 2) = (\tfrac{1}{2}, 4) \quad , \quad f(0, +\infty) = (1, +\infty) \quad , \quad f^{-1}(-\infty, 0] = \emptyset \quad , \quad f^{-1}(-\infty, 2) = (-\infty, 1).$$

(f) Con $f(x) = \log_2 x$ abbiamo:

$$f(1, 4) = (0, 2) \quad , \quad f(0, 16) = (-\infty, 4) \quad , \quad f^{-1}(1, +\infty) = (2, +\infty) \quad , \quad f^{-1}(-\infty, -1) = (0, \tfrac{1}{2}).$$

Esercizio 5.1

In questi esercizi non ci poniamo il problema se la funzione sia invertibile (l'invertibilità è data per ipotesi). Vogliamo soltanto trovare l'espressione della funzione inversa.

(a) $f(x) = e^{1-x}$. Si può procedere così: poniamo $y = e^{1-x}$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$1 - x = \ln y, \text{ quindi } x = 1 - \ln y.$$

Questa è l'espressione della funzione inversa. Si potrebbe anche scrivere $f^{-1}(y) = 1 - \ln y$ (si può seguire la consuetudine di indicare con y l'argomento della funzione inversa). Lo studente è invitato a riflettere su: dominio e immagine di f e dominio e immagine di f^{-1}.

(b) $f(x) = 1-2^{x+1}$. Poniamo $y = 1-2^{x+1}$; si ricava $2^{x+1} = 1-y$, quindi $x+1 = \log_2(1-y)$ e infine $x = \log_2(1-y)-1$. Quindi l'espressione della funzione inversa è $f^{-1}(y) = \log_2(1-y) - 1$.

(c) $f(x) = 1 + \ln(1 + 2x)$. Poniamo $y = 1 + \ln(1 + 2x)$, da cui $\ln(1 + 2x) = y - 1$, quindi $1 + 2x = e^{y-1}$, quindi $2x = e^{y-1} - 1$ e infine $x = \frac{1}{2}(e^{y-1} - 1)$. Si ha allora $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(e^{y-1} - 1)$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$. Poniamo

$$y = \sqrt[3]{1 + x},\ \text{quindi } 1 + x = y^3,\ \text{quindi } x = y^3 - 1.$$

Pertanto $f^{-1}(y) = y^3 - 1$.

(e) $f(x) = 2\ln(x^3 + 1)$. Poniamo

$$y = 2\ln(x^3 + 1), \text{ quindi } x^3 = e^{y/2} - 1, \text{ quindi } x = \sqrt[3]{e^{y/2} - 1}.$$

Pertanto $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{e^{y/2} - 1}$.

(f) $f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$. Poniamo

$$y = \ln\left(1 + \sqrt[3]{x}\right),\ \text{quindi } 1 + \sqrt[3]{x} = e^y,\ \text{quindi } \sqrt[3]{x} = e^y - 1,\ \text{quindi } x = (e^y - 1)^3.$$

Pertanto $f^{-1}(y) = (e^y - 1)^3$.

Esercizio 5.2

(a) La funzione $f(x) = x^2 + x^4$ è pari, dato che $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 = x^2 + x^4 = f(x)$.

(b) La funzione $f(x) = x^3 - x^5$ è dispari, dato che $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -f(x)$.

(c) La funzione $f(x) = \ln(1 + x^2)$ è pari, dato che $f(-x) = \ln(1 + (-x)^2) = \ln(1 + x^2) = f(x)$.

(d) La funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è dispari, dato che $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$.

(e) La funzione $f(x) = \frac{x^3}{\ln(1+x^4)}$ è dispari, dato che $f(-x) = \frac{(-x)^3}{\ln(1+(-x)^4)} = -\frac{x^3}{\ln(1+x^4)} = -f(x)$.

(f) Quest'ultima è un po' meno immediata. Con $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ si ha

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = (\text{moltiplicando sopra e sotto per } e^x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

Quindi f è dispari.

9 Appendice – Trasformazioni grafiche elementari

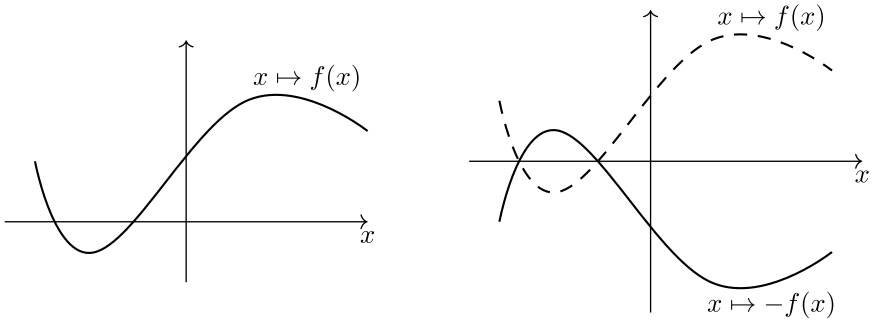
In questa appendice espongo alcune tecniche utili per ottenere grafici di funzioni che sono semplici trasformazioni di funzioni elementari. In particolare, data una funzione f di cui conosciamo il grafico, impareremo a disegnare il grafico delle funzioni

(a) $x \mapsto -f(x)$	(b) $x \mapsto \lvert f(x)\rvert$	(c) $x \mapsto f(x)+k$
(d) $x \mapsto f(-x)$	(e) $x \mapsto f(\lvert x\rvert)$	(f) $x \mapsto f(x+k)$
(g) $x \mapsto kf(x)$	(h) $x \mapsto f(kx)$	

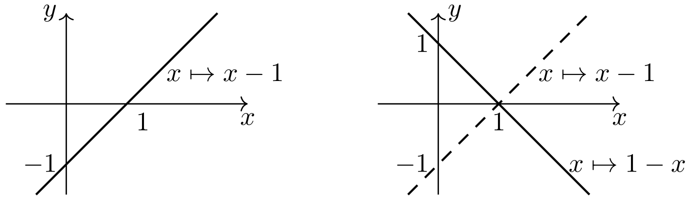
dove k è una costante, cioè un numero reale.

(a) Grafico di $x \mapsto -f(x)$.

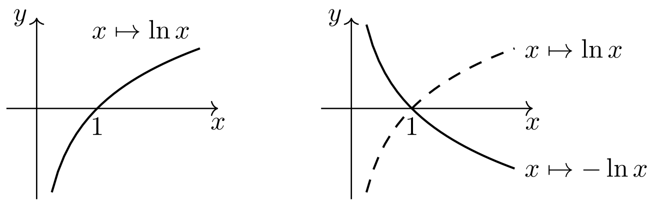
Detto a parole, basta capovolgere il grafico di f facendone il simmetrico rispetto all'asse x. Ecco un disegno che illustra la trasformazione:[23]



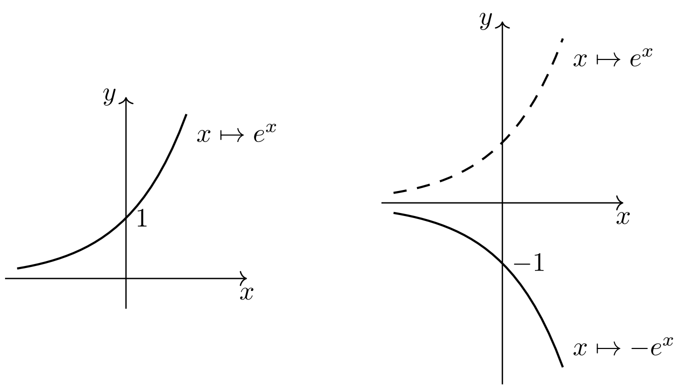
Esempio Grafico di $g(x) = 1 - x$. Dato che $g(x) = -(x-1)$, si ha:



Esempio Grafico di $g(x) = -\ln x$.



Esempio Grafico di $g(x) = -e^x$.



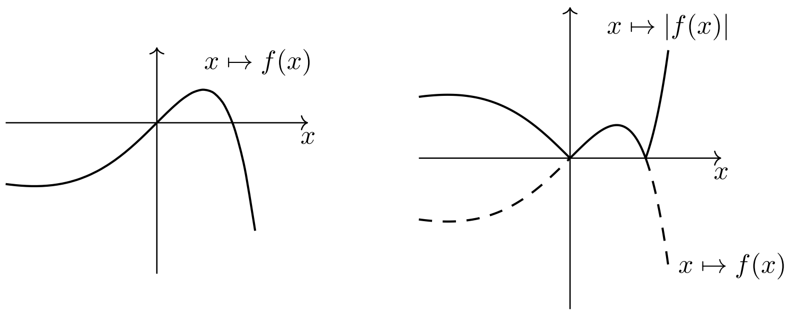
[23] Di norma, quando un grafico si ottiene da un altro con una qualche trasformazione, riporto tratteggiato il grafico precedente. Quando lo spazio me lo consente riporto anche l'espressione analitica della funzione relativa al grafico tratteggiato.

(b) Grafico di $x \mapsto |f(x)|$.

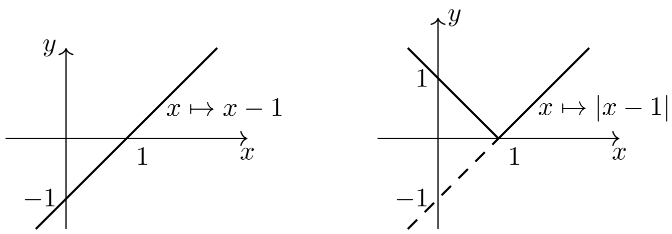
Detto a parole: dove la funzione è positiva la si lascia com'è, dove è negativa si capovolge il grafico come fatto in precedenza. Il tutto segue dalla definizione di valore assoluto, che ricordo ancora una volta:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0. \end{cases}$$

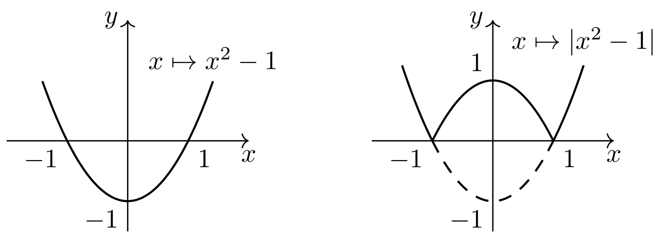
Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



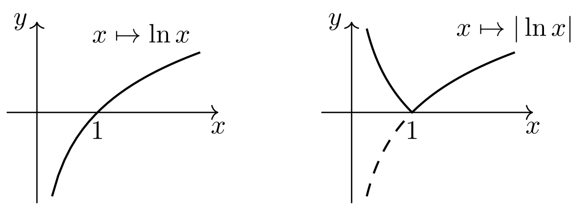
Esempio Grafico di $g(x) = |x - 1|$.



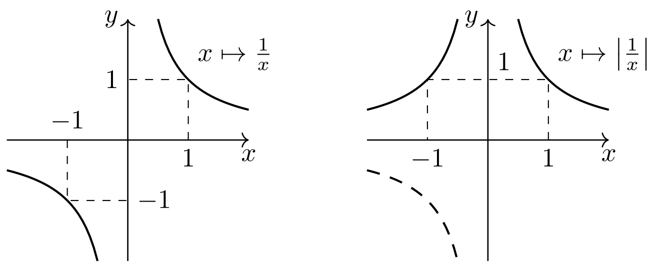
Esempio Grafico di $g(x) = |x^2 - 1|$.



Esempio Grafico di $g(x) = |\ln x|$.

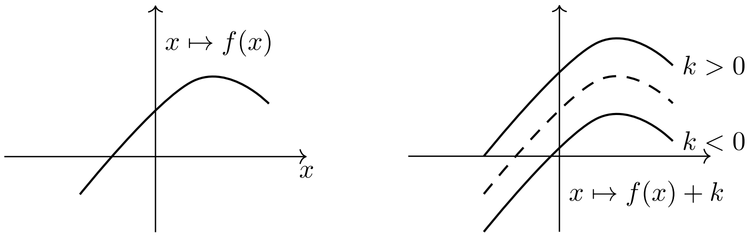


Esempio Grafico di $g(x) = \frac{1}{|x|}$. La funzione è ovviamente $x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|$.

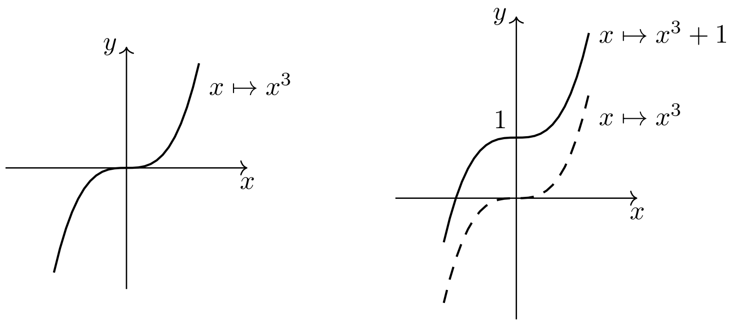


(c) Grafico di $x \mapsto f(x) + k$.

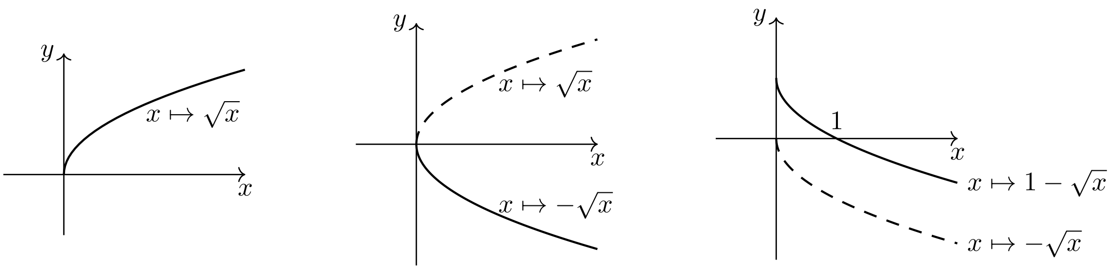
Detto a parole: si muove il grafico di f verso l'alto se k è positivo e verso il basso se k è negativo. Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



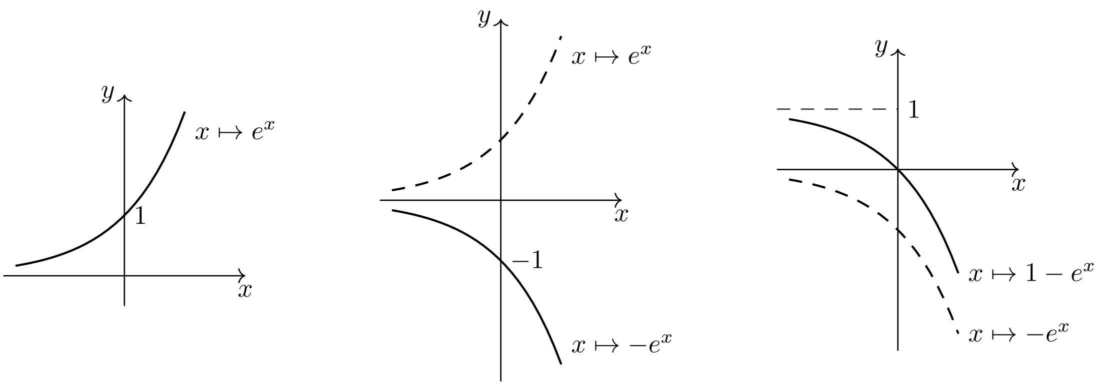
Esempio Grafico di $g(x) = x^3 + 1$.



Esempio Grafico di $g(x) = 1 - \sqrt{x}$. La funzione è definita per $x \geq 0$. Per costruirlo si può iniziare da $\sqrt{x}$, costruire $-\sqrt{x}$ e infine $-\sqrt{x} + 1$.
(In ogni grafico a partire dal secondo è tratteggiato il grafico precedente).

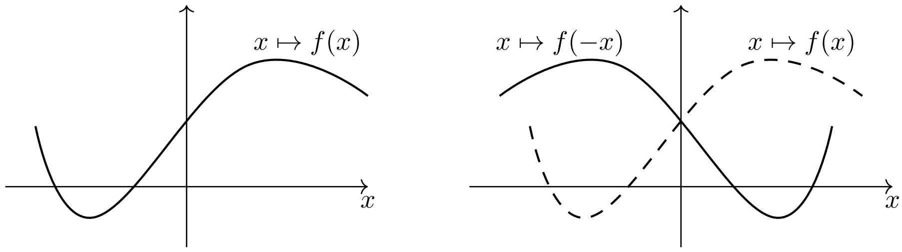


Esempio Grafico di $g(x) = 1 - e^x$. Per costruire questo si può iniziare da e^x, costruire $-e^x$ e infine $-e^x + 1$.
(In ogni grafico a partire dal secondo è tratteggiato il grafico precedente).

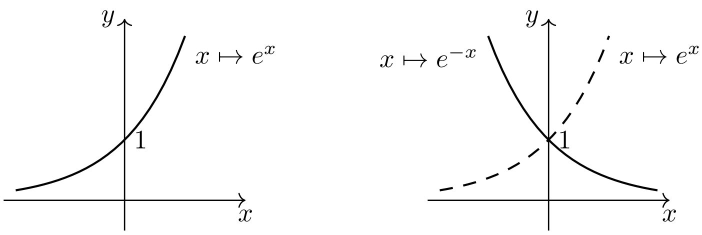


(d) Grafico di $x \mapsto f(-x)$.

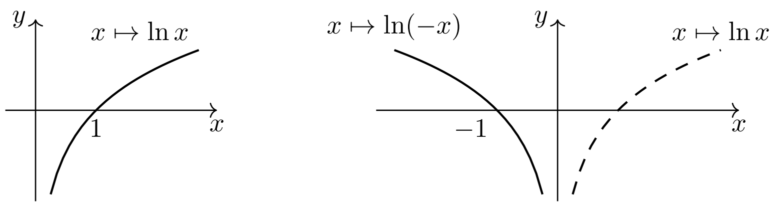
Detto a parole: basta capovolgere il grafico di f facendone il simmetrico rispetto all'asse y (basta pensare che la funzione $f(-x)$ assume in x lo stesso valore che la funzione f assume in $-x$). Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



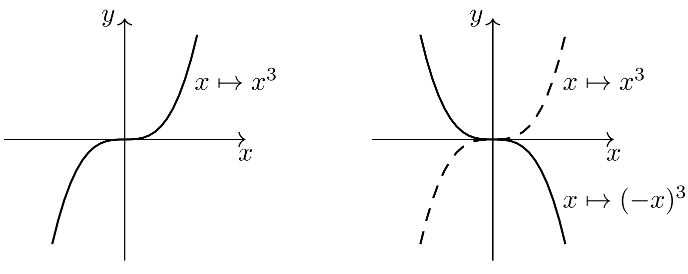
Esempio Grafico di $g(x) = e^{-x}$.



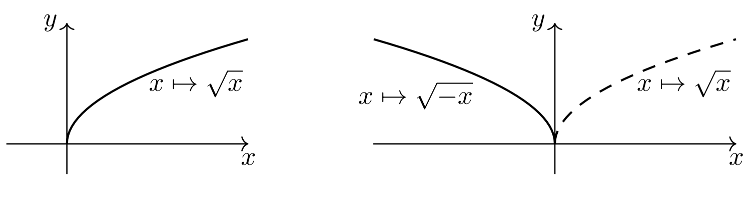
Esempio Grafico di $g(x) = \ln(-x)$. Ovviamente la funzione è definita sulle x negative.



Esempio Grafico di $g(x) = -x^3$. Si noti che la funzione si può ottenere sia come $x \mapsto -(x^3)$, e quindi con un ribaltamento del grafico di x^3 rispetto all'asse x sia come $x \mapsto (-x)^3$ e quindi con un ribaltamento della stessa rispetto all'asse y. Il risultato è ovviamente lo stesso.



Esempio Grafico di $g(x) = \sqrt{-x}$. La funzione è definita per $x \leq 0$.



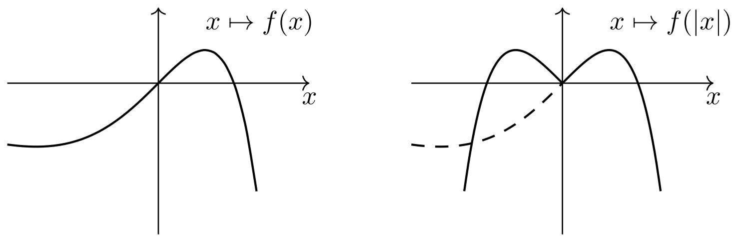
(e) Grafico di $x \mapsto f(|x|)$.

Dato che

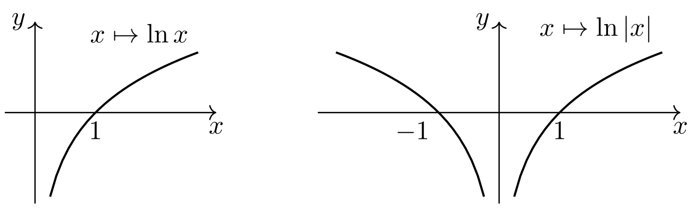
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

sulle x positive la funzione rimane quello che è; sulle x negative ha un grafico simmetrico a quello che c'è sulle x positive. Gli eventuali valori che f assumeva sulle x negative non hanno alcun effetto.

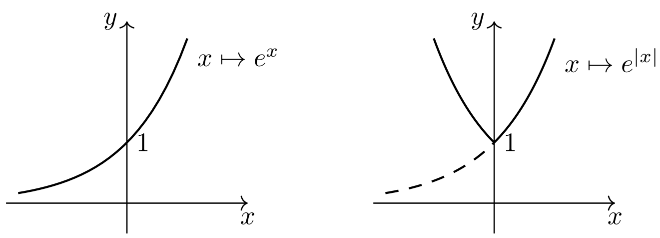
Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



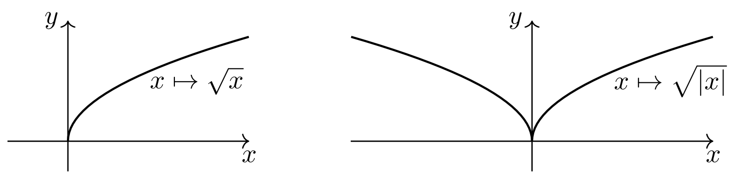
Esempio Grafico di $g(x) = \ln|x|$. La funzione è definita per $x \neq 0$.



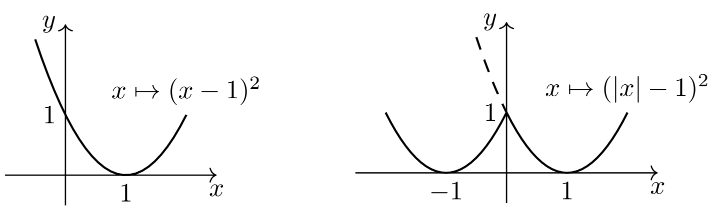
Esempio Grafico di $g(x) = e^{|x|}$.



Esempio Grafico di $g(x) = \sqrt{|x|}$. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.



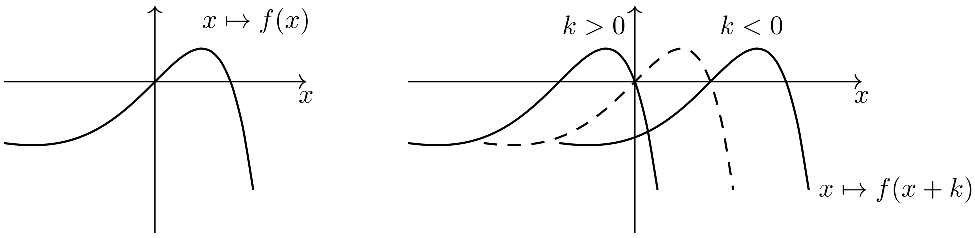
Esempio Grafico di $g(x) = (|x| - 1)^2$.



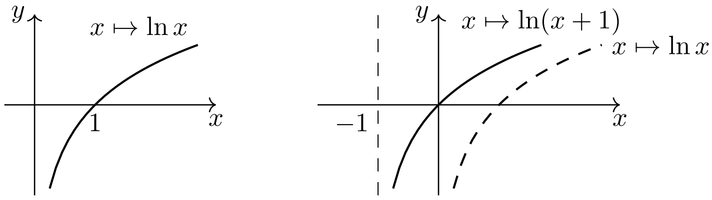
Il primo grafico si può ottenere ricordando quanto visto nella geometria analitica. Vedremo con il caso successivo che anche questa situazione si può risolvere con una trasformazione grafica elementare.

(f) Grafico di $x \mapsto f(x+k)$.

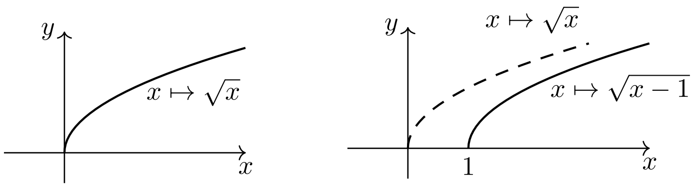
Detto a parole: si muove il grafico di f verso sinistra se k è positivo e verso destra se k è negativo.[24] Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



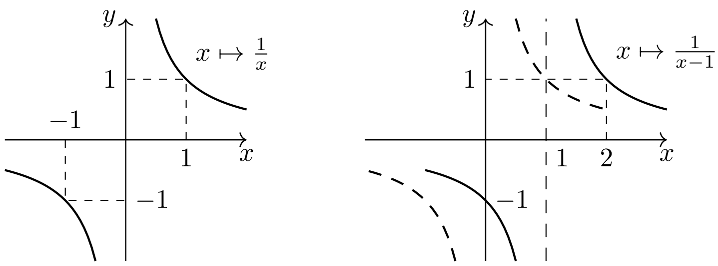
Esempio Grafico di $g(x) = \ln(x+1)$. La funzione è definita per $x > -1$.



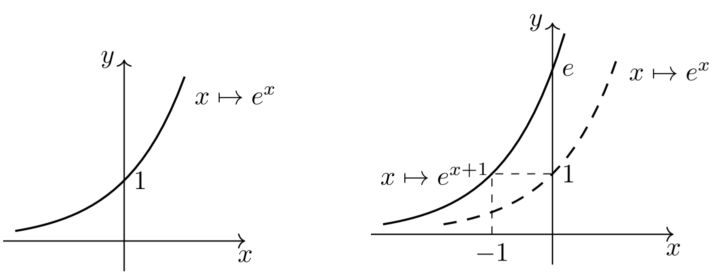
Esempio Grafico di $g(x) = \sqrt{x-1}$. La funzione è definita per $x \geq 1$.



Esempio Grafico di $g(x) = \frac{1}{x-1}$. La funzione è definita per $x \neq 1$.



Esempio Grafico di $g(x) = e^{x+1}$.

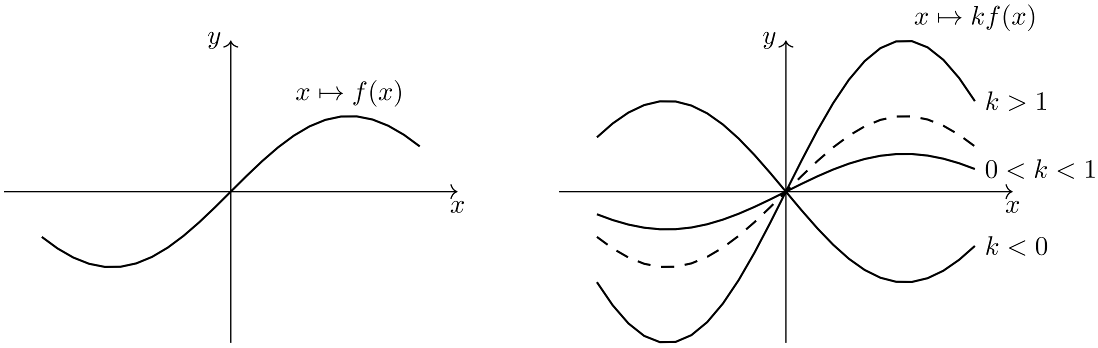


[24] Attenzione. Non è come potrebbe sembrare: se k è positivo il grafico va spostato verso sinistra. Non è difficile capire il perché. Si consideri ad esempio $x \mapsto f(x+1)$: questa funzione assume in x il valore che f assume in $x+1$, quindi è chiaro che il grafico di $f(x+1)$ è spostato a sinistra rispetto al grafico di f.

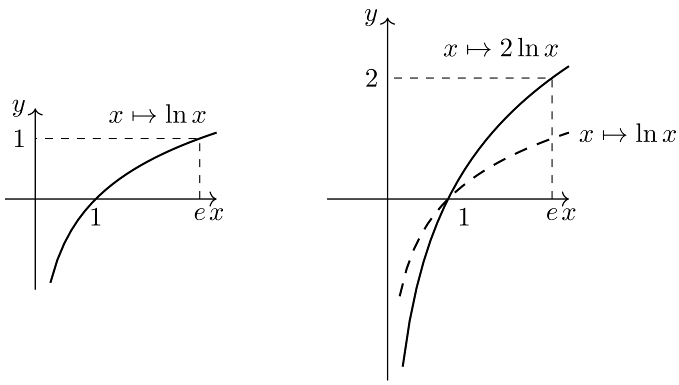
(g) Grafico di $x \mapsto kf(x)$.

La moltiplicazione per un fattore k del valore di f produce una deformazione del grafico nella direzione delle y (cioè in verticale). Più precisamente, se $k > 1$ si ha una dilatazione del grafico, se $0 < k < 1$ si ha una contrazione. Con i valori negativi di k è lo stesso, solo che c'è anche un ribaltamento nella direzione delle y (come quando abbiamo visto il grafico di $-f(x)$).

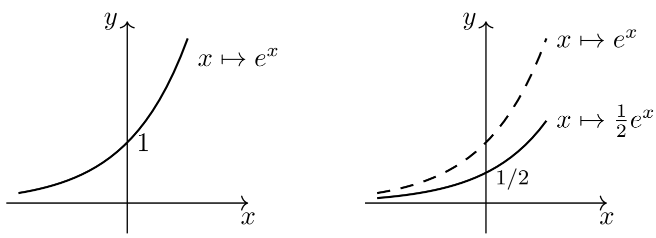
Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



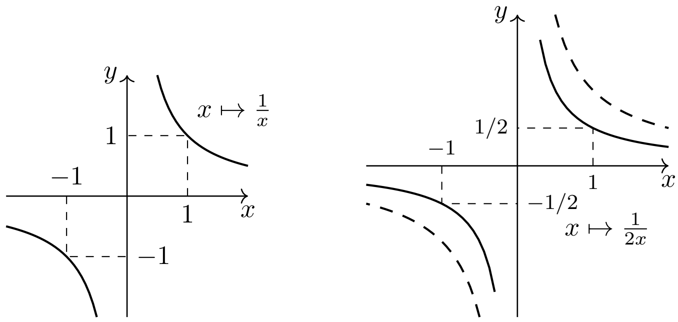
Esempio Grafico di $g(x) = 2\ln x$.



Esempio Grafico di $g(x) = \frac{1}{2}e^x$.



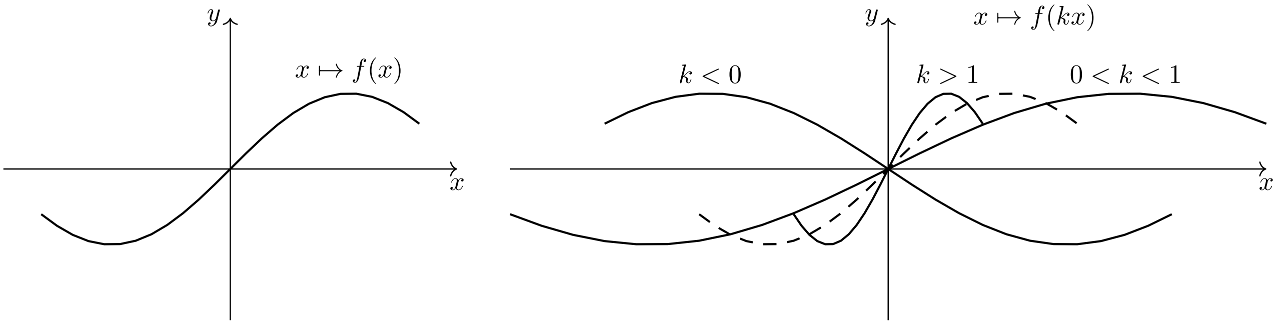
Esempio Grafico di $g(x) = \frac{1}{2x}$.



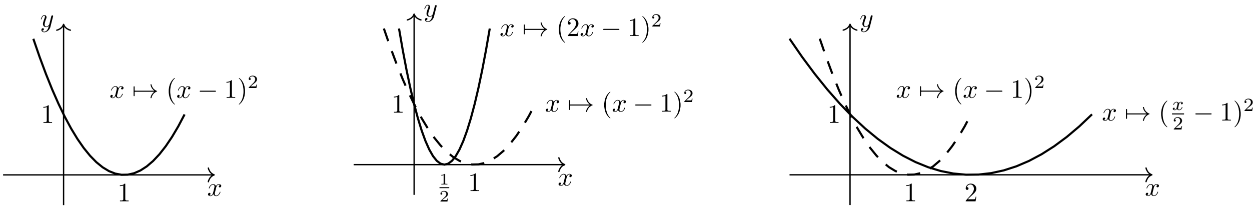
(h) Grafico di $x \mapsto f(kx)$.

La moltiplicazione per un fattore k dell'argomento di f produce una deformazione del grafico nella direzione delle x (cioè in orizzontale). Più precisamente, se $k > 1$ si ha una contrazione del grafico, se $0 < k < 1$ si ha una dilatazione.[25] Con i valori negativi di k è lo stesso, solo che c'è anche un ribaltamento nella direzione delle x (come quando abbiamo visto il grafico di $f(-x)$).

Ecco un disegno che illustra la trasformazione:



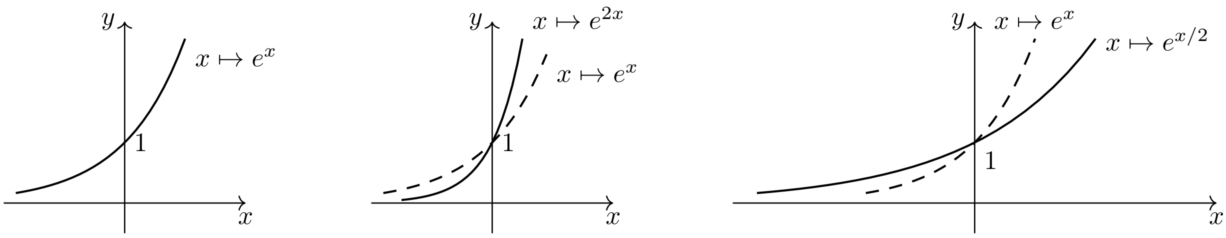
Esempio Grafico di $g(x) = (2x-1)^2$ e di $g(x) = (\frac{x}{2} - 1)^2$.



Osservazioni Il grafico di $g(x) = \ln(2x)$ è il grafico di $x \mapsto \ln 2 + \ln x$, che si può ottenere come già visto anche con una traslazione verso l'alto del grafico della funzione logaritmica.

Il grafico di $g(x) = \sqrt{2x}$ è il grafico di $x \mapsto \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, che si può ottenere come già visto anche con una dilatazione in verticale del grafico della funzione radice quadrata. Lo stesso dicasi per il grafico di $g(x) = 4x^2 = (2x)^2$.

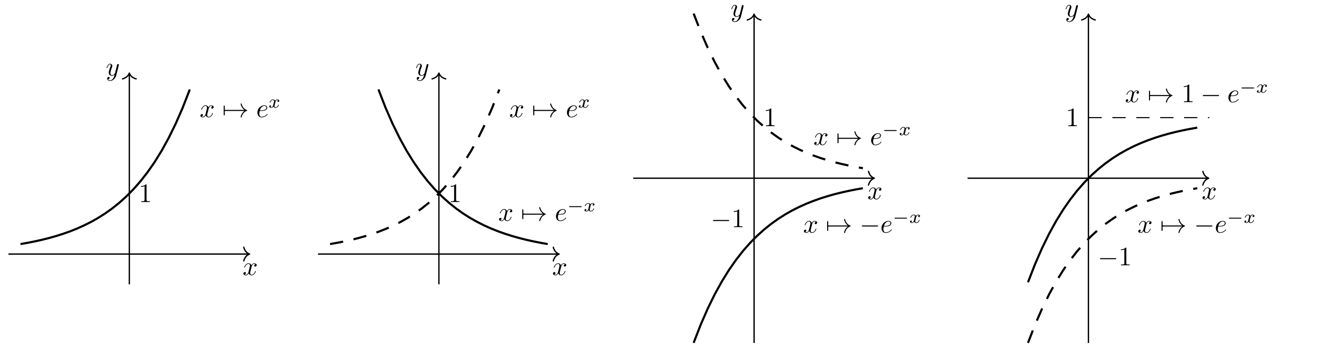
Si osservi anche che invece il grafico di $g(x) = e^{2x}$ oppure $g(x) = e^{x/2}$ non rientrano in quelli visti prima di quest'ultimo.



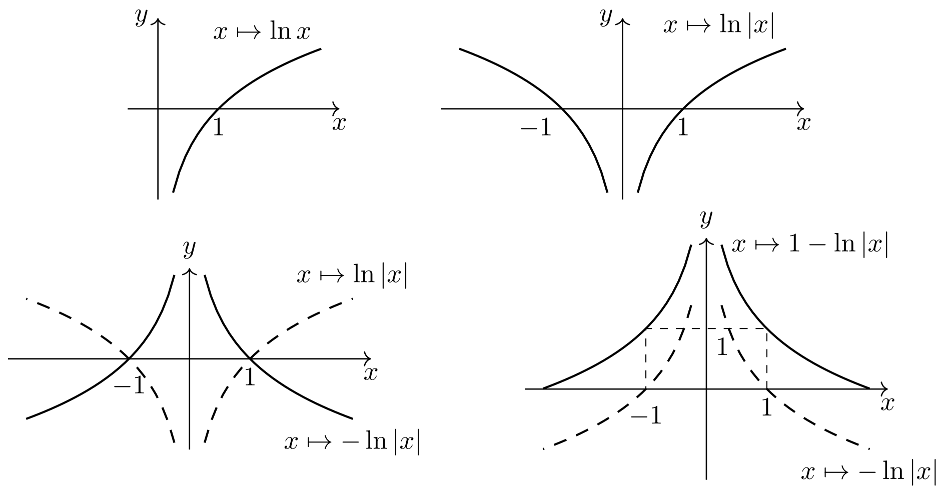
Nel seguito vediamo qualche esempio in cui mettiamo insieme tutte le tecniche viste.

[25] Anche per questo tipo di trasformazioni, come per $f(x+k)$, l'effetto non è quello che forse uno si aspetta. Con un $k > 1$ si ha una contrazione. E anche qui non è difficile capire il perché. Si consideri ad esempio $x \mapsto f(2x)$: questa funzione assume in x il valore che f assume in $2x$, quindi è chiaro che il grafico di $f(2x)$ è come schiacciato orizzontalmente.

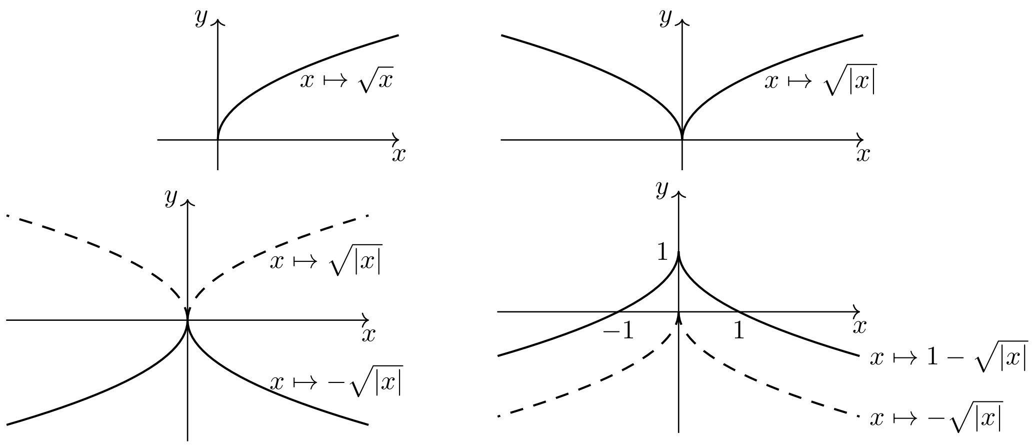
Esempio Grafico di $g(x) = 1 - e^{-x}$. Si può ottenere disegnando in sequenza i grafici di e^x, e^{-x}, $-e^{-x}$ e $-e^{-x} + 1$.



Esempio Grafico di $g(x) = 1 - \ln|x|$. Si può ottenere disegnando in sequenza i grafici di $\ln x$, $\ln|x|$, $-\ln|x|$ e $1 - \ln|x|$.



Esempio In modo analogo si ottiene il grafico di $g(x) = 1 - \sqrt{|x|}$. Basta disegnare in sequenza i grafici di $\sqrt{x}$, $\sqrt{|x|}$, $-\sqrt{|x|}$ e $1 - \sqrt{|x|}$.



Esempio Grafico di $g(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Si può ottenere disegnando in sequenza i grafici di $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $1 + \frac{1}{x+1}$.