II-4 Limiti

Indice

Il concetto di limite è fondamentale. Importanti concetti matematici che seguono sono definiti attraverso il concetto di limite. Nonostante questa rilevanza, in queste dispense rinuncio a dare la definizione rigorosa di tale concetto. Mi limito a presentare, con l'ausilio grafico, le varie situazioni possibili.

Vediamo in seguito alcuni limiti di funzioni elementari e successivamente presento alcune tecniche di calcolo dei limiti, valide più in generale. Finisco con l'importante questione del confronto tra funzioni e con un limite fondamentale.

1 I vari casi di limite

Cerchiamo di capire subito il significato concreto di quello che vogliamo definire. Se abbiamo una funzione, può succedere che non possiamo calcolare il valore che essa assume in corrispondenza di tutti i numeri reali, per il semplice fatto che, come abbiamo visto, ci sono funzioni che non sono definite in tutto $\mathbb{R}$.

Supponiamo ad esempio che la funzione f sia definita in un intervallo e che non sia definita in un punto, chiamiamolo c, di tale intervallo, pur essendo definita in prossimità di c, cioè in tutti i punti di un intorno di c. Non possiamo calcolare $f(c)$, però possiamo chiederci: se la variabile x della nostra funzione si avvicina "infinitamente" al punto c (e questo lo può fare perché f è definita attorno a c), a quale valore, se c'è, si avvicina il valore di $f(x)$? Questo valore è appunto il limite per x che tende a c della funzione f.

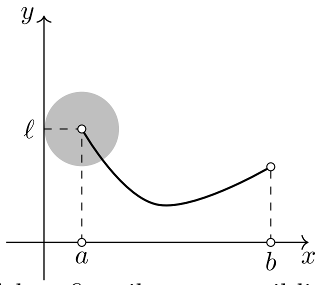
Esiste un modo molto rigoroso per definire questo concetto (la classica "definizione di limite"). Quelle che presento non sono in realtà vere definizioni: cerco solo di far capire di cosa si tratta con parole semplici.

Vediamo i diversi casi che si possono presentare. Considereremo soltanto funzioni definite su intervalli, che potranno essere limitati o illimitati.

1.1 Limite finito al finito

Si parla di *limite finito al finito* quando il valore a cui tende la variabile x è un numero reale ed il limite è pure un numero reale (non abbiamo quindi a che fare con infiniti).

1.1.1 Limite per $x \to a^+$ (limite destro)



Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, con (a, b) intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

Definizione Si scrive

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \text{ , con } \ell \in \mathbb{R}$$

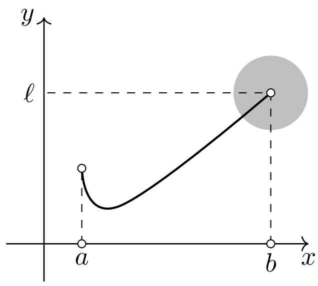
se, quando la variabile x si avvicina ad a da valori più grandi di a (possiamo dire più semplicemente "da destra"), il corrispondente valore di $f(x)$ si avvicina al valore ℓ.

Nelle figure, anche quelle che seguono, ho evidenziato con il disco grigio la parte del grafico rilevante per il limite che stiamo considerando.

Osservazione Si osservi che nella scrittura di limite l'eventuale valore $f(a)$ (dico eventuale perché la funzione potrebbe non essere definita in a e quindi non aver nessun valore in a) non compare, quindi non è rilevante. Sono rilevanti solo i valori x vicini ad a e i corrispondenti valori della funzione su questi x.

Adesso vediamo gli altri casi.

1.1.2 Limite per $x \to b^-$ (limite sinistro)



Sia sempre $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, con (a, b) intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

Definizione Si scrive

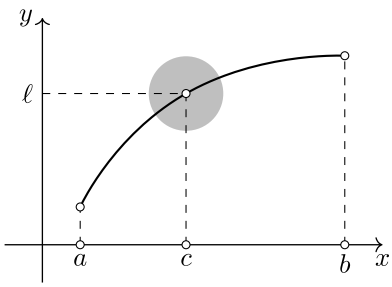
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell \text{ , con } \ell \in \mathbb{R}$$

se, quando la variabile x si avvicina a b da valori più piccoli di b (possiamo dire più semplicemente "da sinistra"), il corrispondente valore di $f(x)$ si avvicina al valore ℓ.

Osservazione Anche in questo caso non è rilevante l'eventuale valore $f(b)$.

1.1.3 Limite per $x \to c$ (limite bilatero)

Sia (a, b) un intervallo e sia $c \in (a, b)$. Sia poi $f : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$. [1]



Definizione Si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \text{ , con } \ell \in \mathbb{R}$$

se, quando la variabile x si avvicina a c, da destra e da sinistra, il corrispondente valore di $f(x)$ si avvicina al valore ℓ.

Osservazione Si osservi che qui, analogamente a quanto fatto prima con i limiti da destra e da sinistra, non è rilevante l'eventuale valore $f(c)$.

Di solito il limite bilatero si chiama semplicemente limite. Quindi, dicendo limite, si allude al limite bilatero.

Osservazione Ribadisco che, dicendo "limite", senza precisare se limite destro o limite sinistro, si intende limite da destra *e* da sinistra.

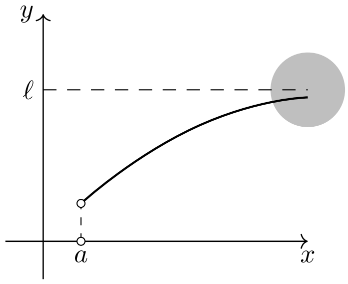
Si potrebbe dimostrare rigorosamente, ma è abbastanza facile intuirlo, che il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali il limite destro e il limite sinistro. Può essere comodo talvolta (e lo faremo tra breve) calcolare il limite calcolando separatamente il limite destro e il limite sinistro.

1.2 Limite finito all'infinito

Si parla di limite finito all'infinito quando la variabile tende a $+\infty$ o a $-\infty$ e il limite è un numero reale.

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

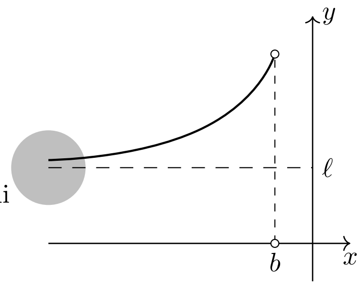
[1] La scrittura $(a, b) \setminus \{c\}$, come lo studente dovrebbe ricordare, indica l'intervallo (a, b) privato del punto c. Quindi si considera una funzione che è definita in $(a, c) \cup (c, b)$, e cioè può non essere definita nel punto c.



Definizione Si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \text{ , con } \ell \in \mathbb{R}$$

se, quando la variabile x assume valori che tendono a $+\infty$, i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano al valore ℓ.



Definizione Se $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \text{ , con } \ell \in \mathbb{R}$$

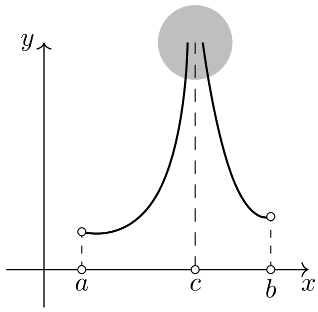
se, quando la variabile x assume valori che tendono a $-\infty$, i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano al valore ℓ.

Osservazione Se il limite di una funzione, per $x \to c$ (c finito o infinito), è zero, si dice che la funzione è *infinitesima* o che è *un infinitesimo*, per $x \to c$. Attenzione. Se affermiamo che una funzione è infinitesima dobbiamo sempre dire anche per x che tende a quale valore. Attenzione ancora: una funzione è infinitesima per x che tende a qualche cosa se *il suo limite è zero*, a prescindere da ciò a cui tende x (x può tendere anche all'infinito).

Possiamo quindi dire che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è infinitesima a $+\infty$ e a $-\infty$, e che la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è infinitesima a $-\infty$.

1.3 Limite infinito al finito

Si parla di limite infinito al finito quando la variabile tende ad un numero reale e il limite è $+\infty$ o $-\infty$. Anche qui c'è ovviamente la possibilità di un limite solo da destra o solo da sinistra. Ecco la definizione nel caso del limite bilatero.

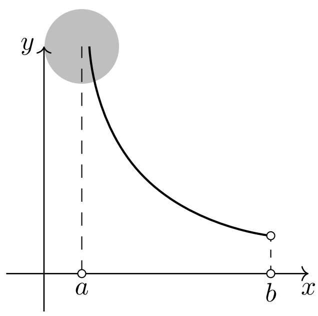


Definizione Si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

se, quando la variabile x si avvicina a c, da destra e da sinistra, i corrispondenti valori di $f(x)$ tendono a $+\infty$.

Naturalmente possiamo avere i casi di limite da destra e da sinistra.



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

se, quando la variabile x si avvicina ad a da destra, i corrispondenti valori di $f(x)$ tendono a $+\infty$ (rappresentato qui a fianco), e

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$

se, quando la variabile x si avvicina a b da sinistra, i corrispondenti valori di $f(x)$ tendono a $+\infty$.

Poi abbiamo il caso del limite $-\infty$.

Definizione Si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

se, quando la variabile x si avvicina a c, da destra e da sinistra, i corrispondenti valori di $f(x)$ tendono a $-\infty$.

Osservazione Se scrivessimo invece $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, senza precisare se da destra o da sinistra, dovremmo dire che tale limite non esiste. Tra breve vediamo meglio questo aspetto.

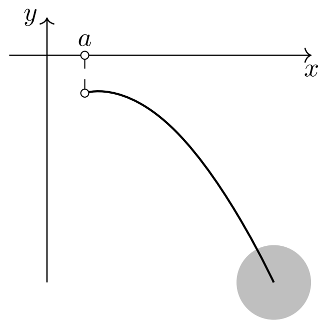
1.4 Limite infinito all'infinito

Si parla di limite infinito all'infinito quando la variabile tende a $+\infty$ o $-\infty$ e il limite è $+\infty$ o $-\infty$. Dei quattro casi possibili ne vediamo solo uno, e lascio allo studente il compito di considerare gli altri casi.

Definizione Si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

se, quando la variabile x assume valori che tendono a $+\infty$, i corrispondenti valori di $f(x)$ tendono a $-\infty$.



Osservazione Se il limite di una funzione, per $x \to c$ (c anche infinito), è $+\infty$ o $-\infty$, si dice che la funzione è *infinita* o che è *un infinito*, per $x \to c$. Attenzione anche qui. Occorre sempre precisare per x che tende a quale valore. E ancora, la funzione è un infinito se *il suo limite è infinito*, a prescindere da ciò a cui tende x (x può tendere anche a zero o a un qualunque numero reale).

Possiamo quindi, ad esempio, dire che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è infinita in 0^+ e in 0^- (cioè per x che tende a zero da destra o da sinistra), che la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è infinita per $x \to 0$, e che la funzione logaritmica $f(x) = \ln x$ è infinita per $x \to 0^+$. Ancora: la funzione logaritmica e la funzione esponenziale sono degli infiniti per $x \to +\infty$.

Le definizioni di limite finiscono qui, salvo un approfondimento che vediamo subito ma che non comporta sostanziali novità rispetto a quanto visto finora.

Si tratta di una situazione che può risultare a volte importante nel calcolo dei limiti. Abbiamo visto all'inizio il caso di limite finito al finito, in cui la funzione tende ad un certo valore reale ℓ quando la sua variabile tende ad un certo valore reale c. Mentre abbiamo considerato i due casi che la variabile tenda al valore c da destra o da sinistra ($x \to c^+$ e $x \to c^-$), non abbiamo distinto i casi in cui la funzione tende al suo limite da destra o da sinistra (data la rappresentazione che solitamente facciamo delle funzioni, che porta a riportare i valori della funzione sull'asse verticale, sarebbe forse più opportuno dire dall'alto o dal basso), cioè da valori più grandi o più piccoli.

Ecco, ora vediamo come si interpretano graficamente queste due situazioni.

Diremo che la funzione f tende al limite ℓ da valori più grandi, e scriveremo

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell^+,$$

se, quando la variabile x si avvicina a c, da destra e da sinistra, il corrispondente valore di $f(x)$ si avvicina al valore ℓ da valori più grandi di ℓ.

Diremo invece che la funzione f tende al limite ℓ da valori più piccoli, e scriveremo

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell^-,$$

se, quando la variabile x si avvicina a c, da destra e da sinistra, il corrispondente valore di $f(x)$ si avvicina al valore ℓ da valori più piccoli di ℓ.

Osservazione Possiamo naturalmente definire il limite da valori più grandi o più piccoli anche se la x tende all'infinito. Sarebbe bene che lo studente provasse a rappresentarsi graficamente questi casi.

Esempi Vediamo qualche esempio (lo studente si convinca di quanto scrivo attraverso un disegno dei vari grafici).

- Si ha
$$\lim_{x\to0^+} x^3 = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^-} x^3 = 0^- \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to0^-} x^2 = 0^+.$$
- Si ha
$$\lim_{x\to1^+} \ln x = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^-} \ln x = 0^-.$$
- Si ha
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+.$$
- Si ha
$$\lim_{x\to1^+} x^2 = 1^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x\to(-1)^+} x^2 = 1^-.$$

Osservazione Le prime non pongono grossi problemi (lo studente può cercare di darsene una ragione ricordando il grafico delle funzioni coinvolte). Attenzione all'ultima. Non è un errore di chi scrive: il limite a 1^+ di x^2 è 1^+ e il limite della stessa funzione a $(-1)^+$ è 1^-. Anche qui per convincersene basta il grafico. Quindi attenzione quando ci sono elevamenti al quadrato di quantità negative.

Osservazione La domanda che a questo punto gli studenti fanno è: ma se il limite è, mettiamo, zero occorre sempre precisare se è uno 0^+ o uno 0^-? La domanda è certamente lecita. Va detto anzitutto che ad una domanda diretta (tipo i limiti degli esempi qui sopra), se il limite è 0^+ non è sbagliato dire che il limite è 0. Dire che è 0^+ è un'ulteriore precisazione. In qualche caso concreto di calcolo di limite (ne vedremo più avanti) per concludere correttamente è necessario capire se un limite (di una parte della funzione) è da valori più grandi o più piccoli.

La risposta alla domanda è quindi: non sempre, ma in qualche caso sì. Non vi posso però dare una regola generale. Occorre vedere caso per caso. Di solito si procede così: si prova a calcolare il limite usando semplicemente 0; se non si riesce a concludere si cerca di precisare se è uno 0^+ o uno 0^-.

2 Alcuni teoremi sui limiti

Viste le diverse situazioni di limite, ora è intanto opportuno sgombrare il campo da un possibile fraintendimento. Non si deve pensare che, data una funzione f e dato un punto c in cui abbia senso fare il limite, esista sempre il $\lim_{x\to c} f(x)$. In altre parole il limite può non esserci (cioè non esistere). Sarebbe il caso che io fornissi un esempio di questa affermazione. Si potrebbero scomodare le funzioni trigonometriche, ma non ne abbiamo mai parlato e non lo farò solo per dare un esempio di non esistenza del limite.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

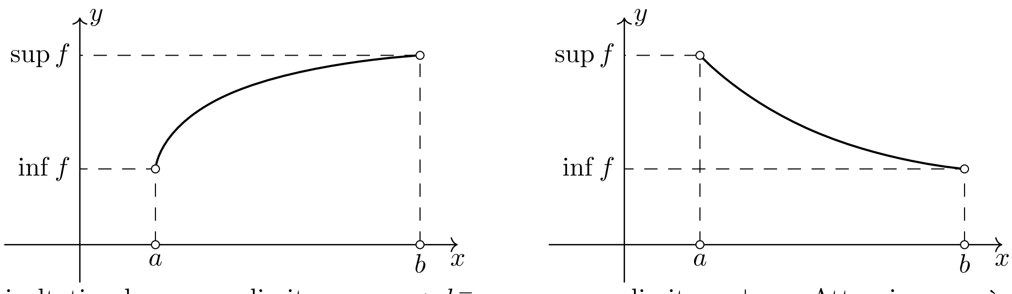
È una funzione, definita sui numeri reali, che assume valore 1 se l'argomento è un numero naturale e assume il valore zero se l'argomento invece non è un numero naturale. Lo studente ne disegni il grafico e cerchi di convincersi che il limite di questa f per x che tende a $+\infty$ non può esistere.[2] Faccio notare che il limite non esiste se x tende a $+\infty$, mentre il limite può esistere se x tende a qualcos'altro.

La domanda importante che ci si può porre a questo punto è: ci sono proprietà delle funzioni reali che assicurano l'esistenza del limite? La risposta è affermativa: una tale proprietà è ad esempio la *monotonia*. Le funzioni monotone hanno sempre limite. Questo è il contenuto della seguente fondamentale proposizione.

Teorema (esistenza del limite per funzioni monotone). Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Valgono le proprietà seguenti:

(i) se f è crescente (o non decrescente), allora $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ esiste e si ha $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$;

(ii) se f è decrescente (o non crescente), allora $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ esiste e si ha $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$.



Analoghi risultati valgono con limite per $x \to b^-$ oppure con limite a $\pm\infty$. Attenzione però che inf e sup si scambiano a b^- e a $+\infty$, quindi ad esempio se f è crescente, si ha $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

Useremo questo teorema tra poco in qualche esempio sui limiti delle funzioni elementari.

Ora enuncio un altro risultato generale sui limiti, che dipende dalla struttura d'ordine in $\mathbb{R}$. Per semplificare l'esposizione mi limiterò al caso dei limiti da destra: risultati analoghi si possono formulare per tutti gli altri casi di limite.

Teorema (del confronto dei limiti). Siano f, g due funzioni definite in (a, b) tali che $f \le g$. Valgono le affermazioni seguenti:

[2] Si potrebbe dire, che il limite non esiste perché nel tendere di x a $+\infty$ il valore di f non può convergere ad un valore in quanto continua a passare dal valore zero al valore 1, ogni volta che cade su un numero naturale (si rifletta che "andando all'infinito continuo ad incontrare numeri naturali").

(i) se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lambda$ e $\lim_{x\to a^+} g(x) = \mu$, allora $\lambda \le \mu$;

(ii) se $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$;

(iii) se $\lim_{x\to a^+} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Osservazioni Al punto (i), per poter stabilire la relazione tra i due limiti, è importante ipotizzare che i limiti esistano. Si noti che invece non occorre nel secondo e nel terzo punto ipotizzare l'esistenza di entrambi i limiti: qui infatti l'esistenza del secondo limite è una conseguenza della non finitezza del primo.

Esempi Possiamo considerare il

$$\lim_{x\to+\infty} x^2.$$

Il grafico della funzione x^2 ci porta a pensare che la scrittura sia vera. Proviamola utilizzando il confronto. Osservando che nell'intervallo $(1,+\infty)$ si ha $x^2 \ge x$ e che ovviamente $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, allora dal punto (ii) del teorema del confronto dei limiti deduciamo che anche

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$

Esempio Consideriamo ora il

$$\lim_{x\to0^+} x^2.$$

Anche qui lo stesso: il grafico ci porta a dire che il limite è 0, ma proviamolo utilizzando il confronto. Possiamo dire che nell'intervallo $(0,1)$ si ha $x^2 \ge 0$ e $x^2 \le x$. [3] Il limite in questione esiste in quanto la funzione $x \mapsto x^2$ è monotona (crescente) in $(0,1)$. [4] Per il punto (i) del terorema del confronto possiamo dire allora che

$$\lim_{x\to0^+} x^2 \ge 0 \qquad \text{e anche} \qquad \lim_{x\to0^+} x^2 \le \lim_{x\to0^+} x = 0.$$

Quindi il limite cercato è zero.

3 Limiti di funzioni elementari

In questa sezione, rinunciando a verificare i limiti attraverso una definizione formale, mi limito a dare alcuni risultati basandomi sui grafici delle funzioni elementari, che abbiamo visto nella dispensa precedente sulle funzioni reali. Lo studente cerchi di capire che quanto ora dirò è ben lontano dall'essere una dimostrazione. Occorrerebbe naturalmente dimostrare che i grafici già visti sono effettivamente quelli corretti.

Farò anche uso del *teorema di esistenza del limite per funzioni monotone*, visto nella sezione precedente, per illustrare quanto può essere comodo il suo utilizzo.

- Cominciamo con una funzione elementare molto semplice, una funzione costante $f(x) = k$, il cui grafico è una retta orizzontale di ordinata k. Si ha naturalmente $\lim_{x\to c} f(x) = k$, dove c è un qualunque valore reale o anche un infinito.

- Consideriamo $f(x) = x$, il cui grafico è la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Si ha $\lim_{x\to c} x = c$.

  Con il teorema di esistenza è molto semplice. La funzione è crescente e possiamo procedere così. Consideriamo un intervallo (c,b) (con $c < b$); per il teorema di esistenza possiamo affermare che $\lim_{x\to c^+} x = \inf_{x\in(c,b)} x = c$. Consideriamo ora un intervallo (a,c) (con $a < c$); per il teorema di esistenza possiamo affermare che $\lim_{x\to c^-} x = \sup_{x\in(a,c)} x = c$. Pertanto limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali, e quindi c è il valore del limite.

  Si ha anche $\lim_{x\to+\infty} x = \sup_{x\in\mathbb{R}} x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x = \inf_{x\in\mathbb{R}} x = -\infty$.

- Consideriamo $f(x) = x^2$, il cui grafico è come noto una parabola con vertice nell'origine. Si ha $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$. Supponiamo che sia $c > 0$. Possiamo affermare che esiste un intervallo $(c-\delta, c+\delta)$ in cui $x \mapsto x^2$ è crescente. Quindi si ha

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{c<x<b} x^2 = c^2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{a<x<c} x^2 = c^2.$$

[3] Si osservi che la prima disuguaglianza vale in realtà in tutto $\mathbb{R}$, mentre la seconda vale solo in $[0,1]$.

[4] In effetti si può provare che il limite è zero anche con il teorema si esistenza per funzioni monotone.

Pertanto otteniamo la tesi. Lo studente adatti la dimostrazione nel caso $c < 0$ e nel caso $c = 0$.[5]
Si ha anche $\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

- Con la funzione $f(x) = x^3$ le cose non sono molto diverse, anzi sono più semplici in quanto la funzione è ora crescente in tutto $\mathbb{R}$. Si ha quindi $\lim_{x\to c} x^3 = c^3$.

  Si ha inoltre $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

- Si intuisce che per tutte le funzioni potenza vale il risultato

$$\lim_{x\to c} x^\alpha = c^\alpha.$$ [6]

  Inoltre, se $\alpha > 0$, si ha $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; se $\alpha < 0$, si ha $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$. Ancora, se $\alpha < 0$, si ha $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ (basta ricordare il grafico delle funzioni potenza).

- Per la funzione esponenziale $f(x) = b^x$ si può dimostrare che

$$\lim_{x\to c} b^x = b^c.$$

  Inoltre, se $b > 1$, si ha $\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} b^x = 0$; se $b < 1$, si ha $\lim_{x\to+\infty} b^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} b^x = +\infty$ (ricordare il grafico della funzione esponenziale).

- Per la funzione logaritmica $f(x) = \log_b x$, definita in $(0, +\infty)$, si ha

$$\lim_{x\to c} \log_b x = \log_b c.$$

  Inoltre, se $b > 1$, si ha $\lim_{x\to+\infty} \log_b x = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_b x = -\infty$; se $b < 1$, si ha $\lim_{x\to+\infty} \log_b x = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_b x = +\infty$ (ricordare il grafico della funzione logaritmica).

4 Algebra dei limiti

Ecco un teorema molto utile nel calcolo dei limiti. Lo enuncio con riferimento al caso del limite destro, ma come sempre risultati analoghi valgono in tutti gli altri casi.

Teorema Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, e supponiamo che sia

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lambda \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = \mu \text{ , con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (cioè numeri reali finiti).}$$

Valgono le affermazioni seguenti:

(i) $\lim_{x\to a^+} \big(f(x) + g(x)\big) = \lambda + \mu$ (limite della somma);

(ii) $\lim_{x\to a^+} \big(f(x)g(x)\big) = \lambda\mu$ (limite del prodotto);

(iii) se $\mu \neq 0$, allora $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (limite del quoziente).

Osservazione C'è poco da aggiungere. Se i limiti sono finiti, per fare il limite di una somma si fa la somma dei limiti, per il limite del prodotto il prodotto dei limiti e per il limite del quoziente il quoziente dei limiti, sempre che il denominatore non si annulli. Da questo teorema sono però esclusi molti casi, ad esempio quelli in cui uno (o tutti e due) i limiti siano infiniti. Ma non solo: e se ho un quoziente e il denominatore tende a zero?

Per riuscire a risolvere qualche caso, fornisco ora alcune *regole di calcolo*, peraltro abbastanza "naturali".

Se nel calcolo del nostro limite ci troviamo di fronte ad una delle situazioni indicate, il risultato è quello indicato (ℓ rappresenta sempre un limite *finito*):

[5] Attenzione che con $c = 0$ la funzione non è monotona in un intorno di c. Occorre quindi procedere separatamente con il limite destro e il limite sinistro.

[6] Si ricordi che la funzione potrebbe essere definita solo in $[0, +\infty)$ o in $(0, +\infty)$, ma che comunque si tratta di una funzione monotona.

(i) se $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\ell + (+\infty) = +\infty \quad , \quad \ell + (-\infty) = -\infty \text{ [7]} \quad , \quad \frac{\ell}{-\infty} = 0 \quad , \quad \frac{\ell}{+\infty} = 0$$

(ii) se $\ell \in \mathbb{R}$ e $\ell > 0$,

$$\ell \cdot (+\infty) = +\infty \quad , \quad \ell \cdot (-\infty) = -\infty$$

(iii) se $\ell \in \mathbb{R}$ e $\ell < 0$,

$$\ell \cdot (+\infty) = -\infty \quad , \quad \ell \cdot (-\infty) = +\infty$$

(iv) inoltre

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad , \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

e

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \quad , \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Si potrebbe ora dimostrare che *non è invece possibile* definire regole nei seguenti casi:[8]

$$(-\infty) + (+\infty) \quad , \quad 0 \cdot (+\infty) \quad , \quad 0 \cdot (-\infty) \quad , \quad \frac{\ell}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

(solite considerazioni sulla commutatività).

Per la verità, per i due casi

$$\frac{\ell}{0}, \text{ con } \ell \neq 0, \qquad \text{e} \qquad \frac{\pm\infty}{0},$$

se riusciamo a stabilire "il segno dello zero a denominatore", possiamo dare una regola, che si può esprimere in forma sintetica (e impropria) ma efficace, con le scritture:

$$\frac{\ell > 0}{0^+} = +\infty \quad , \quad \frac{\ell < 0}{0^+} = -\infty \quad , \quad \frac{\ell > 0}{0^-} = -\infty \quad , \quad \frac{\ell < 0}{0^-} = +\infty$$

e

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad , \quad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad , \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \quad , \quad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Chiamiamo infine **forma indeterminata** (f.i) uno qualunque dei casi che restano, e che per comodità riscrivo:

$$(-\infty) + (+\infty) \quad , \quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

In realtà ci sono altre forme indeterminate, che non riguardano però le operazioni algebriche fondamentali. Queste altre forme, che potremmo chiamare *forme indeterminate esponenziali*, sono:

$$(0^+)^0 \qquad , \qquad (+\infty)^0 \qquad , \qquad 1^{\pm\infty}.$$

Esse, come vedremo più avanti, si possono ricondurre alle precedenti.

Esempi

- Consideriamo il limite
$$\lim_{x \to 1} (e^x + \ln x).$$
La funzione esponenziale tende ad e per $x \to 1$ e la funzione logaritmica tende a 0. Non si tratta quindi di una forma indeterminata e risulta
$$\lim_{x \to 1} (e^x + \ln x) = e + 0 = e.$$

- $\lim_{x \to 0^+} (x + \ln x) = 0 + (-\infty) = -\infty$.

- $\lim_{x \to 1} (x \ln x) = 1 \cdot 0 = 0$.

[7] Valendo la proprietà commutativa, sussistono anche le analoghe regole "scambiate": $(+\infty) + \ell = +\infty$ e $(-\infty) + \ell = -\infty$. Lo stesso per quanto riguarda le regole che seguono sui prodotti.

[8] Questo perché ci sono casi che rientrano tutti, ad esempio, nella prima tipologia e che danno risultati diversi. Quindi il risultato non è prevedibile o, che è lo stesso, non si può fornire una regola generale.

- $\lim_{x\to 0^+}((x+1)\ln x) = 1\cdot(-\infty) = -\infty$.
- $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{0}{1} = 0$.
- $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$.

Nel caso si presenti una delle forme indeterminate, come si diceva il risultato del limite non è prevedibile. A titolo di esempio, consideriamo i tre limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}.$$

Sono tutti della forma (indeterminata) $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Ma per il primo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = (\text{divido sopra e sotto per } x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{1} = \frac{1+0}{1} = 1,$$

per il secondo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2} = (\text{divido sopra e sotto per } x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{x} = \frac{1+0}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

e per il terzo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x} = (\text{divido sopra e sotto per } x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1/x}{1} = \frac{+\infty+0}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

Quindi la stessa forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ può dare origine a risultati diversi.

Osservazione Se riconsideriamo i limiti $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$, già visti in precedenza con la definizione, ora possiamo osservare che rientrano in quelli che sappiamo risolvere con le regole del calcolo, dato che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Si tratta di un caso in cui la conoscenza del segno dello zero a denominatore consente di stabilire il risultato.

Esempio Quale altro esempio di situazione in cui è importante l'idea di limite da valori più grandi o più piccoli, consideriamo il

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1} + \frac{e^x}{e^x-e}\right).$$

Si tratta di una forma del tipo $\frac{1}{0} + \frac{e}{0}$ ed è quindi importante stabilire il segno degli zeri a denominatore. Possiamo scrivere che

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 1^- - 1 = 0^- \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-}(e^x - e) = e^- - e = 0^-.$$

Pertanto si ha

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1} + \frac{e^x}{e^x-e}\right) = \frac{1}{0^-} + \frac{e}{0^-} = (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Vediamo ora qualche esempio di calcolo di forme indeterminate.

- $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$. Si tratta di una f.i. $+\infty - \infty$. Si ha

  $$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty}(x(x-1)) = (+\infty)\cdot(+\infty-1) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

  Lo studente provi a risolverlo raccogliendo invece x^2. Lo studente ancora verifichi che il limite a $-\infty$ non è invece una f.i.

- La stessa tecnica consente di calcolare il limite agli infiniti di un qualunque polinomio. Vediamo ad esempio il $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)$. Si tratta di una f.i. in quanto è presente una differenza di infiniti. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\right) = (+\infty)\cdot(2 - 0 + 0 - 0) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty.$$

  Lo studente provi a calcolare il limite a $-\infty$.

Osservazione A questo punto dovrebbe essere chiaro che il limite all'infinito di un polinomio è dato dal limite all'infinito del suo monomio di grado massimo. Quindi i polinomi del tipo $P(x) = ax^n + \dots$ (cioè con monomio di grado massimo ax^n) e $a > 0$ tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ tendono a $-\infty$ se n è dispari e a $+\infty$ se n è pari.

Passiamo al quoziente di due polinomi.

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x-1}{2x^2-x+1}$. Si tratta di una f.i. $(+\infty)/(+\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x-1}{2x^2-x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(1+1/x^2-1/x^3)}{x^2(2-1/x+1/x^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+1/x^2-1/x^3)}{2-1/x+1/x^2} = \frac{+\infty\cdot 1}{2} = +\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+2}$. Si tratta di una f.i. $(+\infty)/(+\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-1/x)}{x^2(1+1/x+2/x^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x}{x(1+1/x+2/x^2)} = \frac{1}{+\infty\cdot 1} = 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{3x^2+1}$. Si tratta ancora di una f.i. $(+\infty)/(+\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-1/x)}{x^2(3+1/x^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x}{3+1/x^2} = \frac{1}{3}.$$

Osservazione Questi tre esempi dovrebbero insegnare molto: una regola generale per trovare il limite di un quoziente di polinomi. Tutto dipende dal grado dei due polinomi. Lo studente trovi da solo la regola.

Il raccoglimento risolve a volte forme indeterminate date dalla differenza di infiniti, ma non sempre. Sono da ricordare i seguenti esempi.

- $\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x})$. Si tratta di una f.i. $+\infty - \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}(x(1 - x^{-1/2})) = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

  Si poteva anche fare

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{2x^2+1}\right)$. Si tratta ancora di una f.i. $+\infty - \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{2x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}\right)\right) = +\infty\cdot(1-\sqrt{2}) = -\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$. Si tratta ancora di una f.i. $+\infty - \infty$. Procedendo come prima si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)\right) = +\infty\cdot 0.$$

  Come si vede questa volta così non si riesce ad eliminare la forma indeterminata. Occorre cambiare metodo. Si può *razionalizzare*.[9] Moltiplicando sopra e sotto per la somma, cioè per $(x + \sqrt{x^2+1})$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

[9] Quando si ha una somma (differenza) di quantità sotto radice che danno origine ad una f.i., moltiplicando numeratore e denominatore per la differenza (somma) si riesce ad eliminare le radici dal numeratore. Le radici compaiono a denominatore, ma non più in forma indeterminata.

Esercizio 4.1 Si calcolino i seguenti limiti usando l'algebra dei limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{2-x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1-x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1+1/x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1+1/x}{1+x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+e^x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{\ln x - 1}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1-e^x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\ln(1+x)}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x + \ln(1+1/x))$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x - \ln x)$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x}$

Esercizio 4.2 I seguenti limiti sono forme indeterminate. Si calcolino con opportuni raccoglimenti.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{1+2x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{1+x^3}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+x^2}{x^2+x^3}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{x}\right)$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x+\sqrt{|x|}\right)$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

5 Confronti tra funzioni

Sono estremamente utili nel calcolo dei limiti i seguenti risultati.

Proposizione Valgono le proprietà:

1. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0$ per ogni $\alpha > 0$ e $b > 1$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(\log_b x)^p}{x^\alpha} = 0$ per ogni $b > 1$, $p > 0$ e $\alpha > 0$.

Osservazione Occorre anzitutto motivare le condizioni poste sui parametri α, b, p: il primo limite non sarebbe significativo con $\alpha \leq 0$ e $b > 1$ (o con $\alpha \geq 0$ e $b < 1$), dato che non si tratterebbe di forme indeterminate. Considerazioni analoghe nel secondo limite. Le condizioni poste fanno sì che si tratti di limiti di quozienti tra funzioni dello stesso tipo, cioè in questo caso tra infiniti (quindi di forme indeterminate del tipo $\frac{\pm\infty}{+\infty}$).

Osservazione Ovviamente, nel caso si presentino i limiti

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{(\log_b x)^p}$$

nelle stesse ipotesi sui parametri, il risultato è $+\infty$ per entrambi.[10]

Osservazione I due punti della proposizione raccolgono molti casi particolari: si noti che la prima vale *per ogni* α maggiore di 0 e *per ogni* b maggiore di 1, e la seconda è pure vera *qualunque* sia la scelta di $b > 1$, p e α positivi.

[10] Dato che possiamo scrivere

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^\alpha/b^x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Esempi

- Il $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ vale zero, dato che è un caso particolare della prima (con $\alpha = 2$, $b = e$).

  Anche il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{2^x}$ vale zero (con $\alpha = 1/3$, $b = 2$).

- Il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ vale zero, essendo un caso particolare della seconda (con $b = e$, $p = 1$, $\alpha = 1$).

  Anche il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ vale zero (con $b = e$, $p = 2$, $\alpha = 1/2$).

Osservazione (importante) Consideriamo il primo dei due risultati appena visti, e cioè il fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0.$$

Le due funzioni x^α (una funzione potenza) e b^x (una funzione esponenziale) tendono entrambe all'infinito per x che tende all'infinito. Il risultato del limite, cioè zero, ci dà un'informazione che ha un'interpretazione interessante: se il quoziente tra due infiniti tende a zero significa che l'infinito che sta a numeratore è più debole di quello che sta a denominatore. In altre parole la funzione potenza tende all'infinito più lentamente della funzione esponenziale. E ribadisco anche che, in virtù dell'osservazione precedente, questo fatto è generale, nel senso che una *qualunque* funzione potenza è, all'infinito, un infinito più debole di un *qualunque* infinito di tipo esponenziale.

Si noti che il secondo risultato, e cioè il fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_b x)^p}{x^\alpha} = 0$$

ci dice invece che una *qualunque* funzione logaritmica è, all'infinito, un infinito più debole di un *qualunque* infinito di tipo potenza.

I risultati appena visti suggeriscono una tecnica generale per effettuare un "confronto" tra due funzioni. Mi spiego meglio. Supponiamo di avere due funzioni che ad esempio risultino infiniti per x che tende a $+\infty$. Ha senso chiedersi quale delle due tenda all'infinito più rapidamente. Un metodo molto efficace per stabilirlo è calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ del quoziente delle due funzioni. Come avviene per i confronti potenza/esponenziale e logaritmo/potenza appena visti, potremo dire che, se il risultato del limite è zero, allora l'infinito a numeratore è più debole dell'infinito a denominatore (o, equivalentemente, che l'infinito a denominatore è più forte dell'infinito a numeratore).

Riflettendo brevemente si intuisce ora che questa tecnica è molto più generale di quanto possa sembrare a prima vista. Infatti, per prima cosa x può tendere a qualsiasi valore (ad esempio posso voler confrontare due infiniti per x che tende a $-\infty$, a zero, uno, o qualsiasi altro valore). Secondo, posso anche usarla per confrontare due quantità che tendono a zero.[11] Prima di continuare vediamo un semplice esempio di confronto di infiniti all'infinito. Vogliamo confrontare la $\sqrt[3]{x}$ con la $\sqrt[5]{x^2}$, per x che tende a $+\infty$. Quello che uno dovrebbe intuire facilmente, e cioè che l'infinito più forte è quello dato dalla potenza con esponente maggiore, è confermato dalla tecnica appena esposta. Se calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/3}}{x^{2/5}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-1/15} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/15}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

possiamo concludere che $\sqrt[3]{x}$ è un infinito più debole di $\sqrt[5]{x^2}$ (e infatti $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$).

Ora un confronto tra infiniti per x che tende a zero. Vogliamo confrontare la $1/\sqrt{x}$ con la $1/\sqrt[3]{x}$, per x che tende a zero (da destra, per ovvi motivi). Basta calcolare il

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1/\sqrt{x}}{1/\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = \lim_{x\to0^+} x^{-1/6} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^{1/6}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Ora attenzione alla conclusione. Dato che il quoziente tende all'infinito significa che il numeratore (cioè $1/\sqrt{x}$) è un infinito più forte del denominatore ($1/\sqrt[3]{x}$).

Torniamo ora al confronto tra due quantità che tendono a zero. Consideriamo un semplice esempio di confronto tra due potenze, ad esempio x^3 e x^2, per x che tende a zero. Se calcoliamo il

$$\lim_{x\to0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to0} x = 0,$$

[11] Mi raccomando, non si faccia confusione tra il valore a cui tende x e il valore a cui tende la funzione.

il risultato è quindi banalmente zero. Il significato questa volta è il seguente: se il quoziente di due quantità infinitesime (cioè che tendono a zero) tende a zero, significa che il numeratore tende a zero più velocemente del denominatore. Quindi x^3 è più rapido nel tendere a zero rispetto ad x^2, per x che tende a zero.

Riassumendo: se il quoziente di due infiniti tende a zero allora il numeratore tende all'infinito più lentamente del denominatore; se il quoziente di due infinitesimi tende a zero allora il numeratore tende a zero più velocemente del denominatore.

Tutto questo fornisce una buona tecnica per operare dei confronti tra le funzioni.

Possiamo formalizzare un po' quanto appena trovato, fornendo alcune definizioni che possono aiutare a ricordare meglio il concetto.

5.1 Confronti tra infiniti e infinitesimi

Supponiamo di voler confrontare due funzioni f e g, per x che tende ad un certo valore c, che può essere o finito o $\pm\infty$.[12]

Definizione

(i) Se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che f è **trascurabile** rispetto a g, per x che tende a c.

(ii) se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, diciamo che f è **equivalente** a g, per x che tende a c.

(iii) se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ è finito, diverso da zero, diciamo che f è dello **stesso ordine di grandezza** di g, per x che tende a c.

Osservazioni Si osservi che (banalmente), se f è equivalente a g per $x \to c$, allora si ha anche che f è dello stesso ordine di grandezza di g, per $x \to c$.

Ancora, se f_1 ed f_2 sono trascurabili rispetto ad f, per $x \to c$, allora anche $f_1 \pm f_2$ è trascurabile rispetto ad f, per $x \to c$ (lo studente dimostri queste semplici affermazioni).

Si dimostra facilmente anche che se f_1 è trascurabile rispetto ad f, per $x \to c$, allora $f + f_1$ è equivalente ad f.

Possiamo ribadire quanto già esposto in precedenza in termini di queste nuove definizioni. Possiamo dire che:

- Per $x \to +\infty$, x^α è trascurabile rispetto a b^x, per ogni α positivo e per ogni $b > 1$;
- Sempre per $x \to +\infty$, $\ln^p x$ è trascurabile rispetto a x^α per ogni p e α positivi.

Quindi, ad esempio, abbiamo che x^3 è trascurabile rispetto a 2^x, per $x \to +\infty$, e $\ln^4 x$ è trascurabile rispetto a $\sqrt{x}$, sempre per $x \to +\infty$.

Non ci si dimentichi del significato veramente interessante dei risultati sui confronti tra potenze, esponenziali e logaritmi (che chiamerò d'ora in avanti **confronti standard**): una qualunque potenza, per quanto elevata, è trascurabile rispetto ad un esponenziale, per quanto "debole" e un logaritmo, anche se elevato ad una qualunque potenza, è trascurabile rispetto ad una potenza, per quanto bassa.

Altri esempi, importanti nel calcolo dei limiti, sono i seguenti:

- *Confronto all'infinito tra due potenze.* Consideriamo due potenze x^a e x^b, con $0 < a < b$. Si ha

  $$x^a \text{ è trascurabile rispetto a } x^b, \text{ per } x \to +\infty.$$ [13]

  Quindi, ad esempio, si ha che x^2 è trascurabile rispetto a x^3, per $x \to +\infty$.

[12] Ovviamente, e lo sottintendo per non appesantire, le due funzioni dovranno essere definite in prossimità di c.

[13] Segue dalla definizione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{b-a}} = 0,$$

dato che $b - a > 0$.

- *Confronto in zero tra due potenze.* Consideriamo ancora due potenze x^a e x^b, con $0 < a < b$, questa volta per $x \to 0^+$. In questo caso si ha

$$x^b \text{ è trascurabile rispetto a } x^a, \text{ per } x \to 0^+.$$ [14]

  Quindi, ad esempio, si ha che x^2 è trascurabile rispetto ad x, per $x \to 0$.

Osservazione Ripeto: attenzione a non confondere i due casi: all'infinito tra due potenze è trascurabile quella con esponente minore, mentre in zero è trascurabile quella con esponente maggiore. Pertanto diremo ad esempio

$$\sqrt{x} \text{ è trascurabile rispetto a } x \quad \text{e} \quad x^{1/3} \text{ è trascurabile rispetto a } x^{1/2}, \text{ per } x \to +\infty,$$

mentre

$$x \text{ è trascurabile rispetto a } \sqrt{x} \quad \text{e} \quad x^{1/2} \text{ è trascurabile rispetto a } x^{1/3}, \text{ per } x \to 0^+.$$

Negli ultimi esempi visti avevamo sempre a che fare con funzioni infinite all'infinito e infinitesime in zero. Per ribadire che nel confronto è rilevante il valore della funzione più che il punto a cui tende x, consideriamo il confronto delle due funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Si osservi che le due funzioni sono infinitesime all'infinito e infinite in zero.

$$\text{Dato che} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{allora} \quad \frac{1}{x} \text{ è trascurabile rispetto a } \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ per } x \to +\infty$$

e

$$\text{dato che} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1/\sqrt{x}}{1/x} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{allora} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ è trascurabile rispetto a } \frac{1}{x}, \text{ per } x \to 0^+.$$

Vediamo altri esempi interessanti di confronti.

- Proviamo che $\sqrt{x^3+x^2+x+1}$ è equivalente a $x^{3/2}$ per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = 1.$$

  Lo studente dimostri questa regola generale: la radice n-esima di un polinomio è equivalente alla radice n-esima del termine di grado massimo del polinomio stesso (intendo quando x tende all'infinito).

- Proviamo che $\ln(x^2+x+1)$ è equivalente a $\ln(x^2)$ per $x \to +\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x^2(1+1/x+1/x^2)\right]}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)+\ln(1+1/x+1/x^2)}{\ln(x^2)} = 1.$$

- Attenzione che *non* è vero invece che e^{x^2+x+1} è equivalente a e^{x^2} per $x \to +\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x+1}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2+x+1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty.$$

Osservazione Si potrebbe dimostrare (ma serve la definizione formale di limite) che vale il seguente risultato: se f e g sono due funzioni positive definite in $[a,+\infty)$ e se $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to +\infty$, allora da un certo punto in poi f è minore di g (e questo fa forse capire meglio perché in questo caso f si dica trascurabile rispetto a g).

Il fatto che una certa proprietà (come ad esempio $f(x) < g(x)$) valga da un certo punto in poi si esprime dicendo che la proprietà vale *definitivamente*. Quindi possiamo dire che se $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to +\infty$, allora si ha definitivamente $f(x) < g(x)$.

[14] Anche questa volta segue dalla definizione:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^b}{x^a} = \lim_{x\to0^+} x^{b-a} = 0,$$

dato che $b - a > 0$.

5.2 Principi di eliminazione/sostituzione

Sono molto utili nella pratica del calcolo dei limiti i seguenti risultati, che chiameremo **principi di eliminazione/sostituzione**. Essi in certo qual modo danno una giustificazione del perché alcune quantità sono state chiamate *trascurabili* rispetto ad altre.

(i) (eliminazione) Se f_1 è trascurabile rispetto a f per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\Big(f(x) \pm f_1(x)\Big) = \lim_{x\to c} f(x)$$

(ii) (sostituzione) Se f_1 è equivalente a f e g_1 è equivalente a g per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\Big(f_1(x)\cdot g_1(x)\Big) = \lim_{x\to c}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)$$

(iii) (sostituzione) Se f_1 è equivalente a f e g_1 è equivalente a g per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) (eliminazione) f_1 è trascurabile rispetto a f e g_1 è trascurabile rispetto a g per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x) \pm f_1(x)}{g(x) \pm g_1(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Osservazione Si noti che allora le funzioni trascurabili si possono a tutti gli effetti trascurare nel calcolo del limite (almeno nelle situazioni previste dai principi). Funzioni invece equivalenti possono essere sostituite ad altre. Si noti un fatto molto importante: le quantità trascurabili si trascurano quando sono sommate o sottratte ad altre (non moltiplicate) e quantità equivalenti prendono il posto di altre quando ci sono prodotti o quozienti (e non addizioni o sottrazioni).

Esempio Consideriamo il

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 2x + 1).$$

Osservando che $-3x^2 + 2x + 1$ è trascurabile rispetto a x^3 per $x \to +\infty$,[15] si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

Abbiamo applicato il punto (i) (principio di eliminazione). Il limite peraltro lo sapevamo già calcolare con un raccoglimento.

Più in generale, con un generico polinomio, possiamo dire che

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Esempio Consideriamo il

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2^x - \sqrt{x}).$$

Osservando che x^2 è trascurabile rispetto a 2^x e $\sqrt{x}$ è trascurabile rispetto a 2^x, per $x \to +\infty$, allora, per il punto (i) (principio di eliminazione) si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2^x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}(-2^x) = -\infty.$$

Esempio Dovendo calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 + x - 1}{x^4 - x^2 + 1},$$

e osservando che $x - 1$ è trascurabile rispetto a x^3 per $x \to +\infty$ e che $-x^2 + 1$ è trascurabile rispetto a x^4 per $x \to +\infty$, applicando il punto (iv) (principio di eliminazione) possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 + x - 1}{x^4 - x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

[15] Il polinomio di secondo grado è somma di funzioni tutte trascurabili rispetto ad x^3.

Si noti che anche questo limite lo sapevamo già calcolare con raccoglimenti. Però come si vede col principio di eliminazione le cose sono molto più veloci.

Anche in questo caso, con il quoziente di due polinomi in generale, possiamo dire che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m},$$

da cui si perviene immediatamente al risultato.

Esempio Consideriamo il

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x^2}{x+\sqrt{x}}.$$

Osservando che x è trascurabile rispetto a x^2 e $\sqrt{x}$ è trascurabile rispetto a x per $x\to+\infty$, ancora con il punto (iv) (principio di eliminazione) abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x^2}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty.$$

Esempio Se abbiamo il

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-x^2}{x-\sqrt{x}}$$

possiamo osservare che x^2 è trascurabile rispetto a x, per $x\to0^+$ e x è trascurabile rispetto a $\sqrt{x}$, per $x\to0^+$. Quindi per punto (iv) (principio di eliminazione) si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-x^2}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{-\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}(-\sqrt{x})=0.$$

Esempio Dovendo calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x^2+2^x},$$

osservando che $\ln x$ è trascurabile rispetto a x per $x\to+\infty$ e che x^2 è trascurabile rispetto a 2^x per $x\to+\infty$, applicando il punto (iv) (principio di eliminazione) possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x^2+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0\quad\text{(confronto standard potenza/esponenziale).}$$

Esempio Se abbiamo il

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln(e^x+1)},$$

osservando che $x+1$ è equivalente a x per $x\to+\infty$ e che $\ln(e^x+1)$ è equivalente a $\ln e^x$ per $x\to+\infty$, applicando il punto (iii) (principio di sostituzione) possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln(e^x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Esempio Se abbiamo il

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x^3+1)}$$

possiamo osservare che $\sqrt{x^2+1}$ è equivalente a x e $\ln(x^3+1)$ è equivalente a $\ln(x^3)$, per $x\to+\infty$, e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x^3+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x^3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3\ln x}=+\infty\quad\text{(dal confronto standard potenza/logaritmica).}$$

Abbiamo applicato il punto (iii) (principio di sostituzione).

Esempio Se abbiamo il

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(e^{-x}+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right)\quad\text{(f.i. del tipo } 0\cdot(+\infty)\text{)},$$

possiamo osservare che $e^{-x}+\frac{1}{x}$ è equivalente a $\frac{1}{x}$, per $x\to+\infty$, dato che e^{-x} è trascurabile rispetto a $\frac{1}{x}$ (lo si verifichi). Inoltre $\ln(1+x)$ è equivalente a $\ln x$, sempre per $x\to+\infty$. Quindi, applicando il punto (ii) (principio di sostituzione), possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(e^{-x}+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\quad\text{(confronto standard logaritmica/potenza).}$$

Esempio Se abbiamo il

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}\sqrt[3]{x^2+1}\right)\quad\text{(f.i. del tipo } 0\cdot(+\infty)),$$

osservando che $\sqrt[3]{x^2+1}$ è equivalente a $x^{2/3}$, per $x\to+\infty$ e applicando il punto (ii) (principio di sostituzione), possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}\sqrt[3]{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e\cdot e^{-x}\cdot x^{2/3}\right)=e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}}{e^x}=0\quad\text{(confronto standard potenza/esponenziale).}$$

Osservazione Ribadisco un punto molto importante e delicato. Il principio di eliminazione dice sostanzialmente che quantità trascurabili si possono trascurare. Attenzione però a non dare a questa affermazione una validità del tutto generale, come può far credere questo modo di presentare la questione. La validità e quindi l'applicabilità del principio è limitata ovviamente ai casi previsti nell'enunciato. Faccio un esempio: il principio non dice che, nel caso io abbia un *prodotto* di due quantità, di cui una trascurabile, io possa trascurare quest'ultima. Quindi se ho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$, non posso trascurare $\sqrt{x}$, che pure è trascurabile rispetto ad x all'infinito, e concludere che il limite è 1. Il limite infatti è $+\infty$, come si trova facilmente dividendo numeratore e denominatore per x, o più semplicemente dal confronto tra le due potenze.

Osservazione Lo stesso dicasi per i casi che usano l'equivalenza: in un prodotto (o quoziente) posso sostituire ad una quantità un'altra quantità ad essa equivalente. La cosa non vale se ho una somma. Si consideri il $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$. Se, dopo aver osservato che $\sqrt{x^2+x}$ è equivalente a x, per $x\to+\infty$, applico il principio di sostituzione e concludo che il limite è 0, commetto un errore.[16]

Esercizio 5.1 Si riconsiderino gli esercizi proposti 4.2. e, quando possibile, li si calcolino usando i principi di eliminazione/sostituzione.

Esercizio 5.2 Si calcolino i seguenti limiti con i principi di eliminazione/sostituzione.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt[3]{x}+\ln x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\ln^3 x}{e^x+\ln x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x^{3/2}+\ln x}{x^{10}+10^x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}+2^x+\ln x}{x^{1/2}+3^x+\ln x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+\sqrt{x^3}}{x-\sqrt[3]{x^2}}$

6 Un limite fondamentale

In questa breve sezione mi limito ad enunciare un limite molto importante. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Osservazione Il limite si presenta nella forma $1^{\pm\infty}$, che è indeterminata, in quanto si può scrivere

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

e l'esponente è della forma $(\pm\infty)\cdot0$.

[16] Infatti si ha invece, razionalizzando,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+1/x}}=-\frac{1}{2}.$$

7 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 4.1

(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$. Essendo x minore di 2, la quantità $2-x$ è positiva.

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{1+1/x} = \dfrac{-\infty}{1+0} = -\infty$.

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+1/x}{1+x^2} = \dfrac{1+0}{1+\infty} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+e^{-x}}{1+e^x} = \dfrac{1+0}{1+\infty} = 0$. Si ricordi il grafico di e^x e quello di $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = (\frac{1}{e})^x$.

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x}{\ln x - 1} = \dfrac{1}{-\infty - 1} = 0$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{1-e^x} = \dfrac{+\infty}{1-1^+} = \dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$. Qui forse è opportuno qualche commento in più. È importante stabilire il segno dello zero a denominatore, in quanto determina il segno dell'infinito. Si può ragionare così: per $x \to 0^+$ $e^x > 1$, quindi $e^x \to 1^+$. Questo significa che e^x tende a 1 ma da valori più grandi di 1. Allora il denominatore tende a 0 ma da valori negativi, da cui la conclusione.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{\ln(1+x)} = \dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$. Anche qui è importante stabilire il segno dello zero a denominatore. Per $x \to 0^+$ $1+x \to 1^+$ e quindi il $\ln(1+x)$ tende a 0, ma da valori positivi.

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + \ln(1+1/x)) = +\infty + \ln 1 = +\infty + 0 = +\infty$. Questo invece è un caso in cui non è rilevante stabilire il segno dello zero, dato che c'è l'infinito.

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$.

(l) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

Esercizio 4.2

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{1+2x}$. È una forma indeterminata (f.i.) del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{1+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(1-1/x)}{x(1/x+2)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-1/x}{1/x+2} = \frac{1-0}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. È una f.i. del tipo $\frac{-\infty}{+\infty}$. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2(1/x^2-1)}{x^2(1/x^2+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1/x^2-1}{1/x^2+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{1+x^3}$. Sempre f.i. del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Dividendo numeratore e denominatore per x si ottiene

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{1+x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+1/x}{1/x+x^2} = \frac{1+0}{0+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Ancora f.i. del tipo $\frac{+\infty}{-\infty}$. Dividendo numeratore e denominatore per x si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1+1/x}{1+1/x} = \frac{-\infty+1+0}{1+0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty.$$

(e) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x+x^2}{x^2+x^3}$. È una f.i. del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo dividere numeratore e denominatore ad esempio per x. Si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+x^2}{x^2+x^3} = \lim_{x\to0^+} \frac{1+x}{x+x^2} = \frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Si osservi che è importante stabilire che a denominatore si tratta di uno 0^+. Si poteva anche dividere numeratore e denominatore ad esempio per x^2. Si ottiene in tal caso

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+x^2}{x^2+x^3} = \lim_{x\to0^+} \frac{1/x+1}{1+x} = \frac{+\infty+1}{1+0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

(f) $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. F.i. del tipo $\frac{0}{0}$. Qui si possono fattorizzare i polinomi:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-2} = -2.$$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}$. F.i. del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Dividendo numeratore e denominatore ad esempio per x si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^{-1/2}}{x-x^{-2/3}} = \frac{1+0}{+\infty-0} = 0.$$

(h) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}$. La funzione è la stessa dell'esercizio precedente, ma questa volta il limite è per $x\to0^+$. È una f.i. del tipo $\frac{0}{0}$. Lo studente può verificare che dividendo sopra e sotto per x, come fatto prima, non si risolve la f.i. Si può dividere invece per $\sqrt{x}$ (lo si verifichi) oppure per $\sqrt[3]{x}$. In quest'ultimo caso si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{2/3}+x^{1/6}}{x^{5/3}-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Questi ultimi due esercizi insegnano che la scelta di che cosa raccogliere, o equivalentemente per quale fattore dividere numeratore e denominatore, non è in genere arbitraria, nel senso che una può risolvere la f.i. e un'altra no.

(i) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}$. F.i. del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Anche qui si può intuire che se dividessimo sopra e sotto per il termine di grado minimo (cioè $x^{1/2}$) non risolveremmo la f.i. (lo si verifichi). Se dividiamo invece per il termine di grado massimo, $x^{3/2}$, sí: infatti si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}+x^{-9/10}}{x^{-1/6}+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Può essere un utile esercizio provare a dividere per altri termini.

(j) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}$. Stessa funzione dell'esercizio precedente, ma questa volta per $x\to0^+$. F.i. del tipo $\frac{0}{0}$. Questa volta dividendo sopra e sotto per il termine di grado massimo (cioè $x^{3/2}$) non si risolve la f.i. (lo si verifichi). Dividendo invece per il termine di grado minimo, $x^{1/2}$, sí. Infatti si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1+x^{1/10}}{x^{5/6}+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

(k) $\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x}\right)$. F.i. del tipo $+\infty - \infty$. Raccogliendo $\sqrt{x}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)\right) = +\infty.$$

Si poteva anche raccogliere x. Lo si verifichi.

(l) $\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 1}\right)$. Questo esempio, peraltro simile per molti aspetti al precedente, in realtà è più complicato da risolvere. Raccogliendo x si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(2 - \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x^2}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

e questa è ancora una f.i., del tipo $+\infty \cdot 0$. È necessaria una razionalizzazione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2 - 1})(2x + \sqrt{4x^2 - 1})}{2x + \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{2x + \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x + \sqrt{4x^2 - 1}} = 0.
\end{aligned}$$

(m) $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{|x|}\right)$. Questa è una f.i. del tipo $-\infty + \infty$ e si ricordi che $|x| = -x$ per le x negative (quindi se x come in questo caso tende a $-\infty$). Basta un raccoglimento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{|x|}\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{-x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(x\left(1 + \frac{\sqrt{-x}}{x}\right)\right) \\
\text{(attenzione!)} \quad &= \lim_{x\to-\infty} \left(x\left(1 - \sqrt{\frac{-x}{x^2}}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(x\left(1 - \sqrt{\frac{-1}{x}}\right)\right) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Attenzione nel terzo passaggio! Quando si porta sotto radice x, essendo x negativo, occorre cambiare il segno davanti alla radice. Per capire il motivo di ciò si rifletta attentamente sulla seguente affermazione:

$$\text{se } x < 0 \text{ allora } x = -\sqrt{x^2}.$$

(n) $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Anche questa è una f.i. del tipo $-\infty + \infty$. Qui un raccoglimento non è sufficiente per uscire dalla f.i. È necessaria invece una razionalizzazione:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{-\infty} = 0.$$

Esercizio 5.1

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1}{1 + 2x}$. Si può osservare che a numeratore 1 è trascurabile rispetto ad x, per $x \to +\infty$ e a denominatore 1 è trascurabile rispetto a $2x$, per $x \to +\infty$. Quindi, per il principio di eliminazione,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1}{1 + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Osservando che 1 è trascurabile rispetto ad x^2, per $x\to+\infty$, si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{1+x^3}$. Osservando che 1 è trascurabile sia rispetto ad x, sia rispetto ad x^3, per $x\to+\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{1+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}$. A numeratore $x+1$ è trascurabile rispetto ad x^2 e a denominatore 1 è trascurabile rispetto ad x. Quindi per il principio di eliminazione si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty.$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x+x^2}{x^2+x^3}$. Osservando che, per $x\to0^+$, x^2 è trascurabile rispetto ad x e x^3 è trascurabile rispetto ad x^2, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+x^2}{x^2+x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. In questo caso i principi di eliminazione/sostituzione non sono applicabili. Infatti non ci sono quantità trascurabili rispetto ad altre. Il limite deve essere calcolato come visto in precedenza.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}$. All'infinito sono trascurabili le potenze con esponente più basso. Quindi a numeratore $\sqrt{x}$ è trascurabile rispetto ad x e a denominatore $\sqrt[3]{x}$ è trascurabile rispetto ad x^2. Per il principio di eliminazione si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}$. A zero sono trascurabili le potenze con esponente più alto. Quindi a numeratore x è trascurabile rispetto a $\sqrt{x}$ e a denominatore x^2 è trascurabile rispetto a $\sqrt[3]{x}$. Per il principio di eliminazione si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to0^+}(-x^{1/6})=0.$$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}$. Si trascurano le potenze con esponente più basso e quindi per il principio di eliminazione si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/5}}{x^{3/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{9/10}}=0.$$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}$. Si trascurano le potenze con esponente più alto e quindi per il principio di eliminazione si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1/2}+x^{3/5}}{x^{4/3}+x^{3/2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1/2}}{x^{4/3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{5/6}}=+\infty.$$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(2x-\sqrt{x}\big)$. Basta osservare che, per $x\to+\infty$, $\sqrt{x}$ è trascurabile rispetto ad x e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\big(2x-\sqrt{x}\big)=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty.$$

(l) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)$. Volendo qui provare ad applicare il principio di eliminazione occorre anzitutto capire se una delle due quantità è trascurabile rispetto all'altra. Se le confrontiamo, se cioè calcoliamo il limite del quoziente, si scopre subito che sono equivalenti.[17] Quindi il principio di eliminazione non è applicabile. Il limite si può calcolare soltanto con i passaggi visti in precedenza (la razionalizzazione).

(m) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{|x|}\right)$. Ricordando che $|x|=-x$ sulle x negative, possiamo poi osservare che $\sqrt{|x|}=\sqrt{-x}$ è trascurabile rispetto ad x, per $x\to-\infty$.[18] Quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty.$$

(n) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Anche in questo caso nessuna delle due quantità è trascurabile rispetto all'altra. (Si provi che $\sqrt{x^2+1}$ è equivalente a $-x$ per $x\to-\infty$). Per risolvere il limite occorre la razionalizzazione.

Esercizio 5.2

In tutti i casi di limite all'infinito è utile ricordare le seguenti proprietà fondamentali:

$$x^\alpha \text{ è trascurabile rispetto a } b^x\text{, per } x\to+\infty\text{, per ogni } \alpha \text{ in } \mathbb{R} \text{ e per ogni } b>1$$

e

$$\ln^p x \text{ è trascurabile rispetto a } x^\alpha\text{, per } x\to+\infty\text{, per ogni } p \text{ in } \mathbb{R} \text{ e per ogni } \alpha>0.$$

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt[3]{x}+\ln x}$. Per $x\to+\infty$ si ha che

$$\sqrt{x} \text{ è trascurabile rispetto a } 2^x \quad \text{e} \quad \ln x \text{ è trascurabile rispetto a } \sqrt[3]{x}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt[3]{x}+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{\sqrt[3]{x}}=+\infty.$$ [19]

(b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\ln^3 x}{e^x+\ln x}$. A numeratore e a denominatore è trascurabile il logaritmo. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\ln^3 x}{e^x+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}=0.$$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x^{3/2}+\ln x}{x^{10}+10^x}$. A numeratore la radice e il logaritmo sono trascurabili rispetto ad $x^{3/2}$, e a denominatore è trascurabile la potenza. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x^{3/2}+\ln x}{x^{10}+10^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}}{10^x}=0.$$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}+2^x+\ln x}{x^{1/2}+3^x+\ln x}$. A numeratore la potenza e il logaritmo sono trascurabili rispetto all'esponenziale, e a denominatore lo stesso. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}+2^x+\ln x}{x^{1/2}+3^x+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0.$$

[17] Infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2}{4x^2-1}}=1.$$

[18] Infatti

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{-x}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{-\frac{1}{x}}\right)=0.$$

[19] Dato che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{2^x}=0$, allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}/2^x}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$.

Questo e i seguenti sono casi invece di limite per $x \to 0$ e le quantità in gioco sono tutte infinitesime.[20] Qui bisogna ricordare che, almeno nei confronti tra potenze, valgono le seguenti relazioni:

$$x^a \text{ è trascurabile rispetto a } x^b, \text{ per } x \to 0^+, \text{ se } a > b.$$

Quindi qui sono trascurabili le potenze di esponente più elevato. Quindi nel nostro limite abbiamo: x^2 è trascurabile rispetto a x e x è trascurabile rispetto a $\sqrt{x}$, per $x \to 0^+$, e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} (-\sqrt{x}) = 0.$$

(f) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 + \sqrt{x^3}}{x - \sqrt[3]{x^2}}$. Qui si ha che x^2 è trascurabile rispetto a $\sqrt{x^3}$ e x è trascurabile rispetto a $\sqrt[3]{x^2}$, per $x \to 0^+$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + \sqrt{x^3}}{x - \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3/2}}{-x^{2/3}} = \lim_{x\to 0^+} (-x^{5/6}) = 0.$$

[20] Ricordo che in generale possiamo avere anche quantità infinitesime con x che tende all'infinito o quantità infinite con x che tende a zero (si pensi ad esempio a $\frac{1}{x}$ con $x \to \pm\infty$ oppure sempre $\frac{1}{x}$ con $x \to 0^+$ o $x \to 0^-$).