II-5 Funzioni continue

Indice

1 Funzioni continue: definizioni e prime proprietà

Definizione Supponiamo che siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **continua in a da destra** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

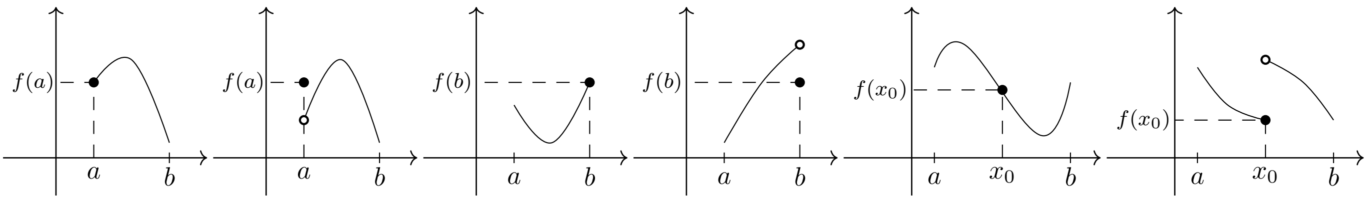
In modo analogo, se $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, diciamo che f è **continua in b da sinistra** se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Se infine $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $a < x_0 < b$, diciamo che f è **continua in x_0** se è continua in x_0 da destra e da sinistra, quindi se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Una funzione non continua in qualche punto (eventualmente da destra o da sinistra) si dice **discontinua** in quel punto (eventualmente da destra o da sinistra).

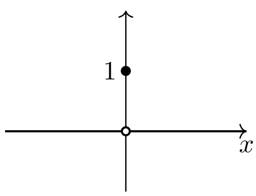


Le figure qui sopra rappresentano nell'ordine: una funzione continua in a da destra, una discontinua in a da destra, una continua in b da sinistra, una discontinua in b da sinistra, una continua in x_0 e infine una discontinua in x_0. Si osservi che l'ultima è discontinua in x_0 perché è discontinua in x_0 da destra, mentre è continua in x_0 da sinistra.

Osservazione Una funzione discontinua in a da destra è comunque definita in a; analogamente una funzione discontinua in b da sinistra è definita in b e una funzione f discontinua in x_0 è comunque definita in x_0, cioè esiste il valore $f(x_0)$. Quindi attenzione che non ha senso chiedersi se, ad esempio, la funzione $f(x) = \ln x$ è continua o discontinua in zero (da destra), dato che in zero la funzione non è definita. Nel caso una funzione sia definita in un punto, la sua continuità in quel punto dipende quindi dal fatto che il *limite* della funzione in quel punto sia uguale al *valore* che essa assume in quel punto.

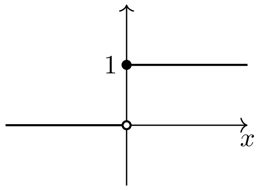
Esempi

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$



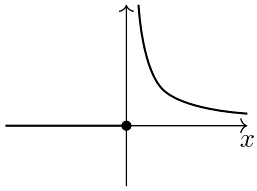
È evidente che $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; poiché $f(0) = 1$, f non è continua in 0 né da destra, né da sinistra.

- Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$



  È evidente che $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ e che $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$; poiché $g(0) = 1$, g è continua in 0 da destra, ma non da sinistra.

- Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$



  È evidente che $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$ e che $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$; poiché $h(0) = 0$, h è continua in 0 da sinistra, ma non da destra.

Definizione Supponiamo che siano $a, b \in \mathbb{R}$ e che $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha una **discontinuità di prima specie**, o che ha un **salto**, in a da destra se $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ (quindi è un numero reale finito) e

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a).$$

Se f è discontinua in a da destra e non ha una discontinuità di prima specie, diciamo che f ha una **discontinuità di seconda specie** in a da destra.

In modo analogo si danno le definizioni di discontinuità di prima e di seconda specie da sinistra.

- Siano f, g e h le funzioni definite negli esempi visti sopra: f ha in 0 una discontinuità di prima specie sia da destra sia da sinistra, g ha una discontinuità di prima specie da sinistra, h ha in 0 una discontinuità di seconda specie da destra.[1]

- Le stesse funzioni f, g e h degli esempi in tutti i punti diversi da zero sono continue.

- La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  si chiama *funzione di Dirichlet*. Essa è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$. Infatti, preso un qualunque punto x, in ogni intorno di x ci sono valori razionali e valori non razionali; quindi in ogni intorno di x ci sono punti in cui la funzione vale 0 e punti in cui la funzione vale 1. Pertanto non può esistere il limite in x. Si tratta quindi tra l'altro di discontinuità tutte di seconda specie.

La continuità, che è stata definita in un punto, si estende in modo naturale a tutto un intervallo, con la seguente

Definizione Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **continua** in I se è continua in ogni punto di I (continua da destra nell'estremo sinistro di I se I è chiuso a sinistra, e continua da sinistra nell'estremo destro di I se I è chiuso a destra). L'insieme di tutte le funzioni continue in I (i matematici dicono la classe delle funzioni continue in I) viene indicata con $\mathscr{C}(I)$. Scrivendo quindi $f \in \mathscr{C}(I)$ si afferma che la funzione f è continua nell'intervallo I.

2 Continuità delle funzioni elementari

Si pone ora il problema se quelle che abbiamo chiamato funzioni elementari, e ricordo che si tratta delle potenze, delle esponenziali e delle logaritmiche, che sono tra le funzioni più importanti e più utilizzate in concreto, abbiano la proprietà ora definita, cioè siano continue. In base a quanto già visto nella dispensa precedente non è difficile dare una risposta.

[1] L'esempio della funzione h illustra una discontinuità che è di seconda specie per la presenza di un limite infinito. Si può avere anche discontinuità di seconda specie se un limite non esiste. Le distinzione tra prima e seconda specie nasce da questa considerazione: un salto (discontinuità di prima specie) è una "patologia" semplice della funzione (i limiti sono comunque finiti), mentre la seconda specie è una "patologia" più grave, data dal fatto che la funzione è illimitata o addirittura dal fatto che non ha limite.

Nella dispensa sui limiti abbiamo visto che

$$\lim_{x\to c} x^\alpha = c^\alpha \quad , \quad \lim_{x\to c} b^x = b^c \quad , \quad \lim_{x\to c} \log_b x = \log_b c.$$ [2]

Questo allora ci dice che

Proposizione Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi intervalli in cui sono definite.

Può sorgere ora la questione se anche la somma (o la differenza, o il prodotto, o il quoziente) di due o più funzioni elementari sia ancora una funzione continua.

Ricordando i teoremi dell'algebra dei limiti (limite di una somma/prodotto/quoziente è somma/prodotto/quoziente dei limiti) è naturale attendersi che la somma di funzioni continue sia una funzione continua e che lo stesso valga anche con le altre operazioni algebriche. Vale infatti la seguente

Proposizione Siano f e g funzioni continue in un certo insieme. Allora $f+g$, $f-g$ e fg sono continue in tale insieme; anche f/g, nei punti dell'insieme in cui è definita, è continua.[3]

Osservazione Pertanto possiamo dire che ad esempio la funzione $f(x) = x^2 + e^x$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ perché somma di funzioni elementari, che sono continue. La funzione $g(x) = \sqrt{x}\ln x$ è continua in $(0,+\infty)$ perché prodotto di funzioni elementari. La funzione $h(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ è continua in $(0,+\infty)\setminus\{1\}$ perché quoziente di funzioni elementari.

Osservazione Visto che somme/prodotti/quozienti di funzioni continue sono funzioni continue, è naturale chiedersi se anche la *composizione* di funzioni continue porti a funzioni continue. La risposta è anche qui affermativa, ma lo vediamo tra un po'.

Esercizio 2.1 Si dica se le seguenti funzioni sono continue nel rispettivo dominio o se ci sono punti di discontinuità, eventualmente precisando di che tipo di discontinuità si tratta.

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1-x & x\neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x\neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(d) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1/\ln x & x\neq 0, x\neq 1 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

Esercizio 2.2 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x\leq 1 \\ x+1 & x>1, \end{cases}$$

si trovi per quali valori del parametro reale a la funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.3 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+a & x<0 \\ (x-a)^2 & x\geq 0, \end{cases}$$

si trovi per quali valori del parametro reale a la funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

3 Funzioni continue in un intervallo. Teorema di Weierstrass

Le funzioni continue in un intervallo hanno proprietà globali interessanti, che sono descritte nel teorema seguente.

Teorema (fondamentale delle funzioni continue in un intervallo). Siano $a,b\in\mathbb{R}$ e sia f continua nell'intervallo $[a,b]$. Allora l'insieme dei valori che f assume è anch'esso un intervallo chiuso e limitato.[4]

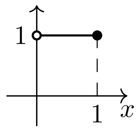
[2] Si noti che quello che compare a destra nelle tre identità, cioè c^α, b^c e $\log_b c$, è il valore della funzione nel punto c, cioè $f(c)$.
[3] La precisazione è doverosa dato che il quoziente non è definito dove g si annulla.
[4] Potremmo scrivere quindi che $f([a,b])$ è un intervallo chiuso e limitato, ricordando che $f([a,b])$ indica l'immagine della funzione f, cioè l'insieme dei valori che essa assume.

Osservazioni È importante osservare che se togliamo anche soltanto una delle ipotesi del teorema, la tesi può essere falsa. È un utile esercizio verificarlo e lo vediamo.

Le ipotesi del teorema sono quattro: che la f sia continua, che sia definita in un intervallo, che tale intervallo sia chiuso e che tale intervallo sia limitato.

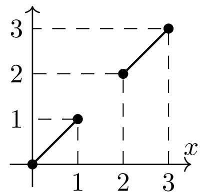
- Rimuoviamo la prima ipotesi e consideriamo ad esempio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1; \end{cases}$$



  f non è in $\mathscr{C}\big([0, 1]\big)$, in quanto non è continua in 0. La tesi è falsa dato che $f\big([0, 1]\big) = \{0, 1\}$ e questo non è un intervallo.

- Rimuoviamo la seconda ipotesi e consideriamo ad esempio $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. La funzione è continua nel suo insieme di definizione, tale insieme è chiuso e limitato, ma non è un intervallo. La tesi è falsa dato che l'immagine di f è $[0, 1] \cup [2, 3]$, che non è appunto un intervallo.



- Rimuoviamo la terza ipotesi e consideriamo ad esempio $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$. La funzione è continua e l'intervallo in cui è definita è limitato ma non chiuso. La tesi è falsa dato che l'immagine di f è $[1, +\infty)$, che non è limitato (lo studente si disegni il grafico della funzione).

- Rimuoviamo la quarta ipotesi e consideriamo ad esempio $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$. La funzione è continua e l'intervallo in cui è definita è chiuso ma non limitato. La tesi è falsa dato che l'immagine di f è $(0, 1]$, che non è chiuso (lo studente si disegni il grafico della funzione).

Il teorema fondamentale delle funzioni continue in un intervallo ha come conseguenze alcune proposizioni che spesso vengono formulate come altrettanti teoremi.

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$.

(i) **Teorema dei valori intermedi.** Se $f(a) < y < f(b)$, cioè se y è un qualunque valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = y$.

(ii) **Teorema degli zeri.** Se $f(a)$ e $f(b)$ hanno valori di segno opposto (potremmo scrivere $f(a) \cdot f(b) < 0$), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

(iii) **Teorema di Weierstrass.** Esiste almeno un punto x_M nell'intervallo $[a, b]$ in cui la funzione f assume il suo valore massimo ed almeno un punto x_m in cui f assume il suo valore minimo.

Osservazioni Tutte e tre le proposizioni hanno come ipotesi fondamentale che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato e che sia continua in tale intervallo.

Il teorema dei valori intermedi dice sostanzialmente che, nelle ipotesi fatte, la funzione assume tutti i valori compresi tra i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo $[a, b]$.

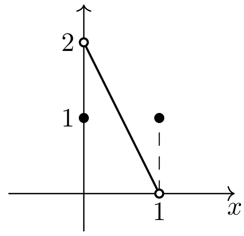
Il teorema degli zeri afferma che, nelle ipotesi fatte, se la funzione assume valori di segno opposto agli estremi, allora c'è almeno un punto in cui essa si annulla.

Osservazioni Il teorema degli zeri è un caso particolare della proprietà dei valori intermedi, dato che, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $f(a) < 0 < f(b)$ e quindi dalla (ii) si ricade nella (i).

Osservazioni Possiamo anche qui vedere che, cadendo alcune ipotesi, la tesi può essere falsa. Lo facciamo con riferimento al teorema di Weierstrass, ma lo studente può provare a farlo con gli altri. Si diceva che le ipotesi sono quattro: funzione continua, definita in un intervallo, intervallo chiuso e intervallo limitato. In realtà con il teorema di Weierstrass una delle ipotesi può cadere senza conseguenze, quella che il dominio sia un intervallo.[5] Si pensi al secondo esempio visto in precedenza sul teorema fondamentale: il dominio non è un intervallo ma la tesi di Weierstrass vale, dato che la funzione ha massimo e minimo ($\max f = 3$ (e $x_M = 3$) e $\min f = 0$ (e $x_m = 0$)). Le altre ipotesi invece non possono cadere. Vediamolo.

[5] Attenzione che invece con il teorema degli zeri e il teorema dei valori intermedi nessuna delle ipotesi può cadere: lo studente lo verifichi su qualche esempio.

- Funzione non continua: si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da



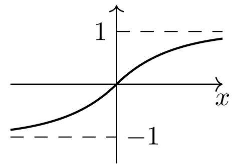
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 2(1 - x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

  Si ha $\inf_{x\in[0,1]} f(x) = 0$ e $\sup_{x\in[0,1]} f(x) = 2$, ma non esiste né il massimo né il minimo della funzione f e di conseguenza non esiste né x_M né x_m.

- Intervallo non chiuso: si consideri la funzione $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Si ha $\inf f = 0$ e $\sup f = 1$, ma come prima non esiste né il massimo né il minimo della funzione f.

- Intervallo non limitato: il controesempio più semplice è certamente dato dalla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Si ha $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$, e non esiste né il massimo né il minimo della funzione f. Può destare qualche perplessità la presenza degli infiniti. Si possono trovare controesempi in cui gli estremi della funzione sono entrambi finiti, come per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definita da } f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ e^x - 1 & x < 0. \end{cases}$$



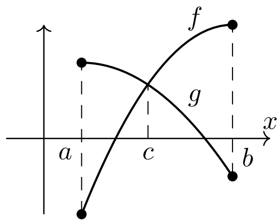
  Come la figura suggerisce[6] abbiamo $\inf f = -1$ e $\sup f = 1$, ma non esiste né il massimo né il minimo della funzione f.

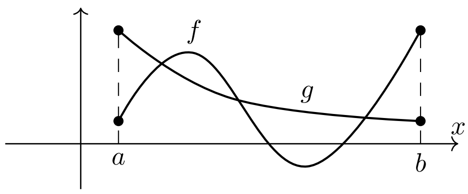
Osservazioni Se nel teorema degli zeri o in quello dei valori intermedi aggiungiamo tra le ipotesi che la f sia crescente o decrescente, possiamo dire che il punto c di cui parla la tesi è unico.

Ci sono interessanti conseguenze dei teoremi appena visti:

- Se $a, b \in \mathbb{R}$ e abbiamo due funzioni f, g continue in $[a, b]$ tali che $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$, allora possiamo dire che esiste $c \in (a, b)$ tale che

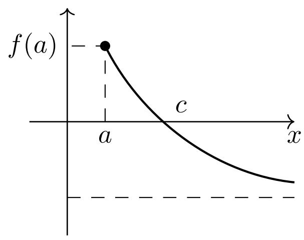
$$f(c) = g(c).$$





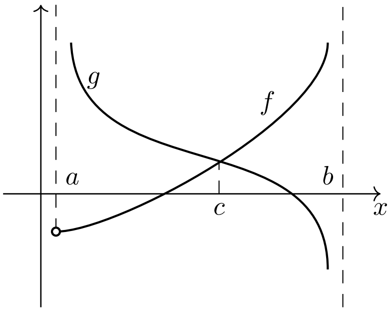
  In generale è garantita l'esistenza di *almeno un punto* in cui le funzioni assumono lo stesso valore. Ovviamente ci possono essere casi, come quello della figura di destra, in cui i punti sono più di uno. L'esistenza di almeno un punto si può dimostrare facilmente, come conseguenza del teorema degli zeri, ragionando sulla differenza delle due funzioni, cioè su $f - g$. Le figure suggeriscono che un'ipotesi che garantisce l'*unicità* del punto in questione è la *monotonia* (si osservi che nella figura a sinistra f è crescente e g è decrescente).

- Il teorema degli zeri considera il caso di un intervallo chiuso e limitato. Però può essere facilmente generalizzato ad intervalli che siano non chiusi o non limitati, considerando, anziché il valore della funzione agli estremi, i limiti di questa. Quindi potremmo riformulare il teorema dicendo che, se una funzione è continua in un certo intervallo e se i limiti agli estremi hanno segno opposto, allora esiste un qualche punto nell'intervallo in cui la funzione si annulla.
  Qui a fianco è raffigurato il caso di una funzione f continua nell'intervallo $[a, +\infty)$, con



$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0.$$

[6]Il grafico si può ottenere con le trasformazioni grafiche elementari. Invito il lettore a farlo.



- Anche il risultato con le due funzioni può essere quindi esteso a tali situazioni più generali. Pertanto ad esempio nel caso siano f, g continue nell'intervallo (a, b), con

$$\lim_{x\to a^+} f(x) < \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) > \lim_{x\to b^-} g(x),$$

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f(c) = g(c).$$

- Se con le due funzioni si assume che f sia crescente e che g sia decrescente, il punto c è unico, cioè l'equazione

$$f(x) = g(x)$$

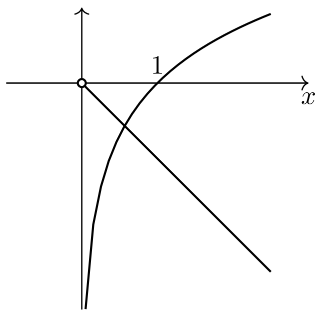
ha una e una sola soluzione in (a, b).

A titolo di esempio, vediamo come può essere utilizzato tutto questo nella soluzione di un'equazione. Lo studente ha già visto svariati esempi di equazioni e ha imparato a risolvere classi particolari di equazioni, come le intere di primo e secondo grado, intere di grado maggiore del secondo (a patto di riuscire a fattorizzare il polinomio), razionali, irrazionali, esponenziali, logaritmiche. Ha anche già visto però che non esistono metodi generali per risolvere una qualunque equazione. Davanti alla "semplice" equazione

$$x + \ln x = 0,$$

i metodi imparati non servono, dato che l'equazione non rientra nei tipi studiati. In realtà *non esiste* un metodo esatto per risolvere tale equazione. Soltanto con metodi numerici approssimati è possibile trovare una soluzione, cioè un numero razionale "non troppo lontano" dalla soluzione esatta. In generale è già tanto riuscire a sapere se una data equazione ha almeno una soluzione.

Grazie alle conseguenze del teorema fondamentale delle funzioni continue in un intervallo è però spesso possibile dire molto, come ora vediamo proprio sull'equazione proposta. Scriviamo l'equazione come



$$\underbrace{\ln x}_{f(x)} = \underbrace{-x}_{g(x)} \quad \text{e poniamo} \quad f(x) = \ln x \text{ e } g(x) = -x.$$

Consideriamo le due funzioni nell'intervallo $(0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$$

mentre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (-x) = -\infty.$$

Per quanto visto sopra possiamo dire che esiste almeno una soluzione dell'equazione data nell'intervallo $(0, +\infty)$. Osservando inoltre che f è crescente e che g è decrescente, possiamo affermare che la soluzione è unica. Ripetendo le considerazioni precedenti nell'intervallo $(0, 1)$, si può dire che la soluzione è appunto compresa tra 0 e 1, come la figura suggerisce. La soluzione però non si può trovare in modo esatto.

Esercizio 3.1 Data la funzione

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -x^2 - 2x + 1 & 0 < x < 1 \\ -2 & x = 1, \end{cases}$$

si verifichi che ad essa è applicabile il teorema degli zeri e si verifichi la validità della tesi del teorema.

Esercizio 3.2 Data la funzione

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad f(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 0 \\ |x - 1| - 1/2 & 0 < x < 1 \\ -1/2 & x = 1, \end{cases}$$

si verifichi che è ad essa applicabile il teorema di Weierstrass e si verifichi la validità della tesi del teorema.

4 Limiti di funzioni composte

In questa sezione vediamo un risultato che riguarda il limite della funzione composta, da cui seguono un'importante conseguenza sulla continuità della funzione composta e un metodo operativo per il calcolo del limite. La questione è sostanzialmente questa: se ho un'espressione composta del tipo $g(f(x))$, per calcolare il limite di questa per x che tende a qualche cosa posso calcolare prima il limite della funzione interna e poi di questo calcolare il valore attraverso la funzione esterna?

Proposizione Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, sia g un'altra funzione e supponiamo che esista la funzione composta $g(f(x))$.[7] Valgono le proprietà seguenti:

(i) se $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) e se g è continua in ℓ, allora $\lim\limits_{x\to b^-} g\big(f(x)\big) = g(\ell)$

(ii) se $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lambda = \pm\infty$, allora $\lim\limits_{x\to b^-} g\big(f(x)\big) = \lim\limits_{y\to\lambda} g(y)$.

Valgono risultati analoghi per limiti da destra e bilateri e con intervalli non limitati (cioè con limiti per $x \to \pm\infty$).

Osservazione La proposizione sostanzialmente afferma che nelle condizioni esposte è possibile calcolare il limite di una funzione composta calcolando prima il limite della funzione interna e successivamente quello della funzione esterna.

Osservazione La proposizione sul limite di funzioni composte è il fondamento teorico di quello che, nelle tecniche di calcolo dei limiti, si chiama comunemente *cambio di variabile* (o *sostituzione*). Ne vediamo qui un paio di esempi.

Esempi

- Semplice esempio di applicazione del punto (i) è il
$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}.$$
Il limite della funzione interna è $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \ell = 0$. La funzione esterna ($g(y) = e^y$) è continua in $\ell = 0$ e pertanto il limite vale $e^0 = 1$.

- Altro semplice esempio di applicazione del punto (i) è il
$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
Il limite della funzione interna è $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(1 + \frac{1}{x}\big) = \ell = 1$. La funzione esterna ($g(y) = \ln y$) è continua in $\ell = 1$ e pertanto il limite vale $\ln 1 = 0$.

- Consideriamo il
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}.$$
Si tratta di una f.i. del tipo $(+\infty)/(-\infty)$. Effettuando il cambio di variabile $y = \ln x$ il limite diventa
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1 + y}{1 - y} = -1.$$
Il limite si poteva peraltro calcolare anche dividendo numeratore e denominatore per $\ln x$. Si osservi che ci siamo mossi nell'ambito del punto (ii) della proposizione. La funzione f è la funzione $x \mapsto \ln x$, $\lambda = +\infty$ e la funzione esterna g è la funzione $y \mapsto \frac{1+y}{1-y}$.

- Consideriamo il
$$\lim_{x\to0^+} x \ln x.$$
Si tratta di una f.i. del tipo $0 \cdot (-\infty)$. Il limite può essere riscritto nella forma $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{1/x}$ (ora f.i. $(-\infty)/(+\infty)$). Effettuando il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ (da cui $x = \frac{1}{y}$) il limite diventa
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0 \quad \text{(confronto standard)}.$$
Ci siamo mossi ancora nell'ambito del punto (ii) della proposizione. La funzione f è la funzione $x \mapsto 1/x$, $\lambda = +\infty$ e la funzione esterna g è la funzione $y \mapsto \frac{\ln(1/y)}{y}$.

[7] Ricordo che affinché esista la funzione composta $g(f(x))$ occorre che i valori della f appartengano al dominio della g. La funzione g deve quindi essere definita in un intervallo che contiene $f((a, b))$, che è l'immagine della funzione f.

Molti limiti si possono ricondurre, come l'ultimo, al confronto tra funzioni potenza–esponenziale–logaritmica. Riporto tali confronti, che continuo a chiamare per comodità *confronti standard*:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{b^x}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_b x)^p}{x^\alpha}=0,$$

dove $\alpha>0$, $b>1$ e $p>0$.

Si tratta dei noti confronti a $+\infty$ tra le funzioni elementari potenza, esponenziale e logaritmica. Metto nuovamente in guardia lo studente: occorre fare attenzione sia alle funzioni sia al valore a cui tende x ($+\infty$). In altre parole, non è detto che un quoziente tra una potenza ed una esponenziale sia un confronto standard, e quindi abbia limite zero. Ad esempio, nel caso del $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}$, non si tratta nemmeno di una forma indeterminata e il limite è $+\infty$.

Vediamo alcuni limiti che, con un cambio di variabile, si riconducono ai confronti standard.

- Consideriamo il $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{1/x}$. Si tratta di una f.i. del tipo $0\cdot(+\infty)$. Con la sostituzione $\frac{1}{x}=y$ il limite diventa

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\cdot e^y &= \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}\\ \text{(confronto standard)} &= +\infty.\end{aligned}$$

- Consideriamo il $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{1/x}}{x}$. Si tratta di una f.i. del tipo $0/0$. Qui si può usare un po' di astuzia per intuire quale è la sostituzione più opportuna. La più naturale sarebbe come prima porre $\frac{1}{x}=y$, la quale però, dato che $x\to0^-$, porterebbe a $y\to-\infty$ e non avremmo più un confronto standard.[8] Invece con la sostituzione $\frac{1}{x}=-y$ (da cui $x=-\frac{1}{y}$), il limite diventa

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{-1/y} &= -\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}\\ \text{(confronto standard)} &= 0.\end{aligned}$$

Ora riprendo in considerazione le "forme indeterminate esponenziali", delle quali abbiamo detto l'esistenza ma di cui non abbiamo ancora visto esempi. Esse, come anticipato nel capitolo sui limiti, sono le forme del tipo:

$$(0^+)^0 \qquad , \qquad (+\infty)^0 \qquad , \qquad 1^{\pm\infty}.$$ [9]

Vediamo come ci si comporta per affrontare questi casi in alcuni esempi.

- Consideriamo il

$$\lim_{x\to0^+}x^x.$$

Si tratta di una f.i. del tipo $(0^+)^0$. Il trucco, valido anche con tutte le altre forme di questo tipo, è quello di scrivere la funzione come potenza in base e. Quindi qui scriviamo x^x in base e, ricordando le cose dette all'inizio del corso parlando di logaritmi.[10] Allora nel nostro caso otteniamo

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}.$$

Abbiamo visto poco fa in uno degli esempi precedenti che il limite della funzione interna, cioè $x\mapsto x\ln x$, per $x\to0^+$, è $\ell=0$. La funzione esterna, l'esponenziale, è continua in $\ell=0$ e quindi, applicando il punto (i) della proposizione sul limite della funzione composta, possiamo concludere che il limite vale $e^0=1$.

[8] Con la sostituzione $\frac{1}{x}=y$ avremmo

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{e^y}{1/y}=\lim_{y\to-\infty}ye^y,$$

che non è un confronto standard e che richiede un ulteriore cambio di variabile.

[9] Si noti che in questi casi, trattandosi di forme esponenziali in cui sia la base sia l'esponente sono variabili, e quindi numeri reali, occorre che la base sia positiva: questo è il motivo dello 0^+ e del $+\infty$ nei primi due.

[10] Si ricordi che un qualunque numero reale positivo r si può scrivere come potenza in una qualunque base. Se vogliamo scrivere r come potenza in base e basta scrivere $r=e^{\ln r}$. Quindi $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$.

- Consideriamo il
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}.$$
Si tratta di una f.i. del tipo $(+\infty)^0$. Con lo stesso trucco usato poco fa possiamo scrivere
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$
(ad esponente abbiamo ovviamente usato il confronto standard logaritmo/potenza).

Esempi di limiti nella forma indeterminata esponenziale del tipo $1^{\pm\infty}$ li vediamo nella sezione successiva.

Prima di chiudere questa sezione torniamo su di una questione toccata in precedenza ma non ancora risolta. Se cioè la composizione di funzioni continue sia anch'essa una funzione continua. Lo studente non dovrebbe avere difficoltà nel riconoscere che questo significa, per definizione di continuità in un punto, poter affermare che
$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(f(c))$$
nelle ipotesi che c sia un punto in cui f è continua e che g sia continua in $f(c)$.

È del tutto immediato vedere che la validità di questa uguaglianza deriva dalla Proposizione sul limite della funzione composta, e più precisamente che è sufficiente il punto (i): infatti la continuità della funzione interna f garantisce che esista il limite $\ell = f(c)$, la funzione esterna g è continua in tale valore e quindi si ha proprio
$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\ell) = g(f(c)).$$
Allora, come caso particolare, possiamo affermare che la composta di funzioni elementari è ancora una funzione continua, in tutto il dominio in cui essa è definita.

Esempi La funzione $f(x) = e^{x^2}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, dato che è composta di una potenza (interna) e di una esponenziale. La funzione $g(x) = \ln\sqrt{x}$ è continua in $(0, +\infty)$, essendo composta di una potenza (interna) e di una logaritmica. La funzione $h(x) = \sqrt{\ln x}$ è continua in $[1, +\infty)$, essendo composta di una logaritmica (interna) e di una potenza.

Osservazione In generale allora possiamo dire che non solo le funzioni elementari, ma anche le somme, i prodotti, i quozienti e le composizioni di queste sono funzioni continue.

Esercizio 4.1 Si calcolino i seguenti limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\ln x}{x+\ln x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\ln(e+x^3)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{1/x}}{e^{1/x}+\ln(x+e)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1+e^{x^2}}{1+e^{1/x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e^{1-\sqrt{x}} + \sqrt{1+\ln x}\right)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{1+e^x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \ln x\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(xe^{1/x}\right)$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(xe^{-x^2}\right)$

5 Limiti notevoli

Come conseguenza del limite fondamentale (enunciato alla fine della lezione sui limiti) e attraverso l'utilizzo del cambio di variabile possiamo trovare altri *limiti notevoli*. Vediamo qui i più importanti.

Ricordo che il limite fondamentale è:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$
Si noti che il limite si presenta come una f.i. esponenziale del tipo $1^{\pm\infty}$.

- Risulta
$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e.$$
È una f.i. del tipo $1^{+\infty}$. Ponendo $\frac{1}{x}=y$ (da cui $x=\frac{1}{y}$) si ottiene
$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y.$$
Il limite è quindi *ricondotto* al limite fondamentale. Il valore del limite è quindi e. Stesso risultato si ottiene anche per $x\to 0^-$, per cui possiamo dire che il limite, per $x\to 0$, è e .

- Chiamerò *limite notevole logaritmico* il seguente. Si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$
È una f.i. del tipo 0/0. Ponendo $\frac{1}{x}=y$ (da cui $x=\frac{1}{y}$) si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(y\cdot\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)=\lim_{y\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\ln e=1.$$
Qui, oltre al cambio di variabile, abbiamo anche fatto uso del punto (i) della proposizione sul limite della funzione composta.
In generale, se il logaritmo è in base b, il limite è
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_b(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln b}.$$

- Chiamerò *limite notevole esponenziale* il seguente. Si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$
Con il cambio di variabile $e^x-1=y$, da cui $x=\ln(1+y)$, si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}.$$
Il limite è quindi ricondotto al limite notevole precedente. Il valore del limite è quindi 1.
Se la funzione esponenziale è in base b, cioè se il limite è $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}$, con lo stesso cambio di variabile e con il limite notevole logaritmico in base b si ottiene che il limite è $\ln b$.

- Chiamerò *limite notevole potenza* il seguente. Si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}=b.$$
La risoluzione di questo è più elaborata e non vediamo i passaggi. Lo studente ricordi semplicemente il risultato.[11]

Osservazione È bene ricordare i limiti notevoli visti e saperli riconoscere. È bene anche imparare a ricondurre alcuni limiti ai limiti notevoli.

Vediamo per finire un ultimo esempio di limite che si riconduce a quello fondamentale.

Si tratta del limite
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x,\quad \text{con } b \text{ numero reale.}$$

[11] Per chi vuole provare, un cambio di variabile che porta sulla strada giusta è $1+x=e^y$, da cui $x=e^y-1$. Il limite diventa
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{by}-1}{e^y-1}$$
ma qui non tolgo il piacere di arrivare da soli alla conclusione.

Lo si può intanto riscrivere nella forma

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x/b}\right]^b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/b}\right)^{x/b}\right]^b.$$

Viene quindi ricondotto al limite fondamentale con il cambio di variabile $x/b = y$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/b}\right)^{x/b}\right]^b = \lim_{y\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^b = e^b.$$

Faccio notare che, potendo essere b un numero reale qualunque, quali casi particolari di questo limite abbiamo ad esempio

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}.$$

6 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 2.1

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1-x & x\neq 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$

Un grafico rende subito evidente la discontinuità di questa funzione. Procediamo comunque analiticamente. Si ha $f(1) = 1$ per definizione, mentre

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(1-x) = 0.$$

Quindi, essendo i valori dei limiti diversi dal valore della funzione nel punto, f è discontinua in 1. Possiamo dire che in 1 c'è una discontinuità di tipo salto, da destra e da sinistra. Talvolta questo tipo di discontinuità viene denominato *discontinuità eliminabile*.[12] In tutti gli altri punti di $\mathbb{R}$ la funzione è continua, essendo un polinomio.

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$

Anche qui lo studente è invitato a disegnare il grafico della funzione e a rispondere alla domanda sulla base di considerazioni grafiche.

Possiamo dire che la funzione è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cioè in tutti i punti diversi da zero: si tratta infatti di polinomi.

Nel punto $x = 0$ non possiamo usare lo stesso argomento, dato che la f è sì un polinomio sia a destra sia a sinistra, ma non lo stesso polinomio! Quindi per studiare la continuità nel punto $x = 0$ dobbiamo procedere con la definizione. Si ha $f(0) = 0$ (si usa la seconda espressione, quella per $x \geq 0$). Poi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(1-x^2) = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

Questo ci dice che la funzione è continua in 0 da destra, ma discontinua da sinistra e che da sinistra c'è un salto.

Si poteva anche evitare il calcolo del limite da destra, osservando che la funzione coincide con x^2 in $[0,+\infty)$ e quindi è certamente continua in 0 da destra, essendo un polinomio.

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x\neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Anche qui un grafico illustra subito la situazione. Possiamo dire che la funzione è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, trattandosi di una funzione potenza.

Studiamo la continuità in $x = 0$. Si ha $f(0) = 0$ per definizione. Poi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Pertanto f è discontinua in 0 e c'è una discontinuità di seconda specie, sia da destra sia da sinistra.

[12] Significa che la discontinuità può essere eliminata semplicemente cambiando la definizione della funzione nel punto. Nel nostro caso, se ridefiniamo il valore della f in 1 con $f(1) = 0$, otteniamo una funzione continua in 1.

(d) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \begin{cases} 1/\ln x & x \neq 0, x \neq 1 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & x = 1. \end{cases}$

In questo caso la funzione è definita in $[0, +\infty)$. Possiamo dire che è certamente continua in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, cioè in tutti i reali non negativi diversi da 0 e da 1 (quoziente di funzioni continue). Occorre studiare ora la continuità in $x = 0$ e $x = 1$.

In $x = 0$ si ha $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Quindi f è continua in 0 da destra.

In $x = 1$ si ha $f(1) = 0$. Poi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Quindi f non è continua in 1 e ha una discontinuità di seconda specie, sia da destra sia da sinistra.

Esercizio 2.2

La funzione f è certamente continua per $x \neq 1$, qualunque sia il valore di a, ed è continua in 1 da sinistra, dato che è la restrizione di una funzione elementare. Occorre studiare la continuità in $x = 1$ da destra. Si ha

$$f(1) = e^{-a} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2.$$

Pertanto f è continua in 1 da destra se e solo se $e^{-a} = 2$, cioè per $a = -\ln 2$.

Esercizio 2.3

La funzione f è certamente continua per $x \neq 0$, qualunque sia il valore di a, ed è continua in 0 da destra, dato che è la restrizione di una funzione elementare. Occorre studiare la continuità in $x = 0$ da sinistra. Si ha

$$f(0) = a^2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + x + a) = a.$$

Pertanto f è continua in 0 da sinistra se e solo se $a^2 = a$, cioè per $a = 0$ oppure $a = 1$.

Esercizio 3.1

Un teorema è applicabile se sono verificate le ipotesi previste dal teorema. Quindi qui si chiede di verificare che:

(i) la funzione in questione è definita in un intervallo chiuso e limitato;

(ii) in tale intervallo è continua;

(iii) assume valori opposti agli estremi dell'intervallo.

(i) La funzione è chiaramente definita in $[0, 1]$, che è chiuso e limitato.

(ii) La funzione è certamente continua in $(0, 1)$, cioè in tutti i punti dell'intervallo diversi dagli estremi (è un polinomio). Occorre ora vedere se è continua in 0 e in 1.

In 0 si ha $f(0) = 1$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2 - 2x + 1) = 1.$$

Quindi f è continua in 0 da destra.

In 1 si ha $f(1) = -2$ e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 - 2x + 1) = -2.$$

Quindi f è continua in 1 da sinistra. Pertanto abbiamo provato che f è continua in $[0, 1]$.

(iii) Abbiamo già visto che $f(0) = 1$ e $f(1) = -2$, quindi anche la terza ipotesi è soddisfatta. Qui finisce la verifica delle ipotesi e possiamo dire che il teorema degli zeri è applicabile.

Ora l'esercizio chiede di verificare la tesi, che certamente deve essere vera, dato che le ipotesi sono soddisfatte. La tesi del teorema degli zeri dice che c'è almeno un punto dell'intervallo $(0,1)$ (punto interno quindi) in cui la funzione vale zero. Qui basta considerare l'equazione $f(x)=0$, cioè

$$-x^2-2x+1=0$$

e risolverla. Si trovano le soluzioni

$$x_1=-1+\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_2=-1-\sqrt{2}.$$

La prima appartiene a $(0,1)$ e quindi la tesi è verificata.

Esercizio 3.2

Si tratta di verificare che la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato e che in tale intervallo è continua. La funzione è definita in $[0,1]$, che è chiuso e limitato. È sicuramente continua in $(0,1)$, essendo composta di funzioni continue. Occorre verificare la continuità in 0 e in 1.
In 0 si ha $f(0)=1/2$ e

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(|x-1|-1/2)=1/2.$$

Quindi f è continua in 0 da destra.
In 1 si ha $f(1)=-1/2$ e

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(|x-1|-1/2)=-1/2.$$

Quindi f è continua in 1 da sinistra. Pertanto f è continua in $[0,1]$ e le ipotesi del teorema di Weierstrass sono verificate.
La tesi del teorema dice che ci sono punti nell'intervallo $[0,1]$ in cui la funzione assume il valore massimo e il valore minimo. Si può osservare che, in $[0,1]$, $f(x)=|x-1|-1/2=1-x-1/2=1/2-x$. La funzione è quindi decrescente nell'intervallo in cui è definita. Allora il valore massimo viene necessariamente assunto nel primo estremo e il valore minimo nel secondo estremo. Con le notazioni che ho usato nella dispensa di questa sezione potremmo scrivere $c_M=0$ e $c_m=1$. Attenzione a non confondere mai il *punto di massimo*, cioè il punto in cui la funzione assume il valore massimo (punto che sta nel dominio di f), con il *massimo*, che è invece il valore massimo, cioè il massimo dell'immagine di f (e sta quindi nel codominio di f).

Esercizio 4.1

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x+\ln x}$. La funzione logaritmica è trascurabile, per $x\to+\infty$, rispetto alla funzione x. Quindi, per il principio di eliminazione, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}}{\ln(e+x^3)}$. Nel quoziente sono presenti funzioni composte. Si usano quindi i risultati visti sul limite della funzione composta. Ricordando che, per $x\to0$, x^2 e x^3 tendono a zero, si ha semplicemente

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}}{\ln(e+x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{e^0}{\ln e}=1.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1+e^{1/x}}{e^{1/x}+\ln(x+e)}$. Anche qui con il limite della funzione composta: per $x\to0^-$, $1/x\to-\infty$ e quindi

$$\lim_{x\to0^-}e^{1/x}=\lim_{t\to-\infty}e^t=0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1+e^{1/x}}{e^{1/x}+\ln(x+e)}=\frac{1+0}{0+1}=1.$$

(d) Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^{x^2}}{1+e^{1/x}}=\frac{1+e^{+\infty}}{1+e^0}=\frac{+\infty}{2}=+\infty.$$

(e) Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-\sqrt{x}}+\sqrt{1+\ln x}\right)=e^{-\infty}+\infty=0+\infty=+\infty.$$

(f) Qui abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{1+e^{x}}}=\frac{\ln(1+0)}{\sqrt{1+\infty}}=\frac{0}{+\infty}=0.$$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Forma indeterminata $(+\infty)/(+\infty)$. Qui facciamo un cambio di variabile. Poniamo $\sqrt{x}=y$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(1+y)}{y}.$$

È ancora ovviamente una f.i. e si intuisce che il numeratore è trascurabile rispetto al denominatore (la presenza di 1 nel logaritmo non cambia il modo con cui il logaritmo tende all'infinito). Però per ricondurci esattamente al confronto standard, cioè $\ln y/y$, possiamo usare un altro cambio di variabile ponendo ora $1+y=z$ (da cui $y=z-1$). Si ha allora

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\ln z}{z-1}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\ln z}{z}=0.$$ [13]

Anziché usare un secondo cambio di variabile si poteva seguire invece una via algebrica e fare così:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y(1+1/y))}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y+\ln(1+1/y)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}+\frac{\ln(1+1/y)}{y}\right).$$

Il primo è il confronto standard tra un logaritmo e una potenza e sappiamo che il risultato del limite è zero. Il secondo non è una f.i., dato che è $0/\infty$. Quindi il risultato è 0.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)$. F.i. del tipo $0\cdot(-\infty)$. Anche qui un cambio di variabile. Riscriviamo prima

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x^2}.$$

Ora poniamo $1/x=y$. Il limite diventa quindi

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(1/y)}{y^2}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y^2}=0,$$

per il confronto standard tra logaritmo e potenza.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(xe^{1/x}\right)$. F.i. del tipo $0\cdot\infty$. Cambio di variabile: poniamo $1/x=y$. Il limite diventa

$$\lim_{x\to0^+}\left(xe^{1/x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}e^{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}=+\infty,$$

per il confronto standard tra esponenziale e potenza.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x^2}\right)$. F.i. del tipo $+\infty\cdot0$. Possiamo riscrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}.$$

Ora poniamo $x^2=y$. Il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{y}}{e^{y}}=0,$$

per il solito confronto standard tra esponenziale e potenza.

[13] Nel penultimo passaggio a denominatore la costante è trascurabile rispetto a z. Il risultato segue poi dal confronto standard tra un logaritmo e una potenza.