II-7 Integrale indefinito

Indice

1 Primitive

Definizione Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si chiama **primitiva** di f in I se F è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Esempi

- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x$. Ovviamente la funzione $F(x) = e^x$ è primitiva di f in tutto $\mathbb{R}$, dato che quest'ultima è derivabile e $D(e^x) = e^x$ in tutto $\mathbb{R}$.
- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. La funzione $F(x) = x^3/3$ è primitiva di f in tutto $\mathbb{R}$, dato che è derivabile e $D(x^3/3) = x^2$ in tutto $\mathbb{R}$.
- Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. La funzione $F(x) = \ln x$ è primitiva di f in $(0, +\infty)$, dato che è derivabile e $D(\ln x) = \frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$.
- Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln x + 1$. La funzione $F(x) = x \ln x$ è primitiva di f, dato che è derivabile e $D(x \ln x) = \ln x + 1$ in $(0, +\infty)$.
- Anche se non fornisco qui esempi espliciti, lo studente sappia che ci sono funzioni che non hanno una primitiva.

Proposizione Siano I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Valgono le proprietà seguenti:

(i) se F è una primitiva di f in I, per ogni $c \in \mathbb{R}$ anche $F + c$ è una primitiva di f in I;

(ii) se F e G sono due primitive di f in I, allora $F - G$ è costante.

Osservazione La dimostrazione della (i) è immediata, dato che la derivata di una costante è nulla. La (ii) è invece meno banale e deriva da una conseguenza del teorema del valor medio per cui, se la derivata di una funzione è sempre nulla, allora questa funzione è necessariamente costante. Nel nostro caso la derivata di $F - G$ è nulla, dato che $D(F - G) = DF - DG = f - f = 0$; quindi $F - G$ è costante, come detto.

Osservazione I due punti della proposizione precedente dicono sostanzialmente che, se c'è una primitiva di una funzione f, allora ce ne sono infinite altre, e sono tutte e sole le funzioni che si ottengono sommando una costante arbitraria alla primitiva originaria.

Definizione Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. L'insieme delle primitive di f in I si chiama **integrale indefinito** di f in I e viene indicato con uno dei simboli

$$\int f \qquad \text{oppure} \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Per i punti (i) e (ii) dell'ultima Proposizione, se F è una primitiva di f, allora

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Per non appesantire la notazione, si scrive anche

$$\int f = F + c \qquad \text{oppure} \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$ [1]

È chiaro dunque che per conoscere l'integrale indefinito di una funzione è sufficiente trovare una primitiva di tale funzione. Tutte le altre si ottengono aggiungendo a questa una costante arbitraria.

Esempi Per gli esempi introduttivi della pagina precedente possiamo allora dire che

- si ha
$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c, \text{ in tutto } \mathbb{R}.$$
- Si ha
$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c, \text{ in tutto } \mathbb{R}.$$
- Si ha
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c, \text{ in } (0, +\infty).$$ [2]

  Osservazione Dato che in $(-\infty, 0)$ si ha ugualmente $D\ln(-x) = 1/x$, solitamente si scrive
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c,$$
  ottenendo così una scrittura valida sia in $(0, +\infty)$ sia in $(-\infty, 0)$.

- Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari e dalla definizione di integrale indefinito, si ricava il seguente elenco di integrali indefiniti immediati:

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \forall \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

2 Tecniche di integrazione I

Per il momento, oltre alla definizione di primitiva, abbiamo visto sostanzialmente alcuni esempi in cui si trova una primitiva ricordando alcune formule di derivazione. Ma si pone ora il quesito di come procedere in generale per trovare una primitiva di una funzione qualunque. Diciamo subito che non esiste un metodo generale: a differenza quindi di quanto avviene per il calcolo della derivata, per il calcolo di una primitiva un metodo del tutto generale non c'è. Ci sono alcuni metodi possibili, ciascuno dei quali funziona in alcuni casi. Vediamo ora alcuni di questi metodi, corredati da qualche esempio che aiuta a capire in quali casi un metodo può funzionare.

[1] Solitamente si usa la prima forma quando si fa riferimento ad una generica funzione f, mentre si usa la seconda quando si considera una ben precisa funzione, in cui è naturale l'indicazione della variabile.

[2] Sarebbe bene precisare sempre in quale intervallo considero un certo integrale indefinito, come ho indicato nei tre esempi. Devo dire però che questo di solito non viene fatto, e che si sottintende che il risultato vale nel più grande insieme in cui le funzioni sono definite (e derivabili).

2.1 Linearità dell'integrale

La proposizione seguente fornisce una proprietà del tutto generale dell'integrale indefinito.

Proposizione Siano I un intervallo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ e F, G loro primitive in I. Allora una primitiva di $c_1 f + c_2 g$ è $c_1 F + c_2 G$, qualunque siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Osservazione La proposizione dice quindi che se conosco una primitiva di f e di g allora ho una primitiva di $c_1 f + c_2 g$ (c_1, c_2 sono costanti, cioè numeri reali fissati). La dimostrazione è immediata, osservando che $c_1 F + c_2 G$ è derivabile e che

$$\begin{aligned}(c_1 F + c_2 G)' &= c_1 F' + c_2 G' \\ &= c_1 f + c_2 g.\end{aligned}$$

La proposizione consente quindi, nel calcolo di un integrale indefinito, di applicare questa proprietà di linearità:

$$\int \big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\big)\,\mathrm{d}x = c_1 \int f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Come caso particolare rilevante, se dobbiamo calcolare l'integrale indefinito di una somma di due funzioni possiamo quindi cercare separatamente le primitive delle due funzioni e, una volta trovate, ne possiamo fare la somma.

Esempi Esempi di utilizzo della proprietà di linearità.

- Dovendo calcolare $\int (3x + 2)\,\mathrm{d}x$ e osservando che $x^2/2$ è una primitiva di x e che x è una primitiva di 1, si ha allora: $\int (3 \cdot x + 2 \cdot 1)\,\mathrm{d}x = 3x^2/2 + 2x + c$.
- È chiaro allora come si procede in generale per integrare un qualunque polinomio. Se
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
allora si ha
$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c.$$
Quindi, ad esempio,
$$\int (3x^3 - 2x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x = 3\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + c.$$
- Nel caso abbia $\displaystyle\int \frac{P(x)}{x^k}\,\mathrm{d}x$ basterà dividere ogni monomio del polinomio P per x^k e poi applicare la linearità. Ad esempio
$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x| - \frac{1}{x} + c.$$
- Abbiamo visto poco fa che la linearità consente di integrare tutti i polinomi. Più in generale consente di integrare la somma di più potenze. Se gli α_i sono numeri reali diversi da -1, abbiamo che
$$\begin{aligned}\int \sum_{i=1}^m c_i x^{\alpha_i}\,\mathrm{d}x \text{ [3]} &= \int (c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \ldots + c_m x^{\alpha_m})\,\mathrm{d}x \\ &= c_1 \frac{x^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} + c_2 \frac{x^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} + \ldots + c_m \frac{x^{\alpha_m+1}}{\alpha_m+1} + c \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \frac{x^{\alpha_i+1}}{\alpha_i+1} + c.\end{aligned}$$
Quindi, ad esempio, avremo
$$\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{1/3} - x^{-1/2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 2\sqrt{x} + c.$$
- Volendo calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x} - 3e^x$ utilizzando la linearità dell'integrale avremo
$$\int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - 3e^x\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 3\int e^x\,\mathrm{d}x = x^3 - 2\ln|x| - 3e^x + c.$$

[3] Si noti che $\sum_{i=1}^m c_i x^{\alpha_i}$ può non essere un polinomio, dato che gli esponenti possono non essere interi.

2.2 Integrali quasi immediati

Un primo insieme di formule di integrazione "quasi immediata" si può ricavare ancora dalle regole di derivazione della funzione composta. Si hanno i seguenti casi rilevanti (ai quali per comodità do il nome di *integrale quasi immediato di tipologia* (i), (ii) e (iii)):

(i) $\displaystyle\int f^\alpha\, Df = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$ per ogni $\alpha \neq -1$ $\Big($infatti $D\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} = f^\alpha\, Df\Big)$

(ii) $\displaystyle\int \frac{Df}{f} = \ln|f| + c$ $\Big($infatti $D\ln|f| = \frac{Df}{f}\Big)$

(iii) $\displaystyle\int e^f\, Df = e^f + c$ [4] $\Big($infatti $De^f = e^f\, Df\Big)$

Esempi

- Nel tipologia (i) rientra: $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$
- Nel tipologia (ii) rientra: $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + c.$
- Nel tipologia (iii) rientra: $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = e^{x^2} + c.$

Importante osservare che molte forme, anche se non inizialmente di questo tipo, si possono ricondurre facilmente a queste tipologie. Lo vediamo su alcuni esempi istruttivi.

- Consideriamo $\displaystyle\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$. Questo integrale è gia della tipologia (i), con $f(x) = 1 + x$ e $\alpha = 1/2$. Si ha quindi

$$\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int (x+1)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c.$$

- $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\,\mathrm{d}x$. È come prima, con $f(x) = 3x - 2$. Questa volta però c'è una costante da "aggiustare" per rientrare nella tipologia (i). Infatti occorre che dentro all'integrale ci sia anche la derivata di f, che in questo caso è 3. Sfruttando la linearità dell'integrale possiamo semplicemente moltiplicare e dividere per 3 e scrivere

$$\int \sqrt{3x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3(3x-2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2} + c = 2/9\sqrt{(3x-2)^3} + c.$$ [5]

Riassumendo possiamo vedere la cosa in questi termini: per essere nella tipologia (i) devo avere dentro all'integrale una potenza di f per la derivata di f. Dato che chiaramente deve essere $f(x) = 3x - 2$ e risulta $f'(x) = 3$, mi serve un 3 dentro all'integrale. Moltiplico quindi per 3 dentro all'integrale e contemporaneamente divido per 3 fuori dall'integrale.

- Consideriamo $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$. Qui siamo molto vicini alla tipologia (ii). Infatti, se poniamo $f(x) = 2x + 1$, che ha per derivata 2, possiamo scrivere

$$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c.$$

[4] Con la scrittura esplicita della variabile le tre formule si scrivono ovviamente

$$\int f^\alpha(x)\, f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad , \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \quad , \quad \int e^{f(x)}\, f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c.$$

[5] Si ricordi sempre che, per controllare la correttezza del risultato, per vedere cioè se la primitiva trovata è effettivamente una primitiva, basta controllare che la derivata di quest'ultima sia la funzione da integrare. Questo è un utile esercizio che gli studenti che vedono queste cose per la prima volta dovrebbero sempre fare, anzitutto perché rafforzano le tecniche di derivazione e in secondo luogo perché chiariscono molti aspetti legati anche all'integrazione.

- $\int e^{1-2x}\,\mathrm{d}x$. Qui è ovviamente la tipologia (iii) che possiamo intravedere. Possiamo porre $f(x) = 1 - 2x$, che ha derivata -2, e quindi possiamo scrivere
$$\int e^{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2)e^{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{1-2x} + c.$$
- Talvolta può essere utile un piccolo "trucco". Ad esempio, con $\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$, si può aggiungere e togliere 1 a numeratore per ottenere il denominatore e poter scrivere la frazione come somma di due frazioni:
$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x - \ln|x+1| + c.$$
- Qualche volta i due trucchi del moltiplicare/dividere e dell'aggiungere/togliere possono essere applicati congiuntamente. Ad esempio
$$\int \frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|2x+1| + c.$$

Osservazione È chiaro che il metodo di "aggiustamento delle costanti" funziona solo in casi particolari. Mi spiego: se avessimo $\int e^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, osservando che $D(e^{x^2+1}) = 2xe^{x^2+1}$, non possiamo certo moltiplicare dentro all'integrale per $2x$ e dividere fuori per $2x$ (con le costanti funziona (linearità dell'integrale) ma con la variabile no!).

Però potremmo avere situazioni come le seguenti:

- $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Possiamo vedere in questo l'integrale della potenza, con esponente $1/2$, della funzione $f(x) = x^2 + 1$. La tipologia (i) chiede che dentro all'integrale ci sia anche la derivata di f, che è $f'(x) = 2x$: c'è x, manca il 2. Quindi, come prima, moltiplicando e dividendo per 2,
$$\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c.$$
- Consideriamo $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Si osserva che a numeratore compare la derivata del denominatore, a meno di una costante moltiplicativa (un 2). Allora possiamo rientrare nella tipologia (ii) moltiplicando e dividendo per 2:
$$\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$ [6]
- $\int xe^{2x^2}\,\mathrm{d}x$. Siamo nella tipologia (iii), con $f(x) = 2x^2$, la cui derivata è $f'(x) = 4x$. Allora
$$\int xe^{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4xe^{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x^2} + c.$$
- Consideriamo ancora $\int\frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$. Siamo nella tipologia (ii), con $f(x) = x^3 + 1$, la cui derivata è $f'(x) = 3x^2$. Allora
$$\int\frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + c.$$ [7]
- Ancora: $\int(x+2)\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. Osserviamo che dentro all'integrale c'è $f(x) = x^2 + 4x + 1$ elevata alla $2/3$ e che $f'(x) = 2x + 4$. Dentro all'integrale c'è anche $x + 2$. Quindi possiamo scrivere
$$\int(x+2)\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(2x+4)\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(x^2+4x+1)^{5/3}}{5/3} + c.$$

[6] Si noti che in questo caso si può anche non mettere il valore assoluto, dato che l'argomento del logaritmo è certamente positivo.
[7] Qui no che non possiamo togliere il valore assoluto: l'argomento del logaritmo $x^3 + 1$ può anche essere negativo.

3 Tecniche di integrazione II

3.1 Formula di integrazione per parti

Un'importante modalità di calcolo degli integrali è data dalla seguente

Proposizione Sia I un intervallo e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo poi che f sia derivabile e che G sia una primitiva di g in I. Vale la formula, detta **formula di integrazione per parti**,

$$\int f\,g = f\,G - \int G\,f' \qquad \text{oppure} \qquad \int f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,G(x) - \int G(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Osservazioni La formula dice sostanzialmente che l'integrale del prodotto di due funzioni può essere trasformato in: "la prima funzione per una primitiva della seconda meno l'integrale di questa primitiva della seconda funzione per la derivata della prima". Solitamente f viene detta la *parte finita* e g viene detta la *parte differenziale*. La formula di integrazione per parti può quindi essere così ricordata: "l'integrale della parte finita per la parte differenziale è uguale alla parte finita per una primitiva della parte differenziale meno l'integrale di questa primitiva per la derivata della parte finita".

Per provare la formula dobbiamo dimostrare che la derivata di quello che sta a destra, cioè $f\,G - \int G\,f'$, è la funzione che sta sotto l'integrale di sinistra, cioè fg. Infatti

$$D\left(fG - \int Gf'\right) = f'G + fg - Gf' = fg.$$ [8]

Esempi Ecco alcuni esempi d'uso della formula di integrazione per parti.

- $\int xe^x\,\mathrm{d}x$. Scegliendo come parte finita x e come parte differenziale e^x abbiamo:[9]

$$\begin{aligned}\int xe^x\,\mathrm{d}x &= xe^x - \int 1\,e^x\,\mathrm{d}x \\ &= xe^x - e^x + c.\end{aligned}$$

- $\int \ln x\,\mathrm{d}x$. Scegliendo come parte finita $\ln x$ e come parte differenziale 1 abbiamo:[10]

$$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x &= \int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= \ln x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln x - x + c.\end{aligned}$$

[8] Nella speranza che questo modo, non del tutto rigoroso ma efficace, di presentare la dimostrazione semplifichi la comprensione della stessa, faccio notare che se nel simbolo $\int Gf'$ vediamo una qualunque primitiva di Gf', la derivata $D(\int Gf')$ è appunto Gf', mentre la derivata di fg si ottiene con la solita regola di derivazione del prodotto.

[9] Non esistono regole su quale sia la scelta "giusta", cioè la scelta che permette di calcolare l'integrale. L'integrazione per parti non risolve in un solo passo l'integrale. Lo risolve a patto che siamo in grado di calcolare il nuovo integrale che compare dopo l'applicazione della formula. È un po' come nell'applicazione del teorema di De l'Hôpital: non si sa a priori se il metodo funziona, si prova e si vede subito se può funzionare. Magari non si risolve al primo tentativo ma, se la forma si semplifica, c'è la speranza che applicando nuovamente il teorema si arrivi alla conclusione.

Ad esempio (istruttivo), nell' $\int xe^x\,\mathrm{d}x$, se prendiamo come parte finita e^x e come parte differenziale x, al primo passo si ha

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = e^x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot e^x\,\mathrm{d}x$$

e si vede subito che l'integrale si complica. Quindi non si continua su questa strada.

[10] Anche questo esempio è istruttivo: si noti che l'integrazione per parti può essere applicata anche quando non c'è un prodotto evidente. Un prodotto si può sempre creare anche se non c'è, basta moltiplicare per 1. Sembra una cosa inutile (e il più delle volte lo è), ma non nel calcolo degli integrali. Non è detto però che funzioni sempre.

- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$. Scegliendo come parte finita $\ln x$ e come parte differenziale x abbiamo

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c.\end{aligned}$$

- La formula di integrazione per parti può essere applicata ripetutamente. Si consideri $\displaystyle\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$. Scegliendo come parte finita $\ln^2 x$ e come parte differenziale x abbiamo con una prima integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x &= \ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

  Ora possiamo integrare nuovamente per parti (ma qui conviene utilizzare direttamente il risultato che è stato trovato sopra, integrando appunto per parti). Si ottiene

$$\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+c.$$

- Lo studente provi a risolvere l'integrale $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$, integrando due volte per parti e cerchi di intuire che nello stesso modo è possibile risolvere un integrale del tipo $\displaystyle\int P(x)e^x\,\mathrm{d}x$, dove P è un qualunque polinomio.

3.2 Integrazione per sostituzione

Un'altra importante modalità di calcolo degli integrali si ricava dalla seguente

Proposizione Siano I,J intervalli, $f:I\to\mathbb{R}$, $g:J\to I$ (per cui si può definire la funzione composta $f(g)$). Inoltre g sia derivabile e F sia una primitiva di f in I. Allora $F(g)$ è una primitiva di $f(g)\,g'$.

Osservazione Per provare la Proposizione basta ricordare la formula di derivazione della funzione composta:

$$(F(g))'=(F'(g))\,g'=(f(g))\,g'.$$

La Proposizione è nota come formula di **integrazione per sostituzione** (o **cambio di variabile**).
Se la scriviamo nella forma integrale e con l'indicazione esplicita della variabile, essa dice che

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x=F\big(g(x)\big)+c.$$

La formula potrebbe essere ricordata e applicata direttamente come è scritta,[11] quindi senza fare ricorso ad un vero e proprio cambio di variabile. Per cercare di capire invece come intervenga un possibile cambio di variabile consideriamo nell'integrale la sostituzione (o cambio di variabile) $g(x)=t$. Ora accordiamoci di accettare questa "regola pratica del calcolo": $\mathrm{d}t=g'(x)\,\mathrm{d}x$. Allora otteniamo formalmente

$$\int f(\overbrace{g(x)}^{t})\,\overbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t}=\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Se F è una primitiva di f (come detto nella formulazione della Proposizione), allora sappiamo integrare

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t=F(t)+c=\ \text{(tornando alla variabile } x\text{)}\ =F(g(x))+c,$$

che è appunto il risultato voluto.

[11] Cioè senza un effettivo cambio di variabile. La formula dice sostanzialmente che possiamo calcolare una primitiva di una funzione composta (cioè $f(g)$) a patto che nell'integrale ci sia anche la derivata di g (moltiplicata per il resto) e che io conosca una primitiva di f. Un esempio potrebbe essere $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$, e lo studente si accorgerà che in questo caso siamo in una delle tipologie viste in precedenza.

Esempi Vediamo alcuni esempi di integrazione per sostituzione. Essi indicano il procedimento operativo che solitamente occorre seguire.

- Consideriamo $\int \frac{1}{x \ln^2 x}\, \mathrm{d}x$. Qui in realtà non è necessario un cambio di variabile, dato che siamo nella tipologia di integrazione della potenza di una funzione per la sua derivata. Si può fare quindi

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\, \mathrm{d}x = \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

  Però possiamo anche procedere con il cambio di variabile. Ponendo $\ln x = t$, ricaviamo da questa x e successivamente calcoliamo il $\mathrm{d}x$: si ha $x = e^t$ e quindi $\mathrm{d}x = e^t\, \mathrm{d}t$. Pertanto l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^t t^2} \cdot e^t\, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

- Consideriamo $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, \mathrm{d}x$. Poniamo $e^{-x} = t$, da cui $-x = \ln t$, cioè $x = -\ln t$ e $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$. Pertanto l'integrale diventa

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = -\int \frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t = -\ln|1+t| + c = -\ln(1+e^{-x}) + c.$$

- Consideriamo $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$. Poniamo $\sqrt{x} = t$, da cui $x = t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\, \mathrm{d}t$. Pertanto l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t} \cdot 2t\, \mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\, \mathrm{d}t = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}\, \mathrm{d}t = 2\Big(t - \ln|1+t|\Big) + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})\Big) + c.$$

- Un integrale importante in Statistica (Probabilità): $\int e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, \mathrm{d}x$ (μ e σ sono numeri fissati, che avranno un significato molto importante quando userete questo integrale l'anno prossimo). Limitiamoci ad operare un cambio di variabile, ponendo $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$. Si ricava $x - \mu = \sigma t$ e quindi $x = \mu + \sigma t$, da cui $\mathrm{d}x = \sigma\, \mathrm{d}t$. Pertanto l'integrale diventa

$$\int e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int e^{-t^2} \cdot \sigma\, \mathrm{d}t = \sigma \int e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

  Non cerchiamo una primitiva della funzione e^{-t^2}.[12]

Osservazione A conclusione di queste sezioni sui vari metodi di integrazione fin qui presentati è forse opportuno fare il punto. Come si vede, per il calcolo di un integrale indefinito, cioè sostanzialmente il calcolo di una primitiva di una funzione, esistono varie tecniche possibili. La difficoltà in genere è data dal fatto che a priori non si sa quale delle tecniche possa avere successo (è l'esperienza che può aiutare).

Se lo studente riflette su quali tipi di funzioni siamo riusciti ad integrare, si accorgerà che non è nemmeno così semplice rispondere in modo sintetico alla domanda stessa.

Volendo a tutti costi cercare qualche "regola", si può osservare che:

- se ho l'integrale di una somma (o differenza) di funzioni, posso fare la somma (o differenza) degli integrali, a patto di saper calcolare questi ultimi. Se ci sono costanti *moltiplicative*, queste possono essere "portate fuori dall'integrale");
- se ho l'integrale di un prodotto di funzioni, *può* funzionare l'integrazione per parti; ma l'integrale potrebbe anche essere più semplice (quasi immediato) a patto che rientri in una delle tipologie considerate;
- abbiamo visto anche esempi di integrazione per parti quando non si aveva un prodotto (almeno non così evidente);
- se abbiamo composizioni di funzioni potremmo essere in una delle tipologie, e questo succede quando nell'integrale c'è anche la derivata di una delle funzioni componenti;
- se tutto il resto fallisce si *può* provare con la sostituzione.

[12]Dal punto di vista del calcolo della primitiva questa è una funzione particolare. Dirò qualcosa di più nella prossima dispensa.

In conclusione: una regola generale non c'è. Faccio osservare anche che ci sono classi di funzioni che non abbiamo ancora incontrato per l'integrazione: ad esempio, sappiamo integrare un polinomio, ma in presenza di un quoziente di polinomi, a parte qualche caso semplice, non abbiamo un metodo generale. Qualche studente potrebbe farsi questa domanda: tutte le funzioni hanno una primitiva? Attenzione, la domanda è più sottile di quanto possa sembrare. Ho appena detto che ci sono casi in cui non abbiamo un metodo generale. La vera domanda è quindi: ogni funzione ha una primitiva, a prescindere dal fatto che ci sia un metodo per calcolarla? La risposta nella prossima dispensa.

Esercizio 3.1 Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

(a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+5x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+10x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \frac{1-x}{3x-1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (n) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

4 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 3.1

(a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+5x}\,\mathrm{d}x$. È un integrale quasi immediato. Occorre però "aggiustare una costante".[13] Si ha

$$\int \sqrt[3]{1+5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int 5(1+5x)^{1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\frac{(1+5x)^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(1+5x)^4} + c.$$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. Integrale quasi immediato. Basta solo aggiustare la costante:

$$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + c.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+10x}\,\mathrm{d}x$. Integrale quasi immediato. Anche qui basta aggiustare la costante:

$$\int \frac{1}{1+10x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{10}{1+10x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\ln|1+10x| + c.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$. Integrale quasi immediato. Aggiustando la costante:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = -\int -(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2} + c = -2\sqrt{1-x} + c.$$

[13] Ricordo che con "aggiustare una costante" intendo moltiplicare e dividere per una costante in modo da far rientrare l'integrale in un integrale immediato di una qualche tipologia.

(e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$. Qui possiamo cercare di ottenere a numeratore il denominatore, con un'opportuna operazione di dividi/moltiplica:

$$\int \frac{x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln|2x+1| + c.$$

Ricordo che una procedura del tutto analoga è quella di dividere il polinomio $x+1$ per il polinomio $2x+1$ (con la divisione tra polinomi vista all'inizio del corso). Lo studente provi a ricalcolare l'integrale usando questa tecnica.

(f) $\displaystyle\int \frac{1-x}{3x-1}\,\mathrm{d}x$. Come sopra, dopo aver cambiato di segno:

$$\int \frac{1-x}{3x-1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{x-1}{3x-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{3x-3}{3x-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\ln|3x-1| + c.$$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$. È un integrale quasi immediato del tipo $\int f^\alpha Df$, con f data dalla funzione logaritmica. Quindi

$$\int \frac{1}{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$. È un integrale del tipo $\int \frac{Df}{f}$, con f data dalla funzione $1+x^3$. Bisogna però anche aggiustare una costante.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + c.$$

Lo si poteva anche risolvere con un cambio di variabile. Ponendo $x^3 = t$ si ricava $x = t^{1/3}$ e quindi $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}t^{-2/3}\,\mathrm{d}t$. Pertanto sostituendo si ottiene

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^{2/3}}{1+t}\cdot\frac{1}{3}t^{-2/3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln|1+t| + c = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + c.$$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$. È del tipo $\int e^f Df$, con f data dalla funzione $1/x$. Bisogna però anche aggiustare il segno.

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int e^{1/x}\cdot\Big(-1/x^2\Big)\,\mathrm{d}x = -e^{1/x} + c.$$

Anche questo si può risolvere con un cambio di variabile: ponendo $\frac{1}{x} = t$ si ricava $x = \frac{1}{t}$ e quindi $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Pertanto sostituendo si ottiene

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^t}{1/t^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int e^t\,\mathrm{d}t = -e^t + c = -e^{1/x} + c.$$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$. La derivata di $1+\sqrt{x}$ è $1/(2\sqrt{x})$. Quindi si può aggiustare una costante e ricondurlo ad un integrale del tipo $\int \frac{Df}{f}$, con f data appunto da $1+\sqrt{x}$. Allora

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x = 2\ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

Alternativamente, con un cambio di variabile: ponendo $\sqrt{x} = t$ si ricava $x = t^2$ e quindi $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Pertanto sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t(1+t)}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\ln|1+t| + c = 2\ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

(k) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Con la sostituzione $x^2 = t$, da cui $x = \sqrt{t}$ e quindi $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, si ha

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

Lascio allo studente provare la risoluzione con un cambio di variabile: si può porre $x^2 = t$, oppure $1+x^2 = t$, oppure $\sqrt{1+x^2} = t$. È un utile esercizio provare le tre possibilità.

(l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$. La derivata di $1+1/x^2$ è $-2/x^3$. Quindi si può aggiustare una costante e ricondurlo ad un integrale del tipo $\int f^\alpha Df$, con f data da $1+1/x^2$. Si ha

$$\int \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{-2}{x^3}\sqrt{1+1/x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{(1+1/x^2)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1+1/x^2)^3} + c.$$

Anche qui lascio per esercizio la risoluzione con un cambio di variabile.

(m) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Per parti, con parte finita x^2:

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= x^2(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\cdot 2x\,\mathrm{d}x \\
&= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -x^2e^{-x} + 2\Big(x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c.
\end{aligned}$$

(n) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$. Per parti, con parte finita $\ln x$:

$$\begin{aligned}
\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.
\end{aligned}$$