II-8 Integrale di Riemann

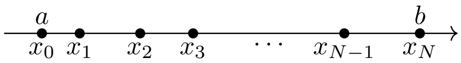
Indice

1 Definizione di integrale di Riemann

Definizione Sia $[a, b]$ in intervallo chiuso e limitato. Chiamiamo **partizione** di $[a, b]$ un sottoinsieme finito

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$$

di punti di $[a, b]$ tali che $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$. [1] Indichiamo con $\mathbb{P}[a, b]$ l'insieme di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$ (ovviamente sono infinite).



Definizione Supponiamo che in $[a, b]$ sia definita una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e che f sia *limitata*.

Ad ogni partizione $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ di $[a, b]$ possiamo associare la **somma inferiore** $s(P)$ e la **somma superiore** $S(P)$ **di Riemann**, definite da

$$s(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i - x_{i-1}\right) \qquad \text{e} \qquad S(P) = \sum_{i=1}^{N} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right),$$

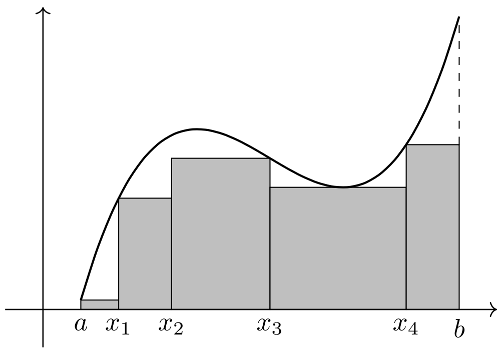
dove

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

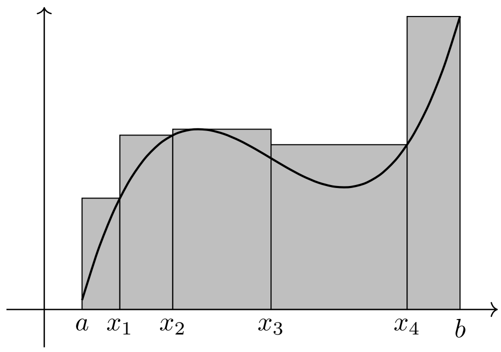
Si leggano attentamente le definizioni appena date e si rifletta sul loro significato: le differenze $x_i - x_{i-1}$ sono le ampiezze dei sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$ individuati dalla partizione e le quantità m_i e M_i sono rispettivamente gli estremi inferiori e superiori della funzione in tali sottointervalli.

Le figure che seguono illustrano la costruzione di una somma inferiore e di una somma superiore di Riemann di una funzione, relative ad una partizione dell'intervallo in 5 sottointervalli.

[1] È chiaro che l'insieme $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$ è fatto da $N + 1$ punti e che questi punti, con le caratteristiche richieste, suddividono $[a, b]$ in N sottointervalli.



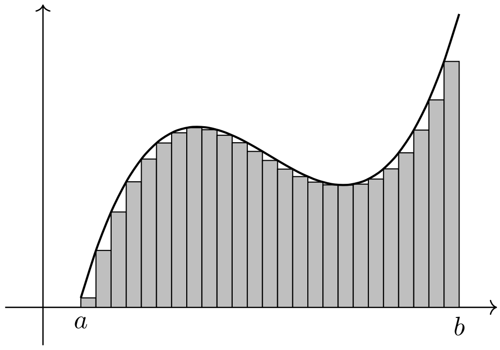
Somma inferiore di Riemann



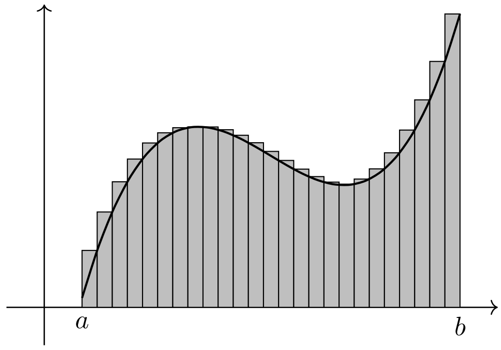
Somma superiore di Riemann

Osservazione Sono rappresentate la somma inferiore e la somma superiore di una funzione positiva, relative alla partizione $\{a, x_1, x_2, x_3, x_4, b\}$. Si osservi che le quantità $m_i(x_i - x_{i-1})$ forniscono l'area dei rettangoli inscritti della figura di sinistra, mentre le quantità $M_i(x_i - x_{i-1})$ forniscono l'area dei rettangoli circoscritti della figura di destra. Quindi la somma inferiore di Riemann fornisce l'area dell'unione di tutti i rettangoli inscritti, relativi alla data partizione, e la somma superiore l'area dell'unione di tutti i rettangoli circoscritti. Entrambe le somme danno un'approssimazione, una per difetto e l'altra per eccesso, dell'area della regione che sta tra l'asse x e il grafico della funzione. È chiaro che tale approssimazione è piuttosto scarsa se la partizione è di pochi intervalli.

Nella figura qui sotto vengono raffigurate la somma inferiore e la somma superiore di Riemann della stessa funzione precedente, relative questa volta ad una partizione dell'intervallo in 25 sottointervalli.



Somma inferiore di Riemann



Somma superiore di Riemann

Osservazione Qui è chiaro che l'approssimazione fornita dalle somme inferiore e superiore è molto migliore.

Si definiscono ora **integrale inferiore** $\underline{\int_a^b} f$ e **integrale superiore** $\overline{\int_a^b} f$ **di Riemann** di f in $[a, b]$ rispettivamente

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} s(P) \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f = \inf_{P \in \mathbb{P}[a,b]} S(P).$$

Osservazione Quindi l'integrale inferiore si ottiene prendendo l'estremo superiore dell'insieme di tutte le possibili somme inferiori. Invece l'integrale superiore si ottiene prendendo l'estremo inferiore dell'insieme di tutte le possibili somme superiori. Naturalmente nessuno ci garantisce che così facendo otteniamo la stessa quantità, cioè che integrale inferiore e integrale superiore siano uguali. Si consideri anche che almeno uno dei due potrebbe essere infinito.

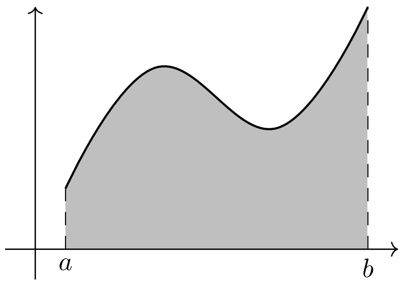
Si può dimostrare che in generale

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Ecco ora la conclusione della definizione: diciamo che f è **integrabile secondo Riemann** nell'intervallo $[a, b]$ se $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. In tale caso chiamiamo **integrale di Riemann** di f in $[a, b]$ il valore comune degli integrali inferiore e superiore di f e lo indichiamo con $\int_a^b f$. [2] Per distinguerlo dall'integrale indefinito, questo viene spesso detto *integrale definito*.

[2] Quando nella scrittura di f appare esplicitamente l'indicazione della variabile si usa scrivere $\int_a^b f(x)\,dx$, come già visto con gli integrali indefiniti.

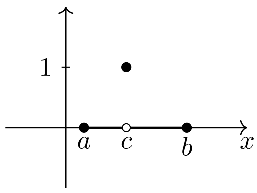
Osservazione Data la definizione di integrale di Riemann e alcune considerazioni già fatte, è chiaro che l'integrale ha a che fare con l'area della regione di piano sottesa dal grafico di f. È bene ricordare che l'area è una quantità positiva e che quindi quanto detto è vero solo se la f è non negativa nell'intervallo. Quindi l'integrale di una f non negativa è l'area della regione sottesa dal grafico di f (può essere questa un'interpretazione geometrica dell'integrale). Se la f cambia segno, *non è vero* che l'integrale sia l'area della regione sottesa dal grafico di f. In tali casi si può comunque dire che l'integrale è l'*area con segno* di questa regione, intendendo con "area con segno" l'area, eventualmente cambiata di segno nelle regioni in cui la funzione è negativa.



Esempi

- Vediamo un esempio molto semplice in cui possiamo calcolare l'integrale con la definizione. Consideriamo la funzione costante $f(x) = h$, dove h è un numero reale, definita nell'intervallo $[a, b]$.

  Prendiamo una generica partizione P dell'intervallo $[a, b]$ data dall'insieme di punti $\{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{N-1}, x_N = b\}$ e costruiamo la relativa somma superiore

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{i=1}^{N} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} h \left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= h \left(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_N - x_{N-1}\right) \\ &= h \left(x_N - x_0\right) = h\,(b - a). \end{aligned}$$

  Se h è positivo otteniamo la formula dell'area del rettangolo di base $b - a$ e altezza h. Osserviamo che il valore della somma superiore non dipende dalla partizione scelta.

  Si vede immediatamente ora che anche tutte le somme inferiori sono uguali a $h(b - a)$ e che quindi la funzione è integrabile e l'integrale vale $h(b - a)$.

- Può sorgere la domanda se tutte le funzioni, nell'intervallo in cui risultano definite, siano integrabili secondo Riemann in tale intervallo. La risposta è negativa e qui fornisco un esempio di funzione non integrabile. Per certi aspetti si tratta di una funzione "strana". È la *funzione di Dirichlet*, già incontrata nella sezione II-5 1.

  Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  Si può provare che f non è integrabile secondo Riemann. Infatti, per le proprietà dei razionali e dei reali, si può provare che per ogni partizione P di $[0, 1]$ si ha che

$$s(P) = 0 \qquad \text{e} \qquad S(P) = 1,$$

  per cui $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$ e quindi f non è integrabile secondo Riemann.

  L'integrabilità secondo Riemann non è quindi una proprietà che tutte le funzioni hanno e si pone il problema di come poter sapere se una funzione sia integrabile oppure no.

2 Condizioni di esistenza dell'integrale di Riemann

Data la complessità della definizione, non è facile capire se una funzione è integrabile secondo Riemann. Si pone allora la seguente questione: ci sono proprietà di una funzione che assicurano la sua integrabilità? La risposta è affermativa.

Teorema Supponiamo che sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se vale una delle condizioni seguenti:

(i) f è continua in $[a, b]$;

(ii) f è monotona in $[a, b]$;

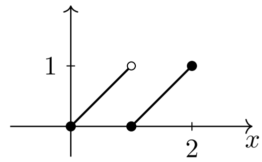
(iii) f è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità in $[a, b]$,

allora f è integrabile secondo Riemann.

Osservazione Ribadisco che queste condizioni sono singolarmente sufficienti per l'integrabilità. Ciascuna quindi, indipendentemente dalle altre, garantisce l'integrabilità secondo Riemann della funzione.

Osservazione Il teorema permette di affermare che una grandissima parte delle funzioni, definite in un intervallo, che solitamente incontriamo sono integrabili secondo Riemann. Ad esempio un qualunque polinomio, considerato in un qualunque intervallo $[a, b]$, lo è. Tutte le funzioni elementari, considerate in un intervallo $[a, b]$ in cui risultano definite, lo sono (sono funzioni continue).[3] Anche la funzione $f(x) = |x|$, pur non essendo una funzione elementare, è continua in qualunque intervallo chiuso e limitato e quindi integrabile secondo Riemann in tale intervallo. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ x - 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$



è integrabile secondo Riemann in $[0, 2]$, dato che, pur non essendo continua né monotona, è limitata e ha un solo punto di discontinuità.

3 Proprietà dell'integrale di Riemann

Teorema Supponiamo che $[a, b]$ sia un intervallo chiuso e limitato e che f, g siano integrabili secondo Riemann in $[a, b]$. Allora valgono le proprietà seguenti:

(i) **(linearità)** se c_1, c_2 sono due costanti, allora $c_1 f + c_2 g$ sono integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g;$$

(ii) **(monotonia)** se $f \leq g$, allora $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$; [4]

(iii) se $a < c < b$, allora

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f;$$

(iv) se $|f(x)| \leq M$, allora

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M\,(b - a);$$

(v) fg è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$;

(vi) $|f|$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Osservazione Il punto (vi) ribadisce quindi che se f è integrabile allora anche $|f|$ lo è e aggiunge una disuguaglianza tra gli integrali.

Osservazioni Supponiamo che $a > 0$ e che f sia integrabile secondo Riemann in $[-a, a]$. Si intuisce, e non sarebbe difficile dimostrarlo, che

- se f è dispari, allora $\int_{-a}^a f = 0$;
- se f è pari, allora $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.

[3] Si faccia attenzione: l'intervallo deve essere chiuso e limitato, almeno per ora. Quindi non possiamo dire ad esempio che $\ln x$ in $(0, 1)$ sia integrabile.

[4] Non si confonda la monotonia di una funzione con la monotonia dell'integrale. Qui si parla di monotonia dell'integrale.

Quindi, anche se non sappiamo ancora come calcolare gli integrali, possiamo dire che $\int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x = 0$, dato che la funzione $x \mapsto x^3$ è integrabile (in quanto monotona, o continua) e dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine. Possiamo anche dire che $\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$, ma quest'ultimo non lo sappiamo ancora calcolare.

È importante il seguente

Teorema (della media integrale). Supponiamo che f sia continua in $[a, b]$. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

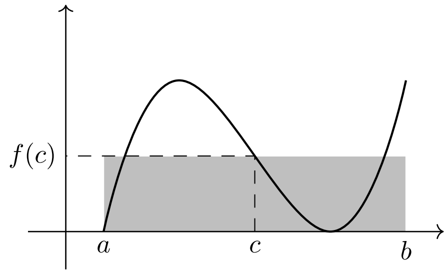
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \qquad \text{oppure, analogamente,} \quad \int_a^b f = (b-a) f(c).$$

Il numero $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f$ si chiama **media integrale** di f in $[a, b]$.

Osservazione Il teorema ha una semplice interpretazione geometrica: scrivendo la tesi nella forma

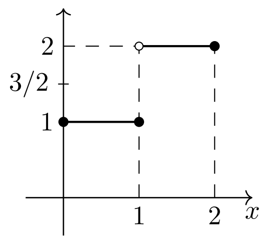
$$\int_a^b f = (b-a) f(c)$$

vi si legge che l'integrale è uguale all'area del rettangolo di base l'intervallo $[a, b]$ e altezza $f(c)$. Attenzione che questa interpretazione geometrica vale se possiamo identificare l'integrale con l'area, cioè se la f è positiva.



Osservazione La tesi può essere falsa in assenza dell'ipotesi di continuità di f. Consideriamo la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \le 2. \end{cases}$$



La media integrale di f in $[0, 2]$ è

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f = \frac{3}{2},$$

ma non esiste nessun punto c dell'intervallo $[0, 2]$ in cui $f(c) = \frac{3}{2}$.

Osservazione Un'interessante questione è se l'annullarsi dell'integrale comporta necessariamente che la funzione sia sempre nulla. Qualche studente forse dirà subito che questo è falso, ricordando uno degli esempi iniziali di calcolo dell'integrale con la definizione (lo si cerchi). E noterà che in quell'esempio la funzione non era continua. Infatti la continuità è importante in questo aspetto. Si potrebbe dimostrare che, se f è continua e non negativa in $[a, b]$ e se $\int_a^b f = 0$, allora f è identicamente nulla in $[a, b]$. Per esercizio lo studente verifichi che la conclusione può essere falsa se si omette l'ipotesi di non negatività di f o quella di continuità.

4 Calcolo dell'integrale

La definizione di integrale non è comoda per il calcolo operativo degli integrali. Occorre un metodo di calcolo più efficace, e tra poco lo otteniamo.

4.1 La funzione integrale

Sia f una funzione integrabile nell'intervallo $[a, b]$. A partire da f possiamo definire una nuova funzione, che associa ad ogni $x \in [a, b]$ l'integrale di f tra a e x, cioè

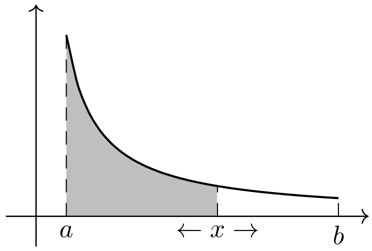
$$F(x) = \int_a^x f \quad , \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Se vogliamo scrivere esplicitamente nell'integrale anche la variabile di integrazione è bene fare in modo di non confondere questa con la variabile della funzione F, cioè x. Si scrive allora

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \quad , \text{per ogni } x \in [a, b].$$

La si veda così: per ogni x fissato in $[a, b]$, t varia tra a e x ed è la *variabile di integrazione*.

Questa nuova funzione F si chiama **funzione integrale di f in** $[a, b]$ ed è una funzione molto importante.



La figura qui sopra illustra che il valore della funzione integrale in x (di una funzione non negativa) è l'area sottesa dal grafico tra a e x, al variare di x.

Osservazione Si può dimostrare che la funzione integrale F di una funzione integrabile f è una funzione continua (nell'intervallo in cui è definita). Quindi, anche se f non è continua, la sua funzione integrale lo è. Si potrebbe dire che la funzione integrale è più regolare della funzione da cui proviene. Questa particolarità della funzione integrale è confermata anche dal seguente importantissimo teorema.

4.2 Il teorema fondamentale del calcolo

Teorema (fondamentale del calcolo). Supponiamo che f sia integrabile in $[a, b]$ e che F sia la sua funzione integrale. Valgono le proprietà seguenti:

(i) se f è continua in $[a, b]$, allora F è derivabile e $F' = f$ in $[a, b]$;

(ii) se f è continua in $[a, b]$ e G è una qualunque primitiva di f in $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Osservazione Il punto (i) del teorema afferma quindi che se f è continua allora la sua funzione integrale è una sua primitiva. La funzione costruita con l'integrale di f è una funzione che ha per derivata f (legame profondo tra derivata e integrale).
Il punto (ii) del teorema fondamentale fornisce invece un comodo metodo per il calcolo dell'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dice infatti che, se conosciamo una primitiva G di f in $[a, b]$, allora l'integrale è dato da $G(b) - G(a)$. È chiaro che la parte difficile sta nel calcolo della primitiva che, abbiamo visto, può non essere banale.

Osservazione Nel calcolo dell'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, dopo aver trovato una primitiva G di f, per indicare che si applica il teorema fondamentale e si calcola la variazione della primitiva agli estremi dell'intervallo, si scrive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b, \quad \text{che sta ad indicare appunto } G(b) - G(a).$$

Vediamo allora qualche esempio di calcolo di integrale definito.

Esempi

- Calcoliamo $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Si ha
$$\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$ [5]

- Calcoliamo $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$. Si ha
$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

[5] Per quanto detto in precedenza sugli integrali di funzioni pari o dispari, si poteva anche fare
$$\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

- Calcoliamo $\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$. Si ha (ricordo che l'integrazione di $\ln x$ si fa per parti)

$$\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x = (x\ln x - x)\Big|_1^e = 1.$$

- Calcoliamo $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Ricordando che

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2)xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

si ha

$$\int_{-1}^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-1}^1 = 0.$$

Il risultato era prevedibile, dato che la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine.

Esempio Per concludere questa sezione vediamo come si può ottenere l'espressione di una funzione integrale.[6]
Consideriamo ancora la funzione $f(x) = xe^{-x^2}$ nell'intervallo $[-1,1]$. Troviamo l'espressione della funzione integrale di f in tale intervallo. Dalla definizione di funzione integrale abbiamo

$$F(x) = \int_{-1}^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-1}^x(-2)te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_{-1}^x = -\frac{1}{2}\big(e^{-x^2} - e^{-1}\big).$$

A verifica del teorema fondamentale, possiamo osservare che calcolando la derivata di F otteniamo

$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot(-2x) = xe^{-x^2} = f(x).$$

Non approfondisco questo aspetto, ma per evitare che qualche studente perda inutilmente del tempo nel calcolo di qualche integrale (talvolta per fare qualche esercizio in più ci si inventa una funzione e si prova ad integrarla) avverto che ci sono funzioni che non si possono integrare. Chiarisco il significato: ci sono funzioni che non hanno *primitive elementari*. Ogni funzione continua ha primitive, in conseguenza del teorema fondamentale del calcolo: se f è continua in $[a,b]$ allora $F(x) = \int_a^x f$ è una primitiva di f. Non è detto però che se f è una composizione di funzioni elementari tale primitiva sia ancora una funzione esprimibile attraverso funzioni elementari. Ci sono funzioni "elementari" per cui si può dimostrare che la primitiva non è "elementare". Tra queste la più "famosa" è $f(x) = e^{-x^2}$.[7] Quindi possiamo certamente dire che $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ è una primitiva di e^{-x^2} in tutto $\mathbb{R}$, ma non possiamo esprimere F mediante funzioni elementari (per esprimerla non possiamo fare a meno di usare l'integrale o altre forme ancora più complicate e comunque non elementari).

Esercizio 4.1 Calcolare i seguenti integrali di Riemann.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{7/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^2 e^{1-x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^{1/10} \frac{1}{1+10x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ (j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$ (l) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

[6] Per chiarire il significato di questo faccio osservare che con "espressione della funzione integrale" si potrebbe senz'altro intendere l'espressione fornita dalla definizione stessa di funzione integrale, cioè $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Però questa è un'espressione che coinvolge l'integrale e quindi esprime la $F(x)$ in un modo che non è la composizione di funzioni elementari. Allora la dicitura corretta potrebbe essere: vediamo come ottenere l'espressione di una funzione integrale in termini di funzioni elementari.

[7] Nemmeno e^{x^2} ha primitive elementari, ma "quella col meno" è più famosa, essendo una funzione fondamentale nella teoria della probabilità.

4.3 Integrale di una f definita a tratti

Se dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione definita a tratti basta utilizzare la proprietà (iii) dell'integrale di Riemann, quella che afferma che se ho una partizione dell'intervallo di integrazione, il calcolo dell'integrale può essere scomposto nella somma di più integrali, ciascuno dei quali su di un sottointervallo della partizione.

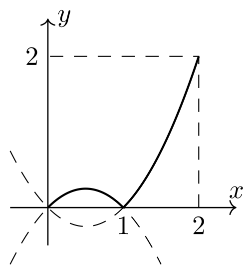
Vediamo allora come si procede in un paio di semplici esempi.

- Se dobbiamo calcolare $\int_0^2 |x^2 - x|\,\mathrm{d}x$, dobbiamo anzitutto osservare che la funzione $x \mapsto x^2 - x$ cambia segno nell'intervallo di integrazione e quindi (dalla definizione di valore assoluto) si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ x - x^2 & \text{se } x \in (0, 1). \end{cases}$$

  Pertanto, usando la proprietà (iii) dell'integrale, possiamo scrivere

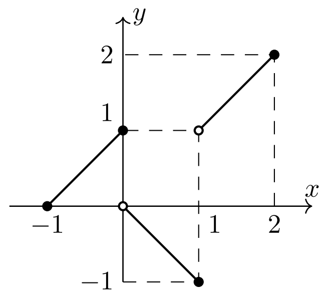
$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^2 - x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$



- Se dobbiamo calcolare l'integrale in $[-1, 2]$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ -x & 0 < x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2, \end{cases}$$

  (lo studente dica perché questa funzione è integrabile) possiamo scrivere



$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 (x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

  Un utile esercizio è verificare il risultato utilizzando il grafico di f e calcolando con la geometria elementare le aree dei triangoli/quadrati individuati nella figura.

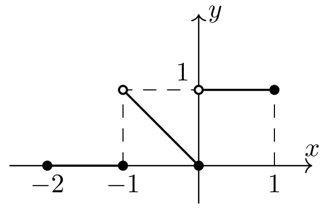
Osservazione Si potrebbe dimostrare rigorosamente, ma mi limito ad enunciare questa semplice ed intuitiva questione: il valore dell'integrale non dipende dai singoli valori che la funzione assume in qualche punto (diciamo in un numero finito di punti). Ad esempio, nel caso appena visto della funzione definita a tratti, noi potremmo cambiare il valore di f in 0 e in 1, cioè agli estremi degli intervalli, senza modificare con questo il valore dell'integrale. E forse si intuisce anche che farlo in due punti o in mille non fa differenza, il valore dell'integrale resterebbe sempre lo stesso. Diversa è la questione se cambiamo il valore di f in un numero infinito di punti, ma qui non vado oltre.

4.4 Funzione integrale di una f definita a tratti

Nel corso di Statistica gli studenti incontreranno anche questo problema: scrivere l'espressione di una funzione integrale di una funzione definita a tratti.

Il problema è per molti aspetti simile a quello appena incontrato, con la piccola difficoltà aggiuntiva dovuta alla presenza della variabile x. Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \le x \le -1 \\ -x & -1 < x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1. \end{cases}$$



Questa funzione è integrabile nell'intervallo $[-2, 1]$ (lo studente dica perché) e quindi possiamo scrivere la funzione integrale di f in tale intervallo, che per definizione è

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

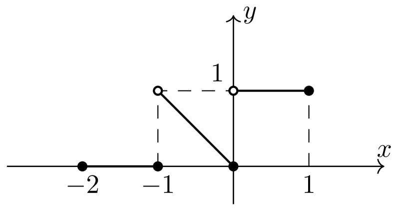
Evidentemente è un problema analogo a quello già incontrato poco fa quando abbiamo trovato l'espressione di una funzione integrale. L'unica differenza è che ora la f è definita a tratti e quindi non abbiamo un'unica espressione di f, ma in questo caso tre espressioni distinte, ciascuna valida in un certo intervallo. Allora dobbiamo distinguere tutti i casi possibili circa la posizione della x, che può stare nel primo ($[-2, -1]$), nel secondo ($(-1, 0]$) o nel terzo intervallo ($(0, 1]$). Quindi abbiamo:

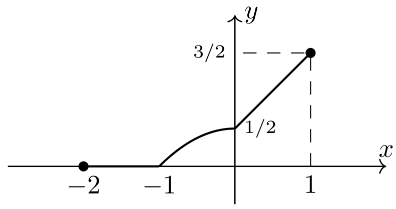
- se $x \in [-2, -1]$
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0;$$
- se $x \in (-1, 0]$
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} (-t)\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2};$$
- se infine $x \in (0, 1]$
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} (-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + t\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + x.$$

Quindi riassumendo possiamo scrivere

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \le x \le -1 \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{2} + x & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Nelle due figure qui sotto ho riportato nuovamente a sinistra il grafico di f e a destra quello di F.





Osservazione Il grafico di F rende evidente una proprietà (peraltro già individuabile nell'espressione di $F(x)$) e cioè la continuità di F nell'intervallo considerato. Si noti che invece f non è continua. Questo non deve sorprendere: ho già parlato in precedenza di questa proprietà: se f è integrabile, allora F è continua. Lo studente attento noterà a questo punto che F non è invece derivabile (in -1 e in 0), e si intuisce che ciò dipende dalla non continuità della f.

Osservazione Metto quindi in guardia lo studente su questo punto: se, in un esercizio analogo al precedente, alla fine dei calcoli otteniamo una funzione integrale che non è continua, abbiamo sicuramente commesso un errore.

5 L'integrale di Riemann generalizzato

L'integrale di Riemann richiede, come abbiamo visto, che la funzione sia *limitata* in un intervallo *limitato*. Nel caso cadano queste ipotesi, si parla di integrale di Riemann *generalizzato*. Esistono quindi due possibili situazioni da considerare a tale proposito: funzione non limitata o intervallo non limitato. Mi limito ad illustrare soltanto la situazione dell'intervallo non limitato, perché questa è la tipologia di integrale generalizzato che gli studenti utilizzeranno nel corso di Statistica.

5.1 Integrale generalizzato su intervallo non limitato

Definizione Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ e sia f continua in $[a, +\infty)$.

Diciamo che f è **integrabile in senso generalizzato** in $[a, +\infty)$ Se $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f$ esiste finito. In tal caso chiamiamo **integrale generalizzato** di f in $[a, +\infty)$ il numero reale

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f \qquad \text{(figura sotto a sinistra).}$$

Analogamente, se $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ ed f è continua in $(-\infty, b]$, diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, b]$ se $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f$ esiste finito. In tal caso chiamiamo integrale generalizzato di f in $(-\infty, b]$ il numero reale

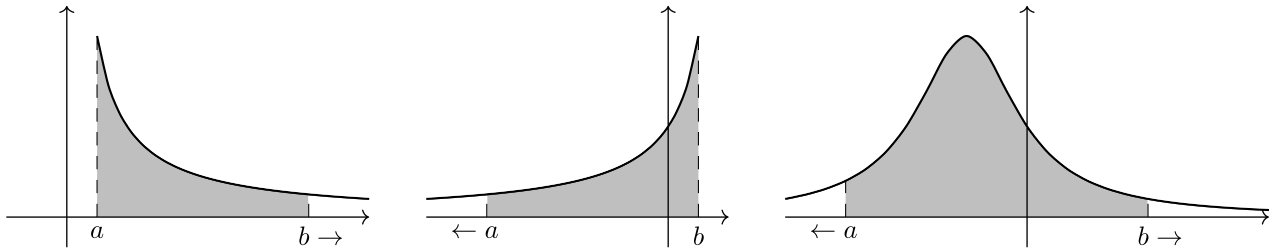
$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f \qquad \text{(figura al centro).}$$

Infine diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, +\infty)$ (in $\mathbb{R}$) se f è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$. Chiamiamo integrale di f in $(-\infty, +\infty)$ (in $\mathbb{R}$) il numero reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f \qquad \text{(figura a destra).}$$

Si faccia attenzione che quindi entrambi gli integrali a destra dell'uguale devono essere finiti.

Se una funzione f è integrabile in senso generalizzato in qualche intervallo, si dice anche che il corrispondente integrale generalizzato *converge*. Altrimenti diciamo che l'integrale generalizzato *diverge*.



Le figure qui sopra illustrano che, se $f \geq 0$, il suo integrale generalizzato è l'area della regione (ora non limitata) sottesa dal grafico di f. Quest'area può essere finita (se l'integrale converge) oppure infinita (se l'integrale diverge).

Dalla definizione di integrale generalizzato e dalla linearità dell'integrale di Riemann, si deduce la proprietà seguente:

- se f e g sono integrabili in senso generalizzato in $[a, +\infty)$ lo stesso vale per $c_1 f + c_2 g$, e si ha

$$\int_a^{+\infty} (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^{+\infty} f + c_2 \int_a^{+\infty} g \qquad \text{(analogamente se l'intervallo è } (-\infty, b] \text{ o } (-\infty, +\infty)\text{).}$$

Vale inoltre la seguente importante proprietà:

- se f è continua in $[a, +\infty)$ e se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$,[8] allora anche f lo è e

$$\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} |f|.$$

Esempio La funzione $x \mapsto e^{-x}$ è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$ e $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Infatti,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \text{(teorema fond. calcolo)} \qquad &= \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

[8] Enunciati analoghi si hanno naturalmente per funzioni definite in intervalli del tipo $(-\infty, b]$ o $(-\infty, +\infty)$.

Si verifichi che invece non è finito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Esempio Consideriamo l'integrale di una funzione potenza, in particolare consideriamo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ con $\alpha > 0$, [9] distinguendo i vari casi.

Se $\alpha = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \text{(teorema fond. calcolo)} \quad &= \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \ln b \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \\ \text{(teorema fond. calcolo)} \quad &= \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1\right). \end{aligned}$$

Il limite è infinito se $0 < \alpha < 1$ ed è invece finito se $\alpha > 1$.

Quindi, riassumendo, l'integrale converge se $\alpha > 1$ e diverge se $0 < \alpha \leq 1$. [10]

Ad esempio, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, dato che $\alpha = 2 > 1$. Invece $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ non convergono, dato che in entrambi $\alpha \leq 1$.

5.2 Criteri di convergenza

Lo studio dell'integrabilità in senso generalizzato di una funzione attraverso la definizione, cioè attraverso il calcolo del limite dell'integrale, risulta talvolta impraticabile, perché richiede il calcolo di una primitiva della funzione, cosa non sempre possibile. Sono utili allora criteri che permettano di stabilire la convergenza dell'integrale generalizzato senza dover calcolare una primitiva.

In questa sezione presento alcuni criteri di convergenza per integrali generalizzati. Per brevità enuncio i criteri relativi agli integrali generalizzati del tipo $\int_a^{+\infty} f$; criteri analoghi valgono per integrali del tipo $\int_{-\infty}^{b} f$.

Criteri del confronto. Siano f, g funzioni continue in $[a, +\infty)$, *a valori non negativi.*

Valgono le affermazioni seguenti:

(i) se $f \leq g$, e g è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$, allora anche f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$;

(ii) se $f \geq g$, e g non è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$, allora nemmeno f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$;

(iii) se $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$, per $x \to +\infty$,[11] e g è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$, allora anche f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$;

(iv) se $f(x)$ ha lo stesso ordine di grandezza di $g(x)$, per $x \to +\infty$,[12] allora f e g hanno lo stesso carattere, cioè una è integrabile se e solo se è integrabile l'altra.

[9] Si noti che il caso più significativo è quello di una funzione potenza che tenda a zero quando $x \to +\infty$, e quindi il modello più ragionevole è appunto $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$. Se la potenza tende all'infinito l'integrale non può convergere.

[10] Per ricordare più facilmente il risultato: l'integrale converge se la potenza per $x \to +\infty$ tende a zero rapidamente, quindi con $\alpha > 1$.

[11] Ricordo che significa che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

[12] Ricordo che la scrittura significa che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste finito e diverso da zero.

Osservazione Si faccia attenzione che i criteri si applicano, come detto, a funzioni a valori non negativi.

Osservazione Si noti che, se avessimo il caso di $f(x)$ equivalente a $g(x)$, per $x \to +\infty$, e ricordo che significa che $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, allora si ricade nel caso (iv).

Osservazione In realtà (iii) e (iv) sono conseguenze di (i). Questo perché (punto (iii)), se $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to +\infty$, allora f è definitivamente minore o uguale a g,[13]

I criteri presentati hanno utili conseguenze (confronti con le potenze).
Supponiamo che f sia continua e positiva in $[a, +\infty)$.

Corollario Se

$$f(x) \text{ è trascurabile rispetto a } \frac{1}{x^\alpha} \quad , \text{ per } x \to +\infty \text{ e } \alpha > 1,$$

allora f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$. È conseguenza della (iii) e del fatto che, essendo $\alpha > 1$, $1/x^\alpha$ è integrabile.

Corollario Se

$$\frac{1}{x^\alpha} \text{ è trascurabile rispetto a } f(x) \quad , \text{ per } x \to +\infty \text{ e } \alpha \le 1,$$

allora f non è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$. È conseguenza della (ii) e del fatto che, essendo $\alpha \le 1$, $1/x^\alpha$ non è integrabile.

Corollario Se

$$f(x) \text{ è dello stesso ordine di grandezza di } \frac{1}{x^\alpha} \quad , \text{ per } x \to +\infty, \text{ e } \alpha > 1,$$

allora f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$; è conseguenza della (iv) e del fatto che, essendo $\alpha > 1$, $1/x^\alpha$ è integrabile. Quando invece la relazione vale con $\alpha \le 1$, allora f non è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$.

Osservazione Si faccia attenzione. Se per una certa funzione f abbiamo che $f(x)$ è dello stesso ordine di grandezza di $1/x^\alpha$ per $x \to +\infty$, possiamo sempre stabilire se la funzione f è integrabile in senso generalizzato oppure no.

Se abbiamo invece che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $1/x^\alpha$ per $x \to +\infty$, possiamo concludere solo se $\alpha > 1$. Quindi, ad esempio, se trovo che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $1/x$ per $x \to +\infty$, non posso concludere nulla sull'integrabilità di f.[14]

Esempi

- Consideriamo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$.[15]

  Dopo aver osservato che la funzione integranda è continua e non negativa nell'intervallo di integrazione, ricordando che $\ln x \le x$ per ogni $x > 0$, possiamo dire che $\frac{\ln x}{x^3} \le \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. Quindi, essendo $1/x^2$ integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, per la (i) dei Criteri del confronto il nostro integrale converge.

- Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$. Questo non si può calcolare con la definizione in quanto $\frac{1}{\ln x}$ è una delle funzioni che non hanno primitiva elementare.

  L'integrale non converge. Infatti in $[2, +\infty)$ la funzione è continua e positiva, si ha $x \ge \ln x$, e quindi $\frac{1}{\ln x} \ge \frac{1}{x}$. Dato che $1/x$ non è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty)$, dalla (ii) dei Criteri del confronto segue allora che nemmeno $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty)$.

- Consideriamo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$.[16]

[13] Ricordo che *definitivamente* significa "da un certo punto in poi". Quindi dire che una proprietà vale definitivamente vuol dire che non vale dappertutto ma vale da un certo punto (valore reale) in poi.

[14] Si considerino ad esempio le due funzioni $f_1(x) = 1/x^2$ e $f_2(x) = 1/(x \ln x)$ nell'intervallo $[2, +\infty)$. Entrambe sono $o(1/x)$, per $x \to +\infty$. La prima è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty)$, la seconda no.

[15] Per la verità questo integrale si potrebbe calcolare anche con la definizione, dato che di questa funzione siamo in grado di trovare una primitiva (lo studente provi per esercizio: il risultato è $\frac{1}{4}$).

[16] Anche questo integrale si potrebbe calcolare con la definizione, dato che siamo in grado di trovare una primitiva della funzione (lo studente provi per esercizio: il risultato è 1).

La funzione $f(x) = x\,e^{-x}$ è continua e non negativa nell'intervallo considerato. Confrontando $f(x)$ con $1/x^2$ possiamo osservare che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}\\ &= 0 \quad \text{(confronto standard)}.\end{aligned}$$

Pertanto $f(x)$ è trascurabile rispetto a $1/x^2$, per $x \to +\infty$. Dall'integrabilità di $x \mapsto 1/x^2$ in $[1, +\infty)$, per la (iii) dei Criteri del confronto, allora anche f è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, e quindi in $[0, +\infty)$.

- L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x + \ln x}{x^3 + \ln^3 x}\,\mathrm{d}x$ converge. Infatti, $f(x) = \frac{x+\ln x}{x^3+\ln^3 x}$ è continua e non negativa in $[1, +\infty)$ e, trascurando i logaritmi, $f(x)$ risulta equivalente a $\frac{x}{x^3}$, cioè equivalente a $\frac{1}{x^2}$, per $x \to +\infty$. Quindi, dato che $1/x^2$ è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, anche f lo è (per la (iv)).

- Consideriamo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ e si tratta di un esempio importante (fondamentale nella teoria della probabilità).

  La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ha primitive elementari, cioè le sue primitive non si possono esprimere attraverso funzioni elementari o loro composizioni. Quindi non siamo in grado di calcolare l'integrale con la definizione. Possiamo però provare che l'integrale in questione è finito, cioè che f è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, +\infty)$. Vediamo perché. Si tratta di una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$, positiva e pari (simmetrica rispetto all'asse y). Possiamo considerarla nell'intervallo $[0, +\infty)$. Possiamo ora osservare che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}\\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t}\\ &= 0 \quad \text{(confronto standard)}.\end{aligned}$$

  Pertanto e^{-x^2} è trascurabile rispetto a $1/x^2$, per $x \to +\infty$. Dato che la funzione $x \mapsto 1/x^2$ è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, per i Criteri del confronto anche f è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, e quindi è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$, dato che tra 0 e 1 l'integrale è certamente finito. Dalla simmetria segue che anche l'integrale generalizzato in $(-\infty, 0]$ esiste (ed è uguale a quello in $[0, +\infty)$). Quindi $f(x) = e^{-x^2}$ è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, +\infty)$.

  È una funzione (e un integrale) assolutamente fondamentale nel calcolo delle probabilità (li incontrerete nuovamente nel corso di Statistica). Si può dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Osservazione Faccio nuovamente osservare che con i Criteri del confronto possiamo studiare l'integrabilità in senso generalizzato di funzioni di cui non siamo in grado di trovare una primitiva.[17]

Osservazione Se f è una funzione integrabile in senso generalizzato a $-\infty$, è possibile scrivere la sua funzione integrale con primo estremo $-\infty$, cioè la funzione

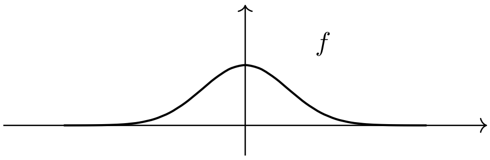
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

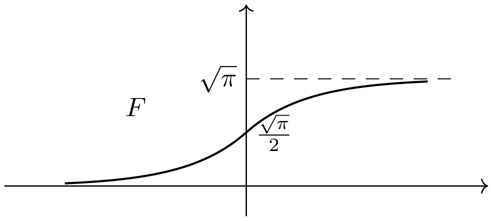
Ad essa è applicabile il teorema fondamentale del calcolo integrale, che garantisce, nel caso f sia continua, la derivabilità di F e l'uguaglianza $F'(x) = f(x)$. Ritroverete anche questa particolare situazione nel corso di Statistica. Per gli scopi del calcolo delle probabilità è ad esempio importante la funzione

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Qui l'applicazione del teorema fondamentale porta a dire facilmente che questa funzione è monotona crescente. Inoltre essa è positiva e limitata. Le due figure qui sotto illustrano $f(x) = e^{-x^2}$ e la sua funzione integrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

[17] È chiaro che, in questi casi, con i criteri di confronto si può dire solo se l'integrale è finito o infinito. Per calcolarlo, quando converge, occorrono altre tecniche.





Esercizio 5.1 Calcolare i seguenti integrali generalizzati, utilizzando la definizione.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} \,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} \,\mathrm{d}x$

Esercizio 5.2 Stabilire se i seguenti integrali generalizzati convergono, utilizzando i criteri di convergenza.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^3+x+1} \,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} \,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2^{-x}} \,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

6 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 4.1

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(b) $\displaystyle\int_0^{7/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_0^{7/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{(1+2x)^{2/3}}{2/3}\Big|_0^{7/2} = \frac{3}{4}(8^{2/3}-1) = \frac{9}{4}.$$

(c) $\displaystyle\int_1^2 e^{1-x}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_1^2 e^{1-x}\,\mathrm{d}x = -e^{1-x}\Big|_1^2 = 1 - 1/e.$$

(d) $\displaystyle\int_0^{1/10} \frac{1}{1+10x}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_0^{1/10} \frac{1}{1+10x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\ln(1+10x)\Big|_0^{1/10} = \frac{1}{10}\ln 2.$$ [18]

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(1+x^4)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 2.$$

[18] Il valore assoluto qui si può omettere dato che l'argomento è positivo nell'intervallo di integrazione.

(f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = 2e(e-1).$$

L'integrale è stato risolto riconducendolo ad un integrale immediato del tipo $\int e^f Df$. Si poteva anche risolverlo con un cambio di variabile. A tale proposito, ricordo che una buona procedura è la seguente: risolvere anzitutto l'integrale indefinito, operando il cambio di variabile. Una volta trovata la primitiva, calcolare l'integrale definito. Alternativamente si può anche operare il cambio di variabile sull'integrale definito, ma in questo caso occorre ricordarsi di cambiare anche gli estremi di integrazione. Ad esempio, nell'integrale in questione, questo secondo modo di procedere porterebbe a scrivere (con la sostituzione $\sqrt{x} = t$, da cui $x = t^2$ e quindi $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$)

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{e^t}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_1^2 e^t\,\mathrm{d}t = 2e^t\Big|_1^2 = 2(e^2 - e).$$

Così facendo non c'è ovviamente la necessità di tornare alla variabile x.

(g) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\frac{(1+x^3)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

(h) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e (\ln x)^{1/2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^e = \frac{2}{3}.$$

(i) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$. Qui serve prima un'integrazione per parti per risolvere l'integrale indefinito.

$$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \ln x\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + c.$$

Quindi

$$\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1)\right|_1^e = \frac{1}{9}(2e^3+1).$$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. L'integrale si riconduce facilmente ad un integrale immediato:

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

(k) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2}\frac{1+x-x}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big(\ln|x| - \ln|x+1|\Big|_{-3}^{-2} = 2\ln 2 - \ln 3.$$ [19]

(l) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$. Anche qui si può arrivare alla soluzione con il solito trucco di aggiungere e togliere:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1-x+x}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

[19] Si noti che in questo caso non si può omettere il valore assoluto nelle primitive, poiché la funzione è negativa nell'intervallo di integrazione.

Ora si può scomporre il primo termine nuovamente con l'aggiungere e togliere e si ottiene

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = -\frac{1-x+x}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Pertanto

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right|_2^3 = \ln 3 - 2\ln 2 + 1/2.$$

Esercizio 5.1

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1.$$

(b) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_4^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_4^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-4) = +\infty.$$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(-1/2e^{-x^2}\right|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left(-1/2e^{-x^2}\right|_0^b \\
&= -1/2\lim_{a\to-\infty}(1-e^{-a^2}) - 1/2\lim_{b\to+\infty}(e^{-b^2}-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$ [20]

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$. Si noti che la funzione è continua in tutto l'intervallo di integrazione.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \ln\ln x\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty}\big(\ln\ln b - \ln\ln 2\big) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge.

Esercizio 5.2

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+x+1}\,\mathrm{d}x$.

La funzione è continua e positiva in $[0,+\infty)$. Trascurando a denominatore $x+1$ rispetto ad x^3 possiamo dire che

$$\frac{1}{x^3+x+1} \text{ è equivalente a } \frac{1}{x^3}, \text{ per } x\to+\infty.$$

Quindi per il criterio del confronto, dato che la funzione $1/x^3$ è integrabile all'infinito, l'integrale dato converge.

[20] Si noti che la funzione è dispari. Attenzione! Non è vero in generale che l'integrale generalizzato di una funzione dispari è sempre 0, in quanto l'integrale potrebbe non essere finito. È vero però che, se una funzione dispari è integrabile in senso generalizzato, allora l'integrale è zero.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx.$
La funzione è continua e positiva in $[0,+\infty)$. Trascurando tutte le quantità trascurabili possiamo dire che

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} \text{ è equivalente a } \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi per il criterio del confronto, dato che la funzione $1/x$ non è integrabile all'infinito, l'integrale dato non converge.

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx.$
Funzione continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Trascurando la radice abbiamo che

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \text{ è equivalente a } \frac{1}{x^2}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi l'integrale converge.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\,dx.$
Funzione continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Trascurando, sotto radice, $x+1$ rispetto ad x^2, possiamo dire che

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \text{ è equivalente a } \frac{1}{x^{2/3}}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Dato che $\frac{2}{3} < 1$ l'integrale diverge.

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx.$
La funzione è positiva nell'intervallo di integrazione e, trascurando l'esponenziale (che tende a zero per $x \to +\infty$), possiamo dire che

$$\frac{1+e^{-x}}{x} \text{ è equivalente a } \frac{1}{x}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi l'integrale dato diverge.

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{x^2}\,dx.$
Trascurando l'esponenziale abbiamo che

$$\frac{1+e^{-2x}}{x^2} \text{ è equivalente a } \frac{1}{x^2}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi l'integrale dato converge.

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2^{-x}}\,dx.$
La funzione è positiva nell'intervallo di integrazione e, trascurando l'esponenziale, abbiamo che

$$\frac{1}{x^2+2^{-x}} \text{ è equivalente a } \frac{1}{x^2}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi l'integrale dato converge.

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx.$

Possiamo osservare che la funzione è pari. Allora consideriamo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$. Facciamo un confronto con la funzione $1/x^2$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$

Quindi abbiamo che $x^2 e^{-x^2}$ è trascurabile rispetto a $1/x^2$, per $x \to +\infty$. Allora per il criterio del confronto l'integrale dato converge.