II-9 Successioni e serie

Indice

1 Successioni

Una successione reale è una funzione definita in $\mathbb{N}$ (insieme dei numeri naturali) a valori in $\mathbb{R}$. Indicherò quasi sempre una successione scrivendo $n \mapsto a_n$, dove $n \in \mathbb{N}$ e a_n appartiene ad $\mathbb{R}$. Qualche volta userò la notazione classica $f(n)$.

Può succedere che una successione non sia definita su tutti i numeri naturali, bensì in un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, come ad esempio sui numeri naturali maggiori o uguali di un certo $n_0 \in \mathbb{N}$. Ad esempio la successione $n \mapsto \frac{1}{\ln(n-1)}$ è definita $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Chiamerò allora in generale successione una funzione definita in $\mathbb{N}$, ad eccezione al più di un numero finito di punti.

Osservazione Data una funzione di variabile reale $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $a \geq 0$, si può ottenere da questa una successione considerando la restrizione di f all'insieme $\mathbb{N}$, o ad un suo sottoinsieme. Così ad esempio la successione precedente $n \mapsto \frac{1}{\ln(n-1)}$ si può vedere come la restrizione ad $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ della funzione $f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$.

Una proprietà importante delle successioni può essere la *monotonia*. Una successione $n \mapsto a_n$ è *crescente* se

$$\forall n \quad \text{si ha} \quad a_{n+1} > a_n \quad (\text{equivale a dire che } \forall n, m : \ n < m \Longrightarrow a_n < a_m)$$

(*non decrescente* se $\forall n$ si ha $a_{n+1} \geq a_n$).

La successione è invece *decrescente* se

$$\forall n \quad \text{si ha} \quad a_{n+1} < a_n \quad (\text{equivale a dire che } \forall n, m : \ n < m \Longrightarrow a_n > a_m)$$

(*non crescente* se $\forall n$ si ha $a_{n+1} \leq a_n$). [1]

Osservazione Una successione può non essere crescente, ma esserlo da un certo punto in poi. In questo caso diremo che la successione è *definitivamente crescente* (modo di dire già usato tra l'altro con gli integrali generalizzati). Lo stesso dicasi per gli altri casi di monotonia.

[1] Se la successione è definita in un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, al scrittura "$\forall n$" va intesa nel senso "per ogni n in cui è definita la successione".

1.1 Limite di una successione

Particolarmente importante è il concetto di limite di una successione. L'unico caso significativo di limite di una successione è il limite per $n \to +\infty$. La definizione, che comunque non vediamo, è ovviamente simile a quella del limite di una funzione reale per x che tende a $+\infty$. Il concetto è quello di capire, quando n tende all'infinito, a che valore (se esiste) si avvicina la quantità a_n. Se tale valore è ℓ scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

Invece si scrive rispettivamente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

se il valore di a_n tende a diventare infinitamente grande, positivo o negativo.

Ovviamente, come per le altre funzioni, il $\lim_{n\to+\infty} a_n$ in qualche caso può non esistere.

Anche per le successioni vale il risultato, già visto per le funzioni di variabile reale, per cui se la funzione è monotona allora il limite esiste. Vale infatti il seguente

Teorema (di esistenza del limite per successioni monotone) Se la successione $n \mapsto a_n$ è monotona crescente (o non decrescente), allora il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è uguale al $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$. Tale limite risulta finito se la successione è limitata superiormente,[2] risulta $+\infty$ in caso contrario.

Analogamente, se la successione $n \mapsto a_n$ è monotona decrescente (o non crescente), allora il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è uguale all'$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$. Il limite è finito se la successione è limitata inferiormente, è $-\infty$ in caso contrario.

Si può dimostrare il seguente risultato, facilmente intuibile.

Proposizione Data una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, se questa ha limite per $x \to +\infty$, allora anche la successione $n \mapsto a_n = f(n)$ ha limite per $n \to +\infty$ e i due limiti coincidono.

Esempio Consideriamo la successione $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ e il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1,$$

possiamo concludere che anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n+1} = 1$.

Esempio Possiamo dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ vale zero, dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Quindi possiamo dire che $\ln n$ è trascurabile rispetto ad n, per $n \to +\infty$.

Esempio Ricordando il limite fondamentale, si può concludere che la successione definita da $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ha limite per $n \to +\infty$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Osservazione Si noti che non vale il viceversa dell'ultima proposizione: non è vero cioè che, se la successione $n \mapsto a_n = f(n)$ ha limite, allora anche la funzione di variabile reale definita da $x \mapsto f(x)$ ha limite. Si consideri ad esempio la successione $n \mapsto n - \lfloor n \rfloor$.[3] Essa ovviamente vale 0 per ogni n, quindi ha limite 0 per $n \to +\infty$. La funzione $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ non ha invece limite per $x \to +\infty$.[4]

Quanto detto nella proposizione ha importanza nel calcolo del limite di una successione. Può essere comodo cioè, nel calcolo del limite di una successione, considerare il limite della funzione "corrispondente". Questo perché ci sono metodi molto potenti di calcolo del limite di una funzione di variabile reale che non sono applicabili al calcolo del limite di una successione.[5]

[2] Ricordo che una successione, come una qualunque funzione, è limitata superiormente se lo è la sua immagine. Nel nostro caso quindi la successione $n \mapsto a_n$ è limitata superiormente se è è limitato superiormente l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

[3] Ricordo che il simbolo $\lfloor \ldots \rfloor$ sta ad indicare la parte intera di $\ldots$.

[4] Si vada a rivedere il grafico della funzione, nella dispensa sulle Funzioni reali.

[5] A titolo di esempio, il teorema di De l'Hôpital per il calcolo dei limiti, che abbiamo visto in precedenza. Come lo studente ricorderà, per l'applicazione del teorema è necessario che le funzioni siano derivabili: le successioni non sono invece funzioni derivabili (perché?).

Definizione Se $n \mapsto a_n$ è una successione, chiamiamo *sottosuccessione* di questa una qualunque sua restrizione, con l'unica richiesta che quest'ultima sia definita su infiniti naturali.

Data cioè una successione $n \mapsto a_n$ definita in $\mathbb{N}$, se A è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, si chiama sottosuccessione la successione $m \mapsto a_m$ definita per $m \in A$.

Esempio Se consideriamo la successione $n \mapsto (-1)^n$ (che assume, alternativamente i valori 1 e -1), possiamo costruire la sua sottosuccessione definita sui numeri naturali pari. Si tratta ovviamente di una successione che assume sempre il valore 1. La sottosuccessione definita invece sui numeri naturali dispari assume sempre il valore -1.

Abbiamo visto poco fa che, se una funzione ha limite all'infinito, allora ha lo stesso limite la successione ad essa associata. È facile allora intuire che anche una sottosuccessione ha lo stesso limite della successione da cui proviene. Meglio: se una successione ha limite, allora *ogni* sua sottosuccessione ha lo stesso limite.

Può succedere, come nel caso della sottosuccessione di $n \mapsto (-1)^n$ definita sugli n pari, che la sottosuccessione abbia limite, mentre la successione non lo ha.[6]

Attenzione. Per provare che una successione ha limite non basta quindi calcolare il limite di *una* sottosuccessione.

Per provare invece che una successione non ha limite si può cercare di dimostrare che ci sono due sue diverse sottosuccessioni che hanno limiti diversi. Così, nel caso di $n \mapsto (-1)^n$, possiamo dire che essa non ha limite dato che la sottosuccessione sugli n pari vale sempre 1, e quindi ha limite 1, mentre la sottosuccessione sugli n dispari vale sempre -1, e quindi ha limite -1.

Esercizio 1.1 Si calcolino i limiti indicati.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n}{n\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3\ln n}{4n^2+5\ln^2 n}$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

2 Serie

Il concetto di serie cerca di rispondere alla domanda: come ci comportiamo se dobbiamo "sommare infiniti termini"?[7] Possiamo ragionare intanto così: supponiamo che gli infiniti termini da sommare siano i valori di una certa successione.

Definizione Data una successione $n \mapsto a_n$, si dice **somma parziale n-esima di a_n** la nuova successione definita da

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ , \ \forall n$$ [8]

Osservazione I primi termini della successione s_n sono quindi

$$s_1 = a_1 \quad , \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad , \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad , \quad \ldots$$

Osservazione Data una successione $n \mapsto a_n$, resta allora ad essa associata una *nuova successione*, la **successione delle somme parziali** di questa, cioè $n \mapsto s_n$.

Definizione Si dice **serie** associata alla successione $n \mapsto a_n$ la successione $n \mapsto s_n$ delle sue somme parziali.

La successione $n \mapsto a_n$ viene detta il *termine generale della serie.*

Definizione Si dice che la serie (di termine generale a_n) **converge** se la successione $n \mapsto s_n$ delle somme parziali di a_n ha limite finito. Si dice che la serie **diverge** se $n \mapsto s_n$ ha limite infinito. Si dice infine che la serie è **indeterminata** se non esiste il limite di $n \mapsto s_n$.

Con la dicitura *studiare il carattere di una serie* si intende stabilire se la serie converge, diverge o è indeterminata.

Osservazione Se la serie converge, il $\lim_{n\to+\infty} s_n$ si dice la *somma della serie* (anziché il limite della serie, come sarebbe più appropriato). Se la serie converge possiamo dire, in modo poco rigoroso ma efficace, che la somma della serie è la somma degli infiniti termini da cui siamo partiti.

La serie associata alla successione $n \mapsto a_n$ viene usualmente indicata con la scrittura

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{[9]} \qquad \text{oppure con} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \ .$$

[6] Rinunciando al formalismo di una dimostrazione rigorosa, si capisce però facilmente che la successione $n \mapsto (-1)^n$ non può avere limite, dato che passa "perennemente" dal valore 1 al valore -1 e viceversa.

[7] Se state pensando che la somma di infiniti termini debba necessariamente essere infinita tra breve vedremo che questo non è vero.

[8] Chiaramente, se la successione $n \mapsto a_n$ è definita per $n \geq n_0$, anche s_n è definita per $n \geq n_0$.

Nel seguito, quando non c'è il rischio di fare confusione, anziché $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ scriverò più semplicemente $\sum a_n$. Spesso, quando possibile, anziché far "partire" n da 1 lo si fa partire da 0 e si scrive quindi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. A volte n può anche partire da un $n_0 > 1$.

Esempi

- Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n,$$
cioè la serie di termine generale $a_n = n$. La sua somma parziale n-esima è
$$s_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(ricordare il piccolo Gauss).}$$
Questa serie quindi diverge, dato che $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$.

- Si chiama *serie di Mengoli* la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots,$$
cioè la serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La sua somma parziale n-esima è
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{(si noti che quasi tutti i termini si semplificano).} \end{aligned}$$
Pertanto
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$
e quindi la serie di Mengoli converge e la sua somma è 1. Questo è il primo esempio che prova che la somma di infiniti termini può essere un numero finito.

- Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. Risulta
$$\begin{aligned} s_n &= 1 + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} \quad \text{(anche qui quasi tutti i termini si semplificano).} \end{aligned}$$
La serie diverge in quanto $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.

Osservazione Nei tre esempi abbiamo potuto stabilire il carattere della serie (e la sua somma quando essa è convergente) utilizzando soltanto la definizione, che al momento è l'unico strumento a nostra disposizione. Faccio notare che questo è per certi versi analogo al calcolo di un integrale generalizzato a $+\infty$ attraverso la definizione, cioè con il calcolo di una primitiva: trovare una primitiva è paragonabile a trovare l'espressione generale della somma parziale s_n. Forse si intuisce che questo non è sempre così facile come negli esempi proposti. Tra breve impareremo a studiare il carattere di una serie anche quando non si può ottenere la generica somma parziale (e questo è paragonabile allo studio della convergenza dell'integrale anche senza il calcolo della primitiva).

[9] Si legge "sommatoria per n che va da 1 a $+\infty$ di a_n".

Esercizio 2.1 Si scriva l'espressione del termine generale delle seguenti serie:

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ (b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

(c) $\frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{8} + \frac{6}{16} + \ldots$ (d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$

Uno dei pochi risultati del tutto generali sulle serie è il seguente importante

Teorema (condizione necessaria di convergenza)
Sia $n \mapsto a_n$ una successione. Se la serie $\sum a_n$ converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Osservazione La dimostrazione di questo risultato è immediata. Se s è la somma della serie, per ipotesi un numero reale, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) \text{ [10]} \\
&= \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} \\
&= s - s \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Osservazioni Questo risultato fornisce una condizione *necessaria* per la convergenza di una serie. Può essere utile quindi non tanto per stabilire che una serie converge, quanto per stabilire che una serie non converge.[11] Ad esempio, si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$. Dato che il limite del termine generale è 1, la serie non converge.

Attenzione che la condizione del teorema *non è sufficiente*, cioè non basta provare che il termine generale tende a zero per provare che una serie converge.

Esempio Un esempio che prova che il tendere a zero del termine generale non è sufficiente per la convergenza della serie è il seguente: si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ (già incontrata poco fa). Per il termine generale si ha

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

e questo tende a zero per $n \to +\infty$ ma, come visto prima, la serie diverge.

Esempio Un altro esempio di serie non convergente con termine generale che tende a zero è la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Possiamo scrivere

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

Quindi la successione delle somme parziali è

$$\begin{aligned}
s_n &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n \\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Pertanto $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, e quindi la serie diverge. Il termine generale della serie però tende a zero.

[10] Segue dal fatto che

$$s_n = \underbrace{a_1 + \ldots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n = s_{n-1} + a_n \quad \text{e quindi} \quad a_n = s_n - s_{n-1}.$$

[11] La convergenza è nell'ipotesi del teorema e quindi esso non mi può consentire di provare che una serie converge. Invece mi può servire per provare che non converge, dato che, se non sono vere le necessarie conseguenze della convergenza della serie, la serie non può convergere.

2.1 La serie armonica

Una serie molto importante è la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

detta **serie armonica**. Si può dimostrare (non sarebbe facile farlo con la sola definizione) che la serie armonica *diverge.*

Si chiama inoltre **serie armonica generalizzata** la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ , con } \alpha > 0.$$

La convergenza della serie armonica generalizzata dipende, come è facile intuire, dal valore di α. Si può dimostrare che la serie armonica generalizzata converge se $\alpha > 1$ e diverge se $0 < \alpha < 1$. Si noti che gli altri casi (cioè $\alpha \leq 0$) non sono significativi dato il termine generale non tende a zero. E si noti inoltre l'analogia dei risultati sulla convergenza della serie armonica con quelli riguardanti la convergenza dell'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

Esempi Sono esempi di serie armoniche generalizzate convergenti le seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

in cui abbiamo rispettivamente $\alpha = 2$, $\alpha = 5/4$ e $\alpha = 3/2$ (tutti maggiori di 1). Sono invece esempi di serie armoniche generalizzate divergenti le seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}}$$

in cui abbiamo rispettivamente $\alpha = 1/2$, $\alpha = 2/3$ e $\alpha = 5/6$ (tutti minori di 1).

2.2 La serie geometrica

Altra serie estremamente importante è la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \text{ , con } r \in \mathbb{R}.$$

Essa viene detta **serie geometrica di ragione** r.

Possiamo studiare in dettaglio la convergenza della serie geometrica. Anzitutto due casi semplici:

- se $r = 0$ ovviamente la serie converge e ha per somma 0; [12]
- se $r = 1$ la serie diverge in quanto la somma parziale n-esima è $s_n = n + 1$ e pertanto $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Possiamo poi ottenere la somma parziale n-esima in generale (con $r \neq 0$ e $r \neq 1$), in quanto si ha

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

e, moltiplicando ambo i membri per r ($r \neq 0$), si ottiene

$$\begin{aligned} r \cdot s_n &= r(1 + r + r^2 + \ldots + r^n) \\ &= r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1} \\ \text{(aggiungo e tolgo 1)} \quad &= \underbrace{1 + r + r^2 + \ldots + r^n}_{s_n} + r^{n+1} - 1 \\ &= s_n + r^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Pertanto

$$(1-r)s_n = 1 - r^{n+1} \qquad \text{e quindi } (r \neq 1) \qquad s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Disponendo ora dell'espressione della somma parziale, possiamo concludere in tutti i casi non ancora risolti.

[12] Si potrebbe obiettare (rigorosamente) che, se $r = 0$, n non può partire da 0 ma deve partire da 1.

- Se $|r| < 1$, abbiamo che $r^{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$, e quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1-r}$.
- Se $r > 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.[13]
- Se $r \leq -1$, si può vedere con qualche conto che il limite di s_n non esiste e quindi che la serie è indeterminata.

  Riassumendo, per la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ si hanno i seguenti risultati:

  ▷ la serie converge se $|r| < 1$ e ha per somma $\frac{1}{1-r}$;

  ▷ la serie diverge (a $+\infty$) se $r \geq 1$;

  ▷ la serie è indeterminata se $r \leq -1$.

Esempio Determiniamo la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$. Possiamo riscriverla come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ o anche come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{2}$. Essa è convergente, dato che la ragione è in valore assoluto minore di 1. Con quanto trovato poco fa, possiamo concludere che la somma della serie è

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Osservazione La serie geometrica "inizia con $n = 0$". Se invece abbiamo una serie geometrica convergente che, anziché iniziare con $n = 0$ inizia con $n = 1$, basta fare così (aggiungo e tolgo il termine "mancante" r^0):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}.$$

Quindi, ad esempio, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ ha per somma

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Più in generale la somma di una serie geometrica convergente che inizia con $n = p$ è

$$\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n - \sum_{n=0}^{p-1} r^n = \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^p}{1-r} = \frac{r^p}{1-r}.$$

Osservazione Riflettendo sulla serie armonica generalizzata e sulla serie geometrica, è chiaro a questo punto un fatto del tutto generale: la convergenza di una serie dipende da quanto rapidamente il suo termine generale tende a zero. In altre parole una serie converge se il suo termine generale tende a zero "abbastanza rapidamente". Nel caso ad esempio della serie armonica generalizzata $\sum_{1=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, abbastanza rapidamente vuol dire con $\alpha > 1$. Vedremo più avanti che la serie armonica è in certo qual modo uno spartiacque tra le serie convergenti e quelle divergenti.

Esercizio 2.2 Si dica se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 5^{-n}$ converge e, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.

Esercizio 2.3 Si dica se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n/2}$ converge e, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.

Esercizio 2.4 Si dica se la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$ converge e, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.

[13] Il numeratore tende a $-\infty$ e il denominatore è un numero negativo dato che $r > 1$.

3 Criteri per serie a termini non negativi

Le serie con termine generale non negativo, cioè le serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, con $a_n \geq 0$ per ogni n, non possono essere indeterminate (quindi o convergono o divergono). Infatti in questo caso la successione delle somme parziali è non decrescente e quindi ha limite,[14] che potrà essere finito (e non negativo) o infinito. Se il termine generale non tende a zero, sicuramente la serie diverge.[15]

Vediamo qui alcuni criteri di convergenza per serie a termini non negativi.

3.1 Criteri del confronto

Proposizione (Criterio del confronto) Siano a_n e b_n due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n.
Se $\sum_n b_n$ converge, allora $\sum_n a_n$ converge; se $\sum_n a_n$ diverge, allora $\sum_n b_n$ diverge.[16]

Osservazione Quando valgono le ipotesi del criterio del confronto si dice che la serie $\sum_n a_n$ è *minorante* della serie $\sum_n b_n$ (o che la seconda è *maggiorante* della prima).

Il criterio è applicabile anche se $\sum_n a_n$ è *definitivamente minorante* di $\sum_n b_n$, e cioè se $a_n \leq b_n$ vale da un certo n_0 in poi.

Esempi

- Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Si tratta di un caso particolare di serie armonica generalizzata. Sappiamo già, con quanto detto in precedenza, che essa converge. Ora lo dimostriamo di nuovo, utilizzando il criterio del confronto. Si ha
$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}, \ \forall n \geq 2. \text{ [17]}$$
La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (è la serie di Mengoli) e quindi, per il criterio del confronto, converge anche la serie data.
Chiaramente a questo punto possiamo dire, sempre per il criterio del confronto, che converge anche una qualunque serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 2$: infatti, se $\alpha > 2$, allora $\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2}$.

- Dal fatto che la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge possiamo dedurre che divergono tutte le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$: infatti da $n^\alpha \leq n$, vera per ogni n, si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è maggiorante della serie armonica e quindi, per il criterio del confronto, diverge.

Osservazione Come conseguenza del criterio del confronto abbiamo il risultato che segue. Siano a_n e b_n due successioni a termini *positivi* e sia $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (quindi possiamo anche dire che a_n è trascurabile rispetto a b_n per $n \to +\infty$).

(i) Se $\sum_n b_n$ converge, allora anche $\sum_n a_n$ converge;

(ii) Se $\sum_n a_n$ diverge, allora anche $\sum_n b_n$ diverge.

Possiamo stabilire ora due utili criteri di confronto con successioni infinitesime campione: se $n \mapsto a_n$ è una successione positiva, allora

- se, per $n \to +\infty$, a_n è trascurabile rispetto a $\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;
- se, per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n}$ è trascurabile rispetto ad a_n, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

[14] Per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone.
[15] Infatti, se il termine generale non tende a zero, la serie non può convergere e, non potendo essere indeterminata, necessariamente diverge.
[16] Si noti ancora la somiglianza di questo criterio con quelli di confronto per gli integrali generalizzati.
[17] Infatti $n(n-1) = n^2 - n \leq n^2$, da cui, passando ai reciproci, si ricava la disuguaglianza scritta.

Esempio La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge perché $\frac{1}{n^2 \ln n}$ è trascurabile rispetto a $\frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$.

Esempio La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge perché $\frac{1}{n}$ è trascurabile rispetto a $\frac{1}{\ln n}$ per $n \to +\infty$.

Altra sostanziale conseguenza del criterio del confronto è la seguente utilissima

Proposizione (Criterio del *confronto asintotico*) Siano a_n e b_n due successioni a termini *positivi*. Se a_n e b_n sono equivalenti per $n \to +\infty$, cioè se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere.

Osservazione In realtà per garantire la tesi è sufficiente che il limite di a_n/b_n sia finito e diverso da zero,[18] dato che la convergenza non dipende da una costante moltiplicativa.

Esempio Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n}$.

Trascurando, nel termine generale della serie, le quantità trascurabili, e cioè 1 a numeratore ed n a denominatore, possiamo dire che $\frac{n+1}{n^2+n}$ è equivalente a $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, per $n \to +\infty$. Quindi la serie data è come la serie armonica e cioè diverge.

Esempio Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$.

Ricordando che n^3 è trascurabile rispetto a 2^n e n^2 è trascurabile rispetto a 3^n, per $n \to +\infty$, allora $\frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$ è equivalente a $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Quindi la serie data ha lo stesso carattere della serie geometrica di ragione $\frac{2}{3} < 1$, che è convergente, e quindi converge.

Osservazione I vari criteri di confronto per le serie a termini non negativi sono in tutto e per tutto analoghi a quelli visti per gli integrali generalizzati a $+\infty$.

Esercizio 3.1 Si studi carattere delle seguenti serie, usando i criteri del confronto:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{ne^n}$

3.2 Criterio del rapporto

Proposizione (Criterio del rapporto) Sia a_n una successione a termini positivi tale che

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{esista, finito o infinito.}$$

Valgono le affermazioni seguenti:

(i) se $\ell < 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;

(ii) se $\ell > 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

Osservazione Il criterio del rapporto non è applicabile, e quindi nulla si può dire, quando risulta

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Si pensi ad esempio alle due successioni $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge mentre la $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

[18] Si ricordi che "limite del quoziente a_n/b_n finito e diverso da zero" si può esprimere dicendo che a_n e b_n hanno lo stesso ordine di grandezza.

Esempi

- Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Si ha[19]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

  Quindi $\ell = 0$ e pertanto la serie converge per il criterio del rapporto. Si poteva anche utilizzare un confronto con la serie di Mengoli.

- Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

  Quindi $\ell = \frac{1}{2}$ e pertanto la serie converge per il criterio del rapporto.

3.2.1 Lo sviluppo in serie di e^x

Sia x un numero reale e consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$ [20]

Quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge qualunque sia x.

Si può dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$ [21]

Osservazione Dalla convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ segue che la successione $n \mapsto \frac{x^n}{n!}$ tende a zero per $n \to +\infty$ per ogni x, e che quindi x^n è trascurabile rispetto a $n!$ per $n \to +\infty$, qualunque sia x.

Come caso particolare abbiamo quindi che e^n è trascurabile rispetto a $n!$, per $n \to +\infty$. Dato che gli studenti sono soliti ricordare la classica gerarchia degli infiniti “logaritmi < potenze < esponenziali”, e da questa forse ricavare l'impressione che gli esponenziali siano infiniti “imbattibili”, la relazione trovata poco fa, cioè che e^n è trascurabile rispetto a $n!$, fa quindi, per così dire, crollare il mito, dato che individua un infinito più forte di un esponenziale.[22] Chi vuole può provare a dimostrare che d'altro canto $n!$ è trascurabile rispetto a e^{n^2}, sempre per $n \to +\infty$.

Esercizio 3.2 Si studi il carattere delle seguenti serie, usando il criterio del rapporto:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$

[19] Ricordo che $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[20] Non si faccia confusione qui: la variabile del limite è n, che tende all'infinito, mentre x è costante.

[21] Si osservi che i primi termini della serie (detta serie esponenziale) sono i termini del polinomio di Taylor di e^x. In uno dei capitoli precedenti scrivevamo $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$. La serie esponenziale “estende all'infinito” la validità della formula di Taylor e dà la possibilità di scrivere e^x come una somma di infiniti termini di tipo polinomiale. Si chiama lo sviluppo in serie di Taylor di e^x. Si noti anche che con l'approssimazione polinomiale siamo costretti ad usare il simbolo “$\cong$” mentre con la serie di Taylor possiamo senz'altro scrivere “$=$”, dato che le due espressioni danno effettivamente la stessa quantità.

[22] È peraltro facile capire che e^x non sia l'infinito più forte, dato che basta un xe^x per averne uno più forte. Non esiste un infinito più forte di tutti gli altri.

3.3 Criterio della radice

Proposizione (Criterio della radice) Sia a_n una successione a termini positivi tale che

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \text{esista, finito o infinito.}$$

Valgono le affermazioni seguenti:

(i) se $\ell < 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;

(ii) se $\ell > 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

Osservazione Come il criterio del rapporto, anche il criterio della radice non è applicabile quando risulta

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Esempi

- Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. Si ha

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

  e quindi, per il criterio della radice, la serie converge (si poteva anche utilizzare il criterio del rapporto o il criterio del confronto).

- Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\ln n}$. Si ha

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-n\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

  e quindi, per il criterio della radice, la serie converge.

- Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n\ln n - n^2}$. Si ha

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{n\ln n - n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n - n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \quad \text{(confronto standard)}$$

  e quindi, per il criterio della radice, la serie converge.

- Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$. Si ha

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1+1/n)^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} (1+1/n)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = 1/e,$$ [23]

  e quindi, per il criterio della radice, la serie converge. Si noti che invece la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ diverge in quanto il suo termine generale non tende a zero (tende a $1/e$). Alla stessa serie non è applicabile il criterio della radice, dato che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1+1/n)^{-n}} = \lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^{-1} = 1$.

[23] Si ricordi il limite fondamentale $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e$.

Esercizio 3.3 Si studi il carattere delle seguenti serie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n+n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n^2}$

4 Criteri per serie a termini di segno non costante

Definizione Si dice che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è **assolutamente convergente** (o che *converge assolutamente*) se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Osservazione Per evitare a questo punto confusione, la convergenza vista finora viene detta *semplice* (si dice anche che la serie *converge semplicemente*).

Tra i due tipi di convergenza sussiste una relazione, espressa dalla seguente

Proposizione Se una serie converge assolutamente allora converge semplicemente e si ha inoltre $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Esempio La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ha termini di segno non costante (alternativamente uno positivo e l'altro negativo). Essa converge in quanto converge assolutamente. Infatti

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},\ \forall n \geq 1$$

e, come noto, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Osservazione La proposizione appena vista può fornire un utile criterio di convergenza semplice per serie a termini non tutti positivi. L'assoluta convergenza è una condizione *sufficiente* per la convergenza semplice. Nulla si può dire se non c'è assoluta convergenza. Vedremo tra breve un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente.

Tra le serie a termini di segno non costante una classe importante è costituita dalle *serie a termini di segno alternato*. Una serie è a termini di segno alternato se può essere scritta come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n,\ \text{con } b_n > 0 \text{ per ogni } n.$$

Proposizione (Criterio di Leibnitz le serie a termini di segno alternato) Sia b_n una successione decrescente e infinitesima (cioè che tende a zero) per $n \to +\infty$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge.

Esempio Un caso interessante è la cosiddetta *serie armonica a segni alternati*, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots.$$

Ovviamente essa non converge assolutamente. Però converge semplicemente: infatti la successione $n \mapsto 1/n$ è decrescente e infinitesima per $n \to +\infty$ e quindi per il criterio di Leibnitz la serie converge.

Esempio Anche la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ converge, in base al criterio di Leibnitz. Infatti la successione $n \mapsto 1/\ln n$ è decrescente e infinitesima.

Esempio Si faccia attenzione a non credere che la presenza nel termine generale di una serie dell'espressione $(-1)^n$ faccia automaticamente della serie una serie a termini di segno alternato. Si consideri ad esempio la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$. I termini dispari sono nulli, mentre quelli pari valgono $\frac{2}{n}$. Quindi si tratta di una serie a termini positivi e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

La serie coincide con la serie armonica e pertanto diverge.

Osservazione Può succedere che in una serie a termini di segno alternato $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n$ la successione $n \mapsto b_n$ non sia in realtà decrescente, ma lo sia da un certo punto in poi (cioè sia definitivamente decrescente). Come già osservato in altre occasioni, il carattere di una serie non dipende da quello che succede in un numero finito di primi termini. Anche l'applicazione del criterio di Leibnitz risente di questo aspetto. Il criterio si potrebbe enunciare dicendo che se la successione $n \mapsto b_n$ è infinitesima e definitivamente decrescente, allora la serie converge.

Esercizio 4.1 Si studi il carattere delle seguenti serie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{3^n}$

5 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)/(+\infty)$. Dividendo numeratore e denominatore per n il limite è uguale al $\lim_{n\to+\infty} \frac{2+1/n}{3+2/n} = \frac{2}{3}$.

(b) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)/(+\infty)$. Possiamo scrivere $\frac{\ln^2 n}{n\sqrt{n}} = \frac{\ln^2 n}{n^{3/2}}$. Se consideriamo la corrispondente funzione di variabile reale $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^{3/2}}$, per $x \to +\infty$ si ha un noto confronto tra un logaritmo ed una potenza. Come visto in molte occasioni, si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{3/2}} = 0$ e pertanto anche $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{3/2}} = 0$.

(c) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)/(+\infty)$. Pensando alla funzione di variabile reale $f(x) = \frac{2x+3\ln x}{4x^2+5\ln^2 x}$ e ricordando i soliti confronti logaritmi/potenze, per $x \to +\infty$ a numeratore e a denominatore sono trascurabili i logaritmi e quindi il limite è uguale al $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}$ che vale zero. Pertanto anche il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3\ln n}{4n^2+5\ln^2 n} = 0$.

(d) Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Possiamo scrivere (razionalizzando)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

In qualche caso si può stabilire il limite di una successione $n \mapsto a_n$ considerando la serie di termine generale a_n. Se la serie converge allora la successione tende a zero (la nota condizione necessaria di convergenza di una serie). Si noti che nel nostro caso questo espediente non si può utilizzare, dato che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge (è uno dei primi esempi incontrati sulle serie).

Esercizio 2.1

(a) I denominatori sono i numeri naturali dispari e quindi si può scrivere

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}.$$ [24] Il termine generale è quindi $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

[24] Come già osservato altre volte, la scrittura non è unica. Si può anche scrivere ad esempio

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \quad \text{o ancora} \quad \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{2n-19} \quad \text{o in infiniti altri modi.}$$

Si noti che ciò che fa passare da una espressione all'altra non è che un cambio di variabile, analogo a quelli che abbiamo visti con gli integrali.

(b) I denominatori sono i quadrati dei numeri naturali. Quindi possiamo scrivere

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.\quad \text{Il termine generale è quindi } a_n=\frac{1}{n^2}.$$

(c) Notando che $1=4/4$, a numeratore ci sono i numeri naturali a partire da 3 e a denominatore ci sono le potenze di 2 (a partire da 2^1). Quindi possiamo scrivere

$$\frac{3}{2}+1+\frac{5}{8}+\frac{6}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{2^n}.\quad \text{Il termine generale è quindi } a_n=\frac{n+2}{2^n}.$$

(d) Possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}.\quad \text{Il termine generale è quindi } a_n=\frac{1}{n(n+1)}.$$

Esercizio 2.2

Si tratta di una serie geometrica di ragione $r=1/5$. La serie converge in quanto la ragione sta nell'intervallo $(-1,1)$ (condizione necessaria e sufficiente di convergenza di una serie geometrica). In generale la somma di una serie geometrica (convergente) di ragione r è $1/(1-r)$, quindi nel nostro caso la somma della serie è $1/(1-1/5)=5/4$ (la serie parte da $n=0$ e quindi non occorre togliere nessuno dei primi termini).

Esercizio 2.3

Possiamo scrivere $2^{-n/2}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$, e quindi si tratta di una serie geometrica di ragione $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$. La serie converge in quanto la ragione sta nell'intervallo $(-1,1)$. Qui la serie inizia da $n=1$ e quindi la somma è $1/(1-r)-r^0=1/(1-r)-1=r/(1-r)$. Nel nostro caso quindi la somma della serie è $\frac{1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Esercizio 2.4

Si ha $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{e^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^n$ e quindi si tratta di una serie geometrica di ragione $r=-1/e$. La serie converge in quanto la ragione sta nell'intervallo $(-1,1)$. Qui occorre fare attenzione al fatto che la serie parte da $n=2$ e quindi la somma è $1/(1-r)-r^0-r^1=r^2/(1-r)=\frac{1/e^2}{1+1/e}=1/(e^2+e)$.

Esercizio 3.1

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2n+1}$. Il termine generale non tende a zero, quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge. Volendo applicare il confronto possiamo dire che $(n+1)/(2n+1)$ è equivalente a $1/2$, per $n\to+\infty$ (nel senso che abbiamo sempre dato a questa locuzione, cioè nel senso che il limite del rapporto tra $(n+1)/(2n+1)$ e $1/2$ è 1).

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}$. Serie a termini positivi. Possiamo dire che $1/(1+n^2)$ è equivalente a $1/n^2$, per $n\to+\infty$. La serie data è quindi come la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}1/n^\alpha$ con $\alpha=2$, e quindi converge.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Serie a termini positivi. Sul termine generale possiamo dire che

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\ \text{è equivalente a}\ \frac{1}{n},\ \text{per } n\to+\infty \text{ (lo si verifichi).}$$

Quindi la serie è come la serie armonica, che diverge.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{ne^n}$. La serie è a termini positivi. Qui possiamo usare un confronto con una serie geometrica, dato che

$$\frac{1}{ne^n}\ \text{è trascurabile rispetto a}\ \frac{1}{e^n}\ ,\ \text{per } n\to+\infty \text{ (lo studente verifichi questa scrittura).}$$

La serie geometrica $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{e^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{e})^n$ converge perché la ragione è tra -1 e 1. Quindi anche la serie data converge.

Esercizio 3.2

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. Serie a termini positivi. Ponendo $a_n = 1/(2n+1)!$, il criterio del rapporto dice di calcolare il $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}/a_n)$: se tale limite è minore di 1 allora la serie converge, se invece è maggiore di 1, allora la serie diverge. Quindi nel nostro caso si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(2n+3)!}{1/(2n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0.$$ [25]

Quindi la serie converge in base al criterio del rapporto.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Serie a termini positivi. Ponendo $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = 1/2.$$

Quindi la serie converge in base al criterio del rapporto.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. Serie a termini positivi. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)/(n+2)!}{n/(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{n(n+2)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0.$$

Quindi la serie converge in base al criterio del rapporto.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$. Serie a termini positivi. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/((n+1)3^{n+1})}{1/(n3^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3(n+1)} = 1/3.$$

Quindi la serie converge in base al criterio del rapporto.

Esercizio 3.3

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$. Serie a termini positivi. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = 1/2.$$

Quindi il termine generale non tende a zero. La serie diverge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$. Serie a termini positivi con termine generale che tende a zero. Si può usare il criterio del rapporto (provare) oppure un confronto. Osservando che

$$(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)\cdots 1 > 2n(2n-1) \quad \text{se } n > 2,$$

allora possiamo dire che la serie data è minorante della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(2n(2n-1))$. Quest'ultima è come $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$, che converge. Quindi la serie data converge per il criterio del confronto.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2}$. Serie a termini positivi. Semplicemente con un confronto: la serie è come $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$, che diverge.

[25] Si ha infatti $(2n+3)! = (2n+3)(2n+2)(2n+1)!$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n+n^2}$. Serie a termini positivi. Trascurando le quantità trascurabili, la serie è come $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$, cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che converge.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$. Termini positivi e termine generale che tende a zero (lo si verifichi). Si può fare col criterio del rapporto (provare), ma forse qui conviene il criterio della radice. Ricordo che, detto a_n il termine generale della serie, il criterio della radice dice di calcolare il $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$: se tale limite è minore di 1 allora la serie converge, se invece è maggiore di 1, allora la serie diverge. Quindi nel nostro caso calcoliamo il

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}/n^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 2^n/n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2^n/n^n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{2} \cdot \frac{2}{n} \right).$$

Ora il fattore $2/n$ tende a zero, mentre il fattore $\sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$ tende a 1, per $n \to +\infty$. Quindi il limite vale 0 e, per il criterio della radice, la serie data converge.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$. Termini positivi e termine generale che tende a zero (lo si verifichi). Possiamo prima semplificare l'espressione del termine generale trascurando le quantità trascurabili, che sono 2^n a numeratore e 4^n a denominatore (lo studente verifichi che in effetti è così). Quindi possiamo scrivere che

$$\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n} \text{ è equivalente a } \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \text{, per } n \to +\infty.$$

Allora la nostra serie è asintotica alla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{5})^n$, che converge perché la ragione è tra -1 e 1. Quindi anche la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}$. Vediamo intanto se il termine generale tende a zero.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2} = \frac{1}{e^2},$$

ricordando il limite fondamentale. Pertanto il termine generale della serie data non tende a zero e quindi la serie diverge.

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n^2}$. Il termine generale tende ovviamente a zero. Cerchiamo di applicare il criterio della radice con il

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0.$$

Quindi in base al criterio della radice la serie data converge.

Esercizio 4.1

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Serie a termini di segno alternato. Vediamo col criterio di Leibnitz.

Consideriamo la successione $n \mapsto 1/\sqrt{n}$. Essa tende a zero per $n \to +\infty$ ed è decrescente, dato che la funzione radice è crescente (è una potenza di esponente positivo). Quindi la serie data converge (semplicemente) in base al criterio di Leibnitz. Si noti che la serie non converge assolutamente, dato che $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{1/2}$ è una serie armonica generalizzata divergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$. Serie a termini di segno alternato. Vediamo col criterio di Leibnitz.

Consideriamo la successione $n \mapsto 1/\ln^2 n$. Essa tende a zero per $n \to +\infty$ ed è decrescente, dato che la funzione logaritmica è crescente. Quindi la serie data converge (semplicemente) in base al criterio di Leibnitz.

Si noti che la serie non converge assolutamente, dato che $\sum_{n=2}^{+\infty} 1/\ln^2 n$ diverge: infatti, come in un esercizio molto simile in precedenza, ricordando che $\ln^2 n$ è trascurabile rispetto ad n, possiamo affermare che $1/n$ è trascurabile rispetto a $1/\ln^2 n$. Pertanto, dato che la serie armonica diverge, allora diverge anche la serie data.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{3^n}$. Serie a termini di segno alternato. Vediamo col criterio di Leibnitz.

La successione $n \mapsto \frac{2}{3^n}$ tende a zero per $n \to +\infty$ ed è decrescente dato che la funzione esponenziale a denominatore è crescente. Quindi la serie data converge in base al criterio di Leibnitz.

Questa volta c'è anche convergenza assoluta, dato che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^n}$ è uguale a $2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$ e quest'ultima converge essendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$.