III-1 Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$

Indice

1 La struttura di spazio vettoriale

In questa dispensa definiamo un "ambiente" in cui si possono trattare problemi in più variabili. Nella II parte del corso abbiamo visto molti aspetti legati ad $\mathbb{R}$ e alle funzioni definite in $\mathbb{R}$. Volendo vedere la cosa da un punto di vista applicativo, tutto questo può servire se abbiamo un problema in una sola variabile. Molto spesso invece (quasi sempre) nelle applicazioni si affrontano questioni che devono necessariamente prevedere la presenza di più di una variabile. Per questo, oltre che per i soliti aspetti teorici generali che comunque la matematica studia, quanto vediamo ora assume un'importanza molto rilevante.

Iniziamo prendendo in considerazione l'insieme i cui elementi sono le n-uple ordinate di numeri reali, dove n è un numero naturale, con $n \geq 2$. Si tratta dell'insieme, che indicherò con $\mathbb{R}^n$, definito da

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\Big\}.$$ [1]

Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$, lo si chiama anche *vettore*. I numeri reali x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ si dicono le *componenti* del vettore.

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$, qualora non sia indispensabile fare riferimento alle loro singole componenti, saranno indicati con lettere minuscole in grassetto: così, scrivendo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, intenderò che $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Metto in guardia gli studenti: i vettori sono fatti di numeri reali e le operazioni che tra breve vedremo coinvolgono vettori e numeri reali insieme. Una difficoltà che spesso si incontra è capire che cosa è vettore e che cosa è numero reale. La notazione in grassetto viene usata per aiutare a non fare confusione.

Talvolta nel seguito mi sarà utile considerare un certo numero, diciamo k, di vettori, tutti appartenenti ad $\mathbb{R}^n$. Li indicherò allora ad esempio con $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$, e metto in guardia lo studente a non confondere le due scritture

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k \ : \ \boldsymbol{v}^j \in \mathbb{R}^n \ .$$

La prima si riferisce ad *un* vettore di n componenti (quindi un elemento di $\mathbb{R}^n$), la cui generica componente è x_i, mentre la seconda sta ad indicare k vettori di $\mathbb{R}^n$, dei quali il generico viene indicato con $\boldsymbol{v}^j$.

Ovviamente, se ho la necessità di riferirmi alla i–esima componente del j–esimo vettore, userò la scrittura v_i^j.

Ora che abbiamo definito l'ambiente, occorre precisare quali operazioni posso fare nell'ambiente stesso.

Nell'insieme $\mathbb{R}^n$ possiamo definire le seguenti due operazioni, che chiamiamo rispettivamente **addizione** e **moltiplicazione per gli scalari** o più semplicemente **moltiplicazione scalare**.

L'addizione viene definita in questo modo: se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sono due elementi di $\mathbb{R}^n$, poniamo

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

È chiaro che in questo modo la somma dei due vettori è ancora un vettore di $\mathbb{R}^n$.

[1] La scrittura $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è della massima generalità, dato che non viene esplicitamente indicato il numero di componenti, se non attraverso il numero n. Se devo riferirmi alla generica componente, senza indicare esattamente quale, posso indicarla con x_i, e ovviamente i è un numero intero che sta tra 1 ed n. La scrittura formale dice proprio questo.

La moltiplicazione per uno scalare, cioè per un numero reale, è definita così: se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$ e α è un numero reale, allora

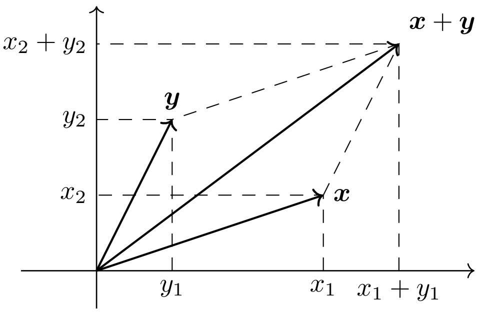
$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \ ,$$

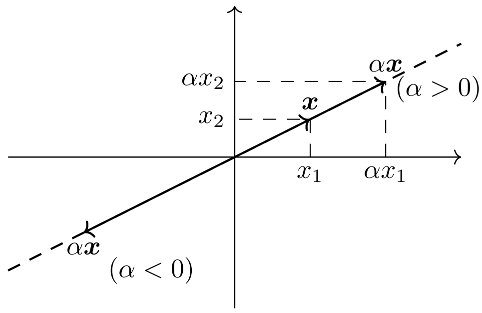
dove ovviamente αx_i è il prodotto (in $\mathbb{R}$) dei due numeri reali α e x_i, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

Si può facilmente verificare che le operazioni appena definite hanno le seguenti proprietà.

- 1a. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, (proprietà commutativa dell'addizione);
- 1b. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ si ha $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, (proprietà associativa dell'addizione);
- 1c. esiste un vettore (è il *vettore nullo* e si indica con $\mathbf{0}$) tale che $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$; [2]
- 1d. ogni vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ha un opposto (si indica con $-\boldsymbol{x}$) tale che $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;
- 2a. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ (proprietà associativa della moltiplicazione per gli scalari);
- 2b. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ (proprietà distributiva della moltiplicazione scalare rispetto all'addizione di $\mathbb{R}$);
- 2c. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ (proprietà distributiva della moltiplicazione scalare rispetto all'addizione di $\mathbb{R}^n$);

Osservazione L'interpretazione geometrica, in $\mathbb{R}^2$, dell'addizione tra vettori e della moltiplicazione di un vettore per uno scalare è illustrata nelle figure qui sotto.





L'insieme delle proprietà ora viste fa di $\mathbb{R}^n$ uno *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$. Quindi dicendo che $\mathbb{R}^n$ ha la struttura di spazio vettoriale si fa riferimento al fatto che in $\mathbb{R}^n$ sono definite queste due operazioni (addizione e moltiplicazione per gli scalari) e che esse hanno tutte le proprietà viste.

Le definizioni che seguono sono fondamentali.

Definizione Siano dati in $\mathbb{R}^n$ i vettori

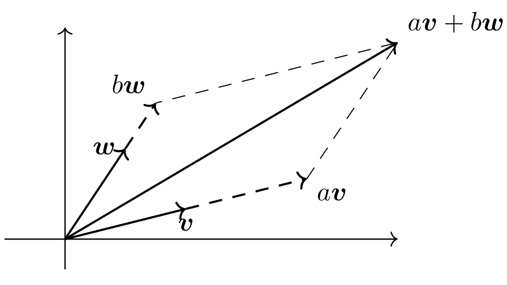
$$\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \dots, \boldsymbol{v}^k \quad \text{con} \quad k \geq 1.$$

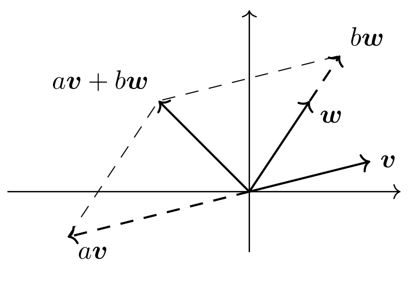
Si chiama **combinazione lineare** (d'ora in avanti c.l.) dei vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \dots, \boldsymbol{v}^k$ un qualunque vettore del tipo

$$\alpha_1\boldsymbol{v}^1 + \alpha_2\boldsymbol{v}^2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}^k \ ,$$

dove gli α_i, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, sono numeri reali. Questi numeri reali si dicono i *coefficienti* della c.l.

Osservazione Nel caso particolare di due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ in $\mathbb{R}^2$, nelle figure qui sotto sono rappresentate due loro c.l., di coefficienti a e b. Nella figura di sinistra è illustrato un caso con $a > 0$ e $b > 0$ (più precisamente con $a > 1$ e $b > 1$), in quella di destra un caso con $a < 0$ (più precisamente con $a < -1$) e $b > 0$ (in realtà $b > 1$).





Osservazione Dati in $\mathbb{R}^n$ i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \dots, \boldsymbol{v}^k$ con $k \geq 1$, di loro combinazioni lineari ne esistono infinite. Una di queste è in particolare quella che si ottiene scegliendo tutti i coefficienti nulli (così facendo si ottiene, indipendentemente da quali siano i vettori dati, il vettore nullo).

[2] Si tratta ovviamente del vettore con tutte le componenti nulle, cioè $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Esempio Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, 0, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, -1, 0) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (0, 0, 2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^4 = (-1, -1, 1).$$

Una loro c.l. è ad esempio il vettore $\boldsymbol{v} = (4, -1, -2)$, in quanto $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^1 + 2\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}^4$. Quindi in questo caso i coefficienti sono $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = -1$.

Esercizio 1.1 Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, 0, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (0, 1, 1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (2, -1, 1),$$

si scriva la loro combinazione lineare $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{v}^3$.

2 Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ si dicono **linearmente dipendenti** (d'ora in avanti l.d.) se esiste una loro c.l. uguale al vettore nullo con coefficienti non tutti nulli (cioè con almeno un coefficiente non nullo).[3]

Definizione I vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ si dicono **linearmente indipendenti** (d'ora in avanti l.i.) se non sono l.d. e cioè se l'unica loro c.l. uguale al vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli.[4]

Osservazione Se concordiamo di chiamare *banale* una combinazione lineare con coefficienti tutti uguali a zero, possiamo dire che dei vettori sono l.d. se c'è una loro c.l. non banale uguale al vettore nullo. Invece i vettori sono l.i. se l'unica loro c.l. uguale al vettore nullo è quella banale.

Esempio In $\mathbb{R}^2$ i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, -2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (-2, 4)$$

sono l.d. in quanto $2\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{0}$.

In $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, 0, 1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (0, 1, 0) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (0, 0, 1)$$

sono l.i. Infatti, supponiamo che ci sia una c.l. dei tre vettori uguale al vettore nullo. Allora sarà

$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad \text{, che significa} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Ma da quest'ultima si ricava che deve necessariamente essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Osservazione Le due definizioni sono tradizionalmente ostiche per molti studenti.

Ribadisco che esse dicono in pratica che i vettori sono l.d. se il vettore nullo si può scrivere in modo non banale, cioè con coefficienti non tutti nulli, come c.l. dei vettori dati e invece i vettori sono l.i. se il vettore nullo si può scrivere come loro c.l. soltanto in modo banale, cioè con coefficienti tutti nulli. Si tratta ovviamente di due proprietà mutuamente esclusive (o è l'una o è l'altra).

Per verificare attraverso la definizione se dei vettori dati sono dipendenti o indipendenti basta porre una generica loro c.l. uguale al vettore nullo e trovare se i coefficienti devono necessariamente essere tutti nulli oppure no (come fatto nell'esempio dei tre vettori).

Esercizi

- ▷ Se abbiamo un solo vettore, esso è l.i. se e solo se non è il vettore nullo.
- ▷ Se tra i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ c'è il vettore nullo, i vettori sono sicuramente l.d. Attenzione però che dei vettori possono essere l.d. anche se nessuno di essi è il vettore nullo (come visto in uno degli esempi).
- ▷ Se $V = \{\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k\}$ e i vettori di V sono l.i., allora ogni sottoinsieme di V è costituito da vettori l.i.

[3] Scritta formalmente, questa definizione dice che i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono l.d. se

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ , con } \alpha_i \neq 0 \text{ per qualche } i \text{, tali che } \quad \alpha_1\boldsymbol{v}^1 + \alpha_2\boldsymbol{v}^2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{0}.$$

[4] Scritta formalmente, questa definizione dice che i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono l.i. se e solo se

$$\alpha_1\boldsymbol{v}^1 + \alpha_2\boldsymbol{v}^2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

▷ Invece, se $V = \{\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k\}$ e i vettori di V sono l.d., allora ogni insieme di vettori che contenga V è costituito da vettori l.d.

Se abbiamo un insieme di almeno due vettori vale il seguente risultato:

Teorema

i) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$, con $k \geq 2$, sono l.d. se e solo se *almeno uno* di essi si può scrivere come c.l. dei rimanenti.

ii) I vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$, con $k \geq 2$, sono l.i. se e solo se *nessuno* di essi si può scrivere come c.l. degli altri.

Osservazione La dimostrazione non è difficile. Per comprendere meglio le definizioni vediamo ad esempio la dimostrazione della i). Se i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono l.d. significa per definizione che si ha

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}^2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}^k = \mathbf{0} \quad \text{con almeno un } \alpha_i \neq 0.$$

Mettiamo che sia il primo, cioè sia $\alpha_1 \neq 0$ (se non fosse il primo potrei comunque usare un ragionamento del tutto analogo). Allora possiamo scrivere

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}^1 = -\alpha_2 \boldsymbol{v}_2 - \ldots - \alpha_k \boldsymbol{v}^k \quad \text{e quindi} \quad \boldsymbol{v}^1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{v}^k.$$

Quindi ho dimostrato che possiamo scrivere $\boldsymbol{v}^1$ come c.l. degli altri.

Viceversa, se uno dei vettori si può scrivere come c.l. dei rimanenti (mettiamo sia il primo), significa che avremo $\boldsymbol{v}^1 = \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{v}^k$, da cui potremo scrivere $\boldsymbol{v}^1 - \beta_2 \boldsymbol{v}_2 - \ldots - \beta_k \boldsymbol{v}^k = \mathbf{0}$ e quindi ho scritto il vettore nullo come c.l. dei vettori dati e almeno un coefficiente è diverso da zero (infatti il primo coefficiente è 1).

È chiaro che tutto funziona se i vettori da cui si parte sono almeno due, da cui l'ipotesi che sia $k \geq 2$.

Esercizio 2.1 Si dica, usando la definizione, se i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (-1, 1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (0, 1)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 2.2 Si dica, usando la definizione, se i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, 2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, -1)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 2.3 Si dica, usando la definizione, se i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (-1, 0, 1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, 1, 0)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 2.4 Si dica, usando la definizione, se i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (0, 1, 1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, 0, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (1, 1, 0)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esaminiamo ora un particolare ed importantissimo insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo (in $\mathbb{R}^n$) i vettori

$$\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots, \boldsymbol{u}^n ,$$

dove il generico vettore $\boldsymbol{u}^j$ ha nulle tutte le sue componenti tranne la j–esima, che è uguale ad 1. Quindi $\boldsymbol{u}^1$ ha la prima componente 1 e le altre 0, $\boldsymbol{u}^2$ ha la seconda componente 1 e le altre 0, e così via fino ad $\boldsymbol{u}^n$, che ha l'ultima componente 1 e le altre 0. Possiamo formalizzare la definizione dicendo che

$$u_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Faccio notare esplicitamente che in $\mathbb{R}^n$ l'insieme in questione è costituito da n elementi.

Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$, questo insieme è costituito dai vettori

$$\boldsymbol{u}^1 = (1,0,0) \quad , \quad \boldsymbol{u}^2 = (0,1,0) \quad , \quad \boldsymbol{u}^3 = (0,0,1) \ .$$

I vettori $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots, \boldsymbol{u}^n$ si dicono i *vettori fondamentali* di $\mathbb{R}^n$. Vediamo perché questo insieme di vettori è importante.

Osservazione Ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere (in modo unico) come combinazione lineare dei vettori fondamentali (di $\mathbb{R}^n$). Basta osservare infatti che, considerato un qualunque vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si può scrivere

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}^1 + x_2\boldsymbol{u}^2 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}^n \ ,$$

che è una combinazione lineare dei vettori fondamentali. Inoltre si osserva che i coefficienti di tale combinazione lineare sono le componenti del vettore $\boldsymbol{x}$. Quando scriviamo un vettore come n-upla di componenti, queste componenti sono quindi i coefficienti della combinazione lineare di vettori fondamentali attraverso la quale si può esprimere il vettore stesso.

Osservazione I vettori fondamentali quindi, attraverso loro opportune combinazioni lineari, permettono di ottenere tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$. Per questo si dice che i vettori fondamentali sono *generatori* (o un *insieme di generatori*) dello spazio $\mathbb{R}^n$.

Viene data infatti in generale la seguente

Definizione I vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ si dicono *generatori* dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ se ogni vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come c.l. di $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$, se cioè per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ esistono dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tali che

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{v}^1 + \alpha_2\boldsymbol{v}^2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}^k.$$

Esempio I vettori $\boldsymbol{v}^1 = (1,1)$ e $\boldsymbol{v}^2 = (1,-1)$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$. Infatti, preso un qualunque vettore $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere

$$(x,y) = \alpha_1\boldsymbol{v}^1 + \alpha_2\boldsymbol{v}^2 \quad \text{(basta prendere } \alpha_1 = \tfrac{x+y}{2} \text{ e } \alpha_2 = \tfrac{x-y}{2}\text{)}.$$

3 Base e dimensione di uno spazio vettoriale

Segue una definizione fondamentale.

Definizione Una **base** di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori che siano contemporaneamente generatori di $\mathbb{R}^n$ e linearmente indipendenti.

Osservazione I vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$. Infatti, oltre ad essere, come già visto, generatori di $\mathbb{R}^n$, è facile dimostrare che sono anche l.i. Lo studente è invitato a dimostrarlo.

Osservazione In $\mathbb{R}^n$ non vi è un'unica base: ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, abbiamo visto che i vettori fondamentali $\boldsymbol{u}^1 = (1,0)$ e $\boldsymbol{u}^2 = (0,1)$ formano una base. Ma anche ad esempio l'insieme dei due vettori $\boldsymbol{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\boldsymbol{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ forma una base. Infatti, osservando che $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^1$ e $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^2$, si ha subito che ogni vettore $\boldsymbol{x}$ di $\mathbb{R}^2$, potendosi scrivere come c.l. di $\boldsymbol{u}^1$ e $\boldsymbol{u}^2$, si può anche scrivere come c.l. di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, e quindi $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$. Inoltre non è difficile verificare che una c.l. di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ è nulla solo se sono nulli i due coefficienti, e quindi $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono l.i. Pertanto essi formano una base di $\mathbb{R}^2$.

Definizione In $\mathbb{R}^n$ la base formata dai vettori fondamentali si chiama la **base fondamentale** (o *base canonica*).
Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ la base fondamentale è $\big\{(1,0),(0,1)\big\}$ e in $\mathbb{R}^3$ è $\big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big\}$.

Si può dimostrare che vale la

Proposizione Se $\{\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere *in modo unico* come c.l. dei vettori della base.

Osservazione Si intuisce forse che il fatto che i vettori siano generatori garantisce che $\boldsymbol{x}$ si possa scrivere come loro c.l. e il fatto che siano l.i. garantisce l'unicità della scrittura.

Quello che segue è un risultato fondamentale, che giustifica la definizione successiva.

Teorema Tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ sono formate da n vettori.
Pertanto ha senso porre la seguente importante definizione:

Definizione La **dimensione** di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è il numero di elementi delle basi dello spazio. Essa si indica con $\dim \mathbb{R}^n$.

Osservazione Quindi si ha che $\dim \mathbb{R}^n = n$. La dimensione di $\mathbb{R}^2$ è 2, la dimensione di $\mathbb{R}^3$ è 3, e così via.

Sono importanti anche i seguenti risultati:

Proposizione

1. Ogni insieme di più di n vettori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è formato da vettori l.d.
2. Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base se e solo se i vettori sono l.i.
3. Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base se e solo se i vettori sono generatori di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione La Proposizione quindi stabilisce questo fatto importante: in uno spazio di dimensione n, se abbiamo più di n vettori, essi sono certamente dipendenti; inoltre n vettori, se linearmente indipendenti, sono anche generatori (e quindi una base) e viceversa, se generatori, allora sono anche indipendenti (e quindi una base). Si faccia attenzione: questi risultati valgono quando si hanno vettori in numero uguale alla dimensione dello spazio.

4 Sottospazi

Definizione Un sottoinsieme non vuoto $\mathbb{S}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice **sottospazio di** $\mathbb{R}^n$ se per ogni scelta di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ in $\mathbb{S}$ tutte le loro c.l. $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartengono a $\mathbb{S}$.

Osservazioni Non è difficile provare che:

- se $\mathbb{S}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{S}$ contiene l'origine di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{S}$, allora anche $0 \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{y} = 0 \in \mathbb{S}$;
- sottospazi molto particolari di uno spazio $\mathbb{R}^n$ sono $\{\mathbf{0}\}$ e tutto $\mathbb{R}^n$, e sono detti sottospazi banali.[5]

Esempi Verifichiamo, a titolo di esercizio, che:

- In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $\mathbb{S} = \Big\{(s, 0) : s \in \mathbb{R}\Big\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

  In $\mathbb{S}$ stanno i punti (vettori) con la seconda componente nulla. Se prendiamo due qualunque di questi punti allora certamente ogni loro c.l. ha la seconda componente nulla. Quindi $\mathbb{S}$ è per definizione un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $\mathbb{S} = \Big\{(s_1, s_2) : s_1^2 + s_2^2 \leq 1\Big\}$ *non* è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

  Si tratta del cerchio di centro l'origine e raggio 1. Pur contenendo il vettore nullo, l'insieme $\mathbb{S}$ non soddisfa la proprietà dei sottospazi: infatti, se consideriamo ad esempio i due punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$, che stanno in $\mathbb{S}$, e ne facciamo la somma, otteniamo il vettore $(1, 1)$, che non sta in $\mathbb{S}$.

- In $\mathbb{R}^3$, l'insieme $\mathbb{S} = \Big\{(s_1, s_2, s_3) : s_1 + s_2 + s_3 = 0\Big\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

  Detto a parole, si tratta dei vettori (di tre componenti) la cui somma delle componenti è nulla. Siano $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ in $\mathbb{S}$: allora $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Se costruiamo una generica c.l. dei due vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (indichiamola con $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$) allora si ha

$$
\begin{aligned}
a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} &= a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) \\
&= (ax_1, ax_2, ax_3) + (by_1, by_2, by_3) \\
&= (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3).
\end{aligned}
$$

  Ora, se sommiamo le componenti di quest'ultimo, otteniamo

$$
ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 + ax_3 + by_3 = a(x_1 + x_2 + x_3) + b(y_1 + y_2 + y_3) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,
$$

  e quindi la generica c.l di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sta in $\mathbb{S}$, cioè $\mathbb{S}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

  Dovrebbe essere naturale pensare che in generale l'insieme $\mathbb{S} = \Big\{(s_1, \ldots, s_n) : s_1 + \ldots + s_n = 0\Big\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

[5] Non si faccia confusione tra $\emptyset$ e $\{\mathbf{0}\}$: il primo è l'insieme che non ha elementi, il secondo è l'insieme che contiene il solo vettore nullo.

Possiamo ripetere per un sottospazio la definizione di vettori generatori e di base.

Definizione Se $\mathbb{S}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$, si dice che i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ *generano* (o sono *generatori* di $\mathbb{S}$) se ogni vettore di $\mathbb{S}$ si può scrivere come c.l. dei vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$.

Definizione I vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono una **base** di $\mathbb{S}$ se sono generatori di $\mathbb{S}$ e nello stesso tempo sono linearmente indipendenti.

Osservazione Sono le stesse definizioni già incontrate prima, solo che allora erano riferite a tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$, ora invece riguardano un suo sottospazio. Come fatto per lo spazio $\mathbb{R}^n$, si può definire in modo analogo la **dimensione** di un suo sottospazio, riferendosi al numero di elementi che costituiscono le basi del sottospazio.

Si può dimostrare, come si intuisce facilmente, che se $\mathbb{S}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $0 \leq \dim \mathbb{S} \leq n$. L'unico sottospazio con dimensione 0 è il sottospazio banale formato dal solo vettore nullo e l'unico sottospazio di dimensione n è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$, cioè l'altro sottospazio che abbiamo chiamato banale.

Per capire un po' più a fondo come si possano ottenere sottospazi di $\mathbb{R}^n$, partiamo da un semplice esercizio: dimostriamo che, se consideriamo ad esempio in $\mathbb{R}^3$ due vettori qualunque $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$, l'insieme di tutte le c.l. di questi due vettori formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Per fissare le idee indichiamo con $\mathbb{S}$ l'insieme di tutte le c.l. di $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$. Formalmente

$$\mathbb{S} = \Big\{ \alpha_1 \boldsymbol{v}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}^2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per dimostrare che $\mathbb{S}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$ come sempre dobbiamo far vedere che, presi due elementi generici di $\mathbb{S}$, ogni loro c.l. è ancora un elemento di $\mathbb{S}$. Siano allora $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ elementi di $\mathbb{S}$; questo significa che

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{v}^1 + x_2 \boldsymbol{v}^2 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{v}^1 + y_2 \boldsymbol{v}^2.$$

Ora prendiamo una generica c.l. di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e sia $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$. Allora

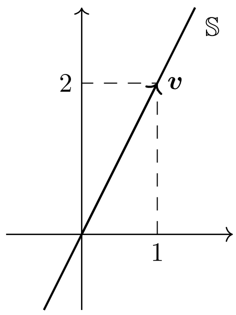
$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = a(x_1 \boldsymbol{v}^1 + x_2 \boldsymbol{v}^2) + b(y_1 \boldsymbol{v}^1 + y_2 \boldsymbol{v}^2) = a x_1 \boldsymbol{v}^1 + a x_2 \boldsymbol{v}^2 + b y_1 \boldsymbol{v}^1 + b y_2 \boldsymbol{v}^2 = (a x_1 + b y_1)\boldsymbol{v}^1 + (a x_2 + b y_2)\boldsymbol{v}^2.$$

Si tratta allora di una c.l. di $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$ (a, b, x_1, y_1, x_2, y_2 sono numeri) e quindi di un elemento di $\mathbb{S}$ ed è quello che volevamo provare.

Quanto appena trovato è un risultato che si generalizza facilmente: se in $\mathbb{R}^n$ prendiamo certi vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$, l'insieme di tutte le loro c.l. forma un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Vale anche se considero un solo vettore $\boldsymbol{v}$: le c.l. di $\boldsymbol{v}$ sono ovviamente i vettori del tipo $\alpha\boldsymbol{v}$, dove α è un qualunque numero reale.

Definizione In $\mathbb{R}^n$ si chiama *sottospazio generato da* $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ il sottospazio formato da tutte le c.l. di $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$.

Osservazione Quanto trovato ci fornisce un modo per costruire sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Resta poi aperta la questione se ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ sia ottenibile in questo modo, cioè come sottospazio generato da alcuni vettori. Di questo ci occupiamo tra un po'. Ora costruiamo qualche sottospazio con qualche esempio.



Esempio Prendiamo, in $\mathbb{R}^2$, il vettore $\boldsymbol{v} = (1, 2)$. Cerchiamo di capire come è fatto geometricamente il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$. Si tratta come detto dell'insieme di tutte le c.l. di $\boldsymbol{v}$ e cioè dell'insieme

$$\mathbb{S} = \Big\{ \alpha\boldsymbol{v} : \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Sono tutti i multipli del vettore $\boldsymbol{v}$ e quindi, ricordando il significato geometrico della moltiplicazione scalare, sono tutti (e soli) i vettori che stanno sulla retta (passante per l'origine) che contiene $\boldsymbol{v}$.

Possiamo dire molte cose di $\mathbb{S}$ (possiamo dire tutto):

- $\boldsymbol{v}$ è un generatore di $\mathbb{S}$, in quanto ogni elemento di $\mathbb{S}$ si può scrivere come c.l. di $\boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{v}$ forma una base di $\mathbb{S}$, [6] in quanto $\boldsymbol{v}$, non essendo nullo, è linearmente indipendente
- come conseguenza del punto precedente la dimensione di $\mathbb{S}$ è 1.

Esempio Consideriamo ora, sempre in $\mathbb{R}^2$, *due* vettori e siano $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Come è fatto geometricamente il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$? Si tratta ancora dell'insieme di tutte le c.l. di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e cioè di

$$\mathbb{S} = \Big\{ a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} : a, b \in \mathbb{R} \Big\}.$$

[6] Per l'esattezza dovremmo scrivere che $\{\boldsymbol{v}\}$ è una base di $\mathbb{S}$.

Possiamo ancora aiutarci con la geometria e con l'interpretazione geometrica della c.l. $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$. Si dovrebbe intuire che possiamo avere due casi ben distinti: se i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ stanno sulla stessa retta (sono linearmente dipendenti) allora prendendo tutte le c.l dei due vettori otteniamo quello che si otteneva prima con un solo vettore, cioè la retta che contiene entrambi; se invece i due vettori non sono sulla stessa retta (cioè sono linearmente indipendenti) allora con le c.l. di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ possiamo ottenere tutti i vettori del piano.[7]

Allora possiamo concludere l'esempio dicendo:

- se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono l.d. il sottospazio $\mathbb{S}$ da essi generato è rappresentato da una retta per l'origine. In questo caso $\dim \mathbb{S} = 1$;
- se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono l.i. il sottospazio $\mathbb{S}$ da essi generato è tutto $\mathbb{R}^2$. In questo caso ovviamente $\dim \mathbb{S} = 2$.

Osservazione Non è difficile capire che non ci sono situazioni "intermedie", cioè sottospazi che siano "un po' più di una retta e un po' meno di tutto $\mathbb{R}^2$". In altre parole in $\mathbb{R}^2$ i sottospazi non banali sono soltanto le rette per l'origine.[8]

Osservazione Qualcuno potrebbe porsi questa domanda: possono esserci in $\mathbb{R}^2$ sottospazi di dimensione 1 che non sono rette? Per arrivare a convincersi che la risposta è no, si rifletta su queste due considerazioni: per prima cosa un sottospazio deve essere necessariamente un insieme non limitato (quindi un segmento, un triangolo, un quadrato, un cerchio, ... non possono essere sottospazi); secondo, se in un sottospazio c'è un punto, allora deve esserci necessariamente anche tutta la retta che passa per quel punto e per l'origine (segue dalla definizione di sottospazio). E si tenga anche conto infine del fatto che, se ci sono nell'insieme due vettori l.i., allora c'è tutto $\mathbb{R}^2$.

Esempio Che cosa succede in $\mathbb{R}^3$? Possiamo anche qui procedere per esempi, come prima. Se consideriamo il sottospazio generato da un solo vettore $\boldsymbol{v}$, si tratta di una retta per l'origine (sottospazio di dimensione 1). Se consideriamo il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, per analogia con quanto succede in $\mathbb{R}^2$ si intuisce che si possono avere due casi: o una retta per l'origine, se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono l.d. (stanno sulla stessa retta) oppure l'insieme delle c.l. di due vettori l.i. Non è difficile intuire che sono i punti del piano che contiene i due vettori. Con due soli vettori non si può ottenere nulla che non stia nel loro stesso piano. In questo caso si tratta di un sottospazio di dimensione 2.

Ora ci si chiede: e con 3 vettori $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$ che cosa possiamo ottenere? Semplice, ci si arriva anche qui per analogia con quanto accade in $\mathbb{R}^2$:

- se i tre vettori stanno sulla stessa retta, otteniamo la retta che li contiene (sottospazio di dimensione 1);
- se i tre vettori non stanno sulla stessa retta ma stanno sullo stesso piano otteniamo il piano che li contiene (sottospazio di dimensione 2);
- se i tre vettori non stanno sullo stesso piano otteniamo tutto $\mathbb{R}^3$, che l'unico sottospazio di dimensione 3.

E ora l'osservazione che permette poi di capire l'aspetto cruciale in generale: quello che determina la dimensione del sottospazio generato da alcuni vettori non è il numero di questi, ma è il numero di vettori linearmente indipendenti che ci sono tra questi, o meglio ancora il *massimo numero* di vettori l.i. tra questi.

Poniamoci ora due importanti domande relative al sottospazio $\mathbb{S}$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ in $\mathbb{R}^n$.

1. Qual è la dimensione di $\mathbb{S}$?
2. Come si può trovare una base di $\mathbb{S}$?

Osservazione Si noti che non mi chiedo di trovare dei generatori di $\mathbb{S}$ dato che, per definizione, $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono generatori dello spazio da essi generato.

Gli esempi appena visti in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ e la considerazione fatta alla fine di questi esempi ci permette di rispondere subito alla prima domanda: la dimensione di $\mathbb{S}$ dipende da quanti vettori l.i. ci sono tra i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ ed è esattamente il massimo numero di vettori l.i. che possiamo trovare tra i generatori (ovviamente sarà $\dim \mathbb{S} \leq k$).

Per arrivare a rispondere alla seconda domanda basta fare queste considerazioni: se i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono l.i. allora essi formano una base di $\mathbb{S}$. [9]

[7] Questo forse può non essere di immediata comprensione, ma a tale scopo è utile il seguente esercizio: disegnate due vettori l.i., poi prendete un qualunque altro vettore del piano e cercate di ottenerlo come c.l. dei due vettori fissati, ricordando la costruzione geometrica della diagonale del parallelogramma. Se i due vettori iniziali li avete presi nello stesso quadrante, ad esempio il primo, provate a scegliere il terzo nel secondo o terzo quadrante e constatate che è sempre possibile ottenerlo come c.l. degli altri due.

[8] Che i sottospazi siano solo le rette *per l'origine* segue ovviamente dal fatto, trovato all'inizio, che ogni sottospazio deve contenere il vettore nullo.

[9] Segue direttamente dalla definizione di base di un sottospazio: una base è un insieme di generatori l.i. del sottospazio. I vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ sono come detto generatori del sottospazio da essi generato (è solo un giro di parole) e, essendo l.i., sono allora una base.

Se i vettori sono l.d. allora posso trovarne uno che dipende dagli altri (definizione di vettori l.d.), lo tolgo dal gruppo e mi rifaccio la stessa domanda di prima: quelli che restano sono l.i.? Se sì sono una base, se no ne posso trovare un altro che dipende dagli altri e toglierlo, e così via.

Senza scendere nei particolari di un procedimento che dovrebbe apparire abbastanza convincente, si può dimostrare che questo metodo funziona: permette, o prima o dopo, di trovare finalmente un insieme di vettori l.i. e di concludere che esso è una base di $\mathbb{S}$.

Osservazione Le risposte alle due domande (come trovare la dimensione e una base del sottospazio generato da $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \dots, \boldsymbol{v}^k$) le abbiamo, ma lo studente lungimirante potrebbe osservare che le cose non è detto siano semplici da un punto di vista operativo, cioè nei casi concreti. E avrebbe senz'altro visto giusto. Come stabilire qual è, con 10 o 50 vettori, il massimo numero di quelli indipendenti? Come trovare, tra 10 o 50 vettori, se ce n'è uno che dipende dagli altri e poi ripetere questa operazione fino ad averli indipendenti?[10]

A titolo di esempio (ma con solo quattro vettori in $\mathbb{R}^2$), consideriamo il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dai vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1,1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1,-1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (0,2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^4 = (2,0).$$

Possiamo osservare che i vettori sono dipendenti (sono 4 in uno spazio di dimensione 2) e che, ad esempio, $\boldsymbol{v}^4 = \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2$. Eliminiamo $\boldsymbol{v}^4$ (perché il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3$ coincide con quello generato da $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3, \boldsymbol{v}^4$).

I vettori rimasti sono ancora dipendenti in quanto, ad esempio, $\boldsymbol{v}^3 = \boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2$. Eliminiamo anche $\boldsymbol{v}^3$, per lo stesso motivo di prima. Restano $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$, che sono indipendenti. Essi sono una base per il sottospazio in questione (che tra l'altro in questo caso è tutto $\mathbb{R}^2$).

Osservazione Lo studente molto lungimirante, riflettendo bene sull'esempio proposto, potrebbe ora osservare che all'inizio abbiamo eliminato $\boldsymbol{v}^4$, trovandolo dipendente dagli altri. Ma anche $\boldsymbol{v}^1$ dipende dagli altri, perché dalla stessa relazione usata prima possiamo ricavare $\boldsymbol{v}^1 = \boldsymbol{v}^4 - \boldsymbol{v}^2$. E se avessimo eliminato $\boldsymbol{v}^1$ al posto di $\boldsymbol{v}^4$? Avremmo avuto alla fine una base diversa e magari una dimensione diversa? Ebbene, sì e no: sì alla prima domanda e no alla seconda. Possiamo certamente trovare basi diverse (la base di uno spazio, o di un sottospazio, non è unica, lo abbiamo già visto) ma la dimensione è unica. Alla fine del nostro processo di eliminazione dei vettori dipendenti potremmo trovare a volte una base diversa ma fatta dallo stesso numero di vettori dell'altra.

Torneremo più avanti sulla questione di come si possa operare nel concreto per risolvere le due questioni.

Esercizio 4.1 Si stabilisca se i seguenti insiemi sono sottospazi. In caso affermativo se ne indichi una base.

(a) $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\mathbb{S}_1 = \Big\{(s,-s) : s \in \mathbb{R}\Big\}$

(b) $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\mathbb{S}_2 = \Big\{(s,s^2) : s \in \mathbb{R}\Big\}$

(c) $\mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\mathbb{S}_3 = \Big\{(s,s-1) : s \in \mathbb{R}\Big\}$

(d) $\mathbb{S}_4 \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\mathbb{S}_4 = \Big\{(s_1,s_2) : |s_1| \le 1, |s_2| \le 1\Big\}$

(e) $\mathbb{S}_5 \subseteq \mathbb{R}^3$, con $\mathbb{S}_5 = \Big\{(s_1,s_2,s_3) : s_1 = s_3\Big\}$

(f) $\mathbb{S}_6 \subseteq \mathbb{R}^3$, con $\mathbb{S}_6 = \Big\{(s_1,s_2,s_3) : s_1 - s_3 = 1\Big\}$

5 Prodotto interno

Definisco ora una nuova operazione tra vettori di $\mathbb{R}^n$.

Definizione Siano $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Si definisce **prodotto interno** (o **prodotto scalare**) di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ il numero reale

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \ .$$

[10] Si noti che non è rilevante soltanto il numero di vettori ma anche lo spazio in cui si trovano questi vettori: se con 10 vettori in $\mathbb{R}^2$ forse le cose non sono poi tanto complicate, ben diverso è il caso di 10 vettori in $\mathbb{R}^{10}$.

Osservazione Il nome prodotto scalare fa riferimento al fatto che il risultato di questa operazione tra vettori è uno scalare, cioè un numero reale.[11]

Ad esempio, il prodotto interno di $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$ e $\boldsymbol{y} = (-3, 2, 1)$ è $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 4$, il prodotto interno di $\boldsymbol{x} = (0, -1, 1)$ e $\boldsymbol{y} = (1, 1, 0)$ è $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -1$, il prodotto interno di $\boldsymbol{x} = (0, -1, 1)$ e $\boldsymbol{y} = (1, 1, 1)$ è $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

Osservazione Si verifica facilmente che il prodotto interno tra vettori di $\mathbb{R}^n$ ha queste proprietà:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, e $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ se e solo se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$;
3. $\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.

Utilizzando la definizione di prodotto interno si può dare l'ulteriore importante

Definizione Si definisce **norma** (*euclidea*) del vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (e si scrive $\|\boldsymbol{x}\|$) il numero reale

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, .$$

Esempio In $\mathbb{R}^3$ il vettore $\boldsymbol{x} = (1, -2, 3)$ ha norma euclidea $\|(1, -2, 3)\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$.

Osservazione Il concetto di norma è un concetto molto generale. Una **norma** in $\mathbb{R}^n$ è in generale una qualunque funzione definita in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ che abbia le seguenti proprietà:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ se e solo se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione La prima proprietà dice che la norma non è mai negativa ed è nulla solo se il vettore è nullo; la seconda è una proprietà di *omogeneità* e dice che se moltiplico il vettore per una costante, la norma subisce la stessa sorte (tenendo conto che, se la costante è negativa, la norma non può diventare negativa); la terza si chiama *disuguaglianza triangolare* e si legge dicendo che la norma della somma di due vettori è non maggiore della somma delle due norme.

Esercizio Lo studente verifichi tali proprietà sulla norma euclidea in $\mathbb{R}^n$.

La norma euclidea non è l'unica norma possibile in $\mathbb{R}^n$.

Altri esempi di norme (non euclidee) in $\mathbb{R}^n$ sono le seguenti, dette rispettivamente *norma uno, norma p (o p-norma) e norma infinito*:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad , \qquad \|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (p > 0) \ ^{12} \qquad , \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Osservazione Si noti che ci sono infinite p-norme, dato che possiamo fissare un qualunque $p > 0$. Si noti anche che la norma 2 (quella con $p = 2$) è la norma euclidea.

Esempio In $\mathbb{R}^4$ prendiamo il vettore $\boldsymbol{x} = (-2, 0, 1, -3)$. Si ha

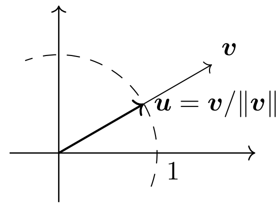
$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = 2 + 1 + 3 = 6 \quad , \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{2^2 + 1 + 3^2} = \sqrt{14} \quad , \quad \|\boldsymbol{x}\|_3 = \sqrt[3]{2^3 + 1 + 3^3} = \sqrt[3]{36} \quad , \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 3.$$

Osservazione La norma è in qualche modo legata alla lunghezza del vettore. La norma euclidea è quella che appunto usiamo abitualmente per misurare le lunghezze: è *una* delle possibili norme. Anche le altre norme danno un certo tipo di informazione sulla lunghezza del vettore.

[11] Non si faccia confusione tra *prodotto scalare* e *moltiplicazione scalare*. Il primo moltiplica due vettori e ha per risultato un numero, la seconda moltiplica un vettore per un numero e ha per risultato un vettore.

[12] Il parametro p può essere un qualunque numero reale positivo.

Osservazione Se dividiamo un qualunque vettore $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ per la sua norma, cioè moltiplichiamo $\boldsymbol{v}$ per il numero reale $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}$, otteniamo un vettore di norma 1 che, ad esempio in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$, possiamo dire avere la stessa direzione e lo stesso verso di $\boldsymbol{v}$ (lo si dice talvolta vettore *normalizzato*, cioè vettore che ha le stesse caratteristiche dell'altro, ma ha norma 1). Se poniamo $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$, allora possiamo scrivere $\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\| \cdot \boldsymbol{u}$.



Utilizzando il concetto di norma, è possibile definire la distanza tra gli elementi di $\mathbb{R}^n$:

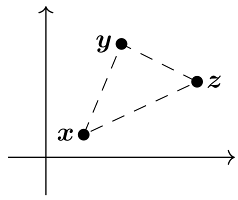
Definizione Dati $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, si chiama **distanza** (*euclidea*) tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ la norma (euclidea) della differenza dei due vettori, cioè il numero reale

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Esempio In $\mathbb{R}^2$ la distanza euclidea tra $\boldsymbol{x} = (2, 1)$ e $\boldsymbol{y} = (1, -3)$ è $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|(1, 4)\| = \sqrt{17}$. In $\mathbb{R}^3$ la distanza tra due vettori fondamentali è $\sqrt{2}$ (anche in $\mathbb{R}^2$ e anche in generale in $\mathbb{R}^n$).

Osservazione Anche il concetto di distanza, come quello di norma, è più generale di quanto la definizione precedente possa far pensare. In generale, in un insieme X [13] si definisce **distanza** una qualunque funzione δ definita in $X \times X$ a valori reali che abbia le seguenti proprietà:

1. $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ e $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ se e solo se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
2. $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$;
3. $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$.



Osservazione In pratica questo è quello che chiediamo ad una funzione per chiamarla distanza: di non essere mai negativa e di ridursi a zero solo quando i due punti coincidono, di essere simmetrica e infine, la meno banale delle tre, di soddisfare una sorta di disuguaglianza triangolare.

Esercizio Si determini, prima in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ e poi in generale in $\mathbb{R}^n$, la distanza euclidea, la distanza in norma uno, in norma p e in norma infinito dei vettori fondamentali.

Esercizio Si verifichi che in $\mathbb{R}^n$ (ma anche in un qualsiasi insieme X) la funzione

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \end{cases}$$

è una distanza (distanza $0 - 1$).

Osservazione Questo risultato può sorprendere, dato che difficilmente useremmo questa funzione per misurare la distanza tra due punti (l'informazione che tale distanza fornisce è veramente poca). Però anche questa funzione ha le proprietà richieste per essere una distanza.

Esercizio Si dimostri che, se $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ è una norma in uno spazio vettoriale, allora $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ è una distanza.[14]

Osservazione Non tutte le distanze si ricavano da una norma nel modo suggerito nell'esercizio precedente. Ad esempio la distanza $0 - 1$ definita sopra non si può ricavare da una norma. Lo studente cerchi di capire perché.

Osservazione Data in uno spazio vettoriale una distanza δ, il definire $\|\boldsymbol{x}\| = \delta(\boldsymbol{x}, 0)$ non porta in generale ad una norma (anche se così accade in $\mathbb{R}^n$ con la distanza euclidea). Lo studente verifichi che ad esempio con la distanza $0 - 1$ la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ non è una norma.

Si può dimostrare che vale la seguente importante *disuguaglianza di Cauchy–Schwarz*:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione A parole: il prodotto interno di due vettori è, in modulo, minore o uguale del prodotto delle norme dei vettori.

Riporto anche la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, che non è difficile.

[13] Si noti che viene richiesto solo che X sia un insieme, quindi non uno spazio vettoriale. Questo perché le proprietà (che seguono) della distanza non richiedono nessuna struttura particolare in X. Lo studente è invitato a riconsiderare le proprietà della norma e a constatare che queste ultime richiedono invece una struttura, quella di spazio vettoriale.

[14] Cioè se una funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ ha le tre proprietà di una norma allora la funzione $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ ha le tre proprietà di una distanza.

Dimostrazione La dimostrazione è "ingegnosa". Consideriamo i vettori del tipo $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ con $t \in \mathbb{R}$: si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, t\boldsymbol{y} \rangle + \langle t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle t\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2t\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + t^2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + t^2\|\boldsymbol{y}\|^2. \end{aligned}$$

Quest'ultimo è un polinomio di secondo grado in t, che risulta quindi non negativo per ogni valore di t. Il discriminante dell'equazione deve allora essere ≤ 0, e pertanto

$$\Delta = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0,$$

da cui

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2, \quad \text{e quindi} \quad |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|.$$

Veniamo ora all'importante concetto di ortogonalità.

Definizione Due vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ di $\mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** se il loro prodotto interno è nullo, cioè se $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ i vettori $\boldsymbol{x} = (2, -1, 1)$ e $\boldsymbol{y} = (1, 1, -1)$ sono ortogonali.

Osservazione Se $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, allora l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a $\boldsymbol{v}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Dimostriamolo. Sia S l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a $\boldsymbol{v}$, cioè sia

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\}.$$

Siano $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$. Dimostriamo che allora anche una qualunque c.l. di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ appartiene ad S. Indichiamo con $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ la c.l.. Si ha

$$\langle a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v} \rangle = a\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle + b\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$$

e quindi è dimostrato che S è un sottospazio.

Lo stesso risultato si generalizza facilmente ad un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, cioè: se $T \subset \mathbb{R}^n$, allora l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a tutti gli elementi di T è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (che si chiama *complemento ortogonale di* T). La dimostrazione è analoga alla precedente, ma vediamola: ora si ha

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \rangle = 0, \ \forall \boldsymbol{t} \in T\}.$$

Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, allora per una qualunque c.l. di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (e sia $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$), se $\boldsymbol{t}$ è un qualunque elemento dell'insieme T, avremo

$$\langle a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \rangle = a\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \rangle + b\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \rangle = 0$$

e quindi S è un sottospazio.

Esempio In $\mathbb{R}^2$, il complemento ortogonale del sottospazio (di dimensione 1) costituito da una retta per l'origine è la retta (per l'origine) perpendicolare alla retta data (ha anch'esso dimensione 1).

In $\mathbb{R}^3$, il complemento ortogonale del sottospazio (di dimensione 1) costituito da una retta per l'origine è il piano (per l'origine) perpendicolare alla retta (il piano ha dimensione 2). Invece il complemento ortogonale al sottospazio (di dimensione 2) costituito da un piano per l'origine è la retta (per l'origine) perpendicolare al piano. Si intuisce che c'è un legame tra le dimensioni di sottospazi che sono complementi ortogonali l'uno dell'altro. Quale?

Definizione I vettori di un insieme $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ si dicono **ortonormali** (o $\mathcal{X}$ è un insieme ortonormale) se, presi $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, si ha che $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ e inoltre $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1$ per ogni $\boldsymbol{x}$ in $\mathcal{X}$.

Esempio In $\mathbb{R}^2$ i due vettori $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono ortonormali.

In $\mathbb{R}^3$ i due vettori $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ovviamente, in generale, in $\mathbb{R}^n$ i vettori fondamentali $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots, \boldsymbol{u}^n$ sono ortonormali.

Sui vettori ortonormali sussistono importanti risultati. Uno dei più immediati è il seguente:

Teorema In $\mathbb{R}^n$, se i vettori $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^k$ sono ortonormali, allora sono anche l.i.

Particolarmente importanti sono gli insiemi di vettori che sono contemporaneamente ortonormali e basi dello spazio a cui appartengono (o di un suo sottospazio).

Definizione I vettori $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ sono una **base ortonormale** di $\mathbb{R}^n$ se sono una base di $\mathbb{R}^n$ e sono ortonormali.

Esempio I vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$ sono quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Non si tratta dell'unica base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, una base ortonormale è data dai vettori $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

In $\mathbb{R}^3$, ad esempio, i tre vettori $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ formano una base ortonormale.

Esercizio 5.1 Dati i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, 0, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, -1, 1),$$

si calcoli $\langle \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2 \rangle$. Si calcoli poi la norma euclidea di $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$ e infine si calcolino

$$\|\boldsymbol{v}^1\|_1 \quad , \quad \|\boldsymbol{v}^2\|_1 \qquad , \qquad \|\boldsymbol{v}^1\|_3 \quad , \quad \|\boldsymbol{v}^2\|_3 \qquad , \qquad \|\boldsymbol{v}^1\|_\infty \quad , \quad \|\boldsymbol{v}^2\|_\infty .$$

Esercizio 5.2 Dato $\boldsymbol{v} = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$, si trovi un vettore di norma unitaria che genera lo stesso sottospazio di $\boldsymbol{v}$.

Esercizio 5.3 Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{v}^1 = (0, 1, 1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (-1, 1, 1),$$

si trovino due vettori di norma unitaria che generano lo stesso sottospazio generato da $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$.

Esercizio 5.4 Si verifichi che i vettori

$$\boldsymbol{x}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad \boldsymbol{x}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

sono ortonormali.

Esercizio 5.5 Si verifichi che i vettori

$$\boldsymbol{x}^1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad , \quad \boldsymbol{x}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad , \quad \boldsymbol{x}^3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

sono ortonormali.

6 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Si ha

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{v}^3 = (1, 0, -1) - (0, 1, 1) + 2(2, -1, 1) = (5, -3, 0).$$

Esercizio 2.1

Procediamo con la definizione.
Dato che $\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2 = \mathbf{0}$, i vettori sono linearmente dipendenti, in quanto abbiamo trovato una combinazione lineare non banale (cioè con coefficienti non tutti nulli) uguale al vettore nullo (la c.l. è $1 \cdot \boldsymbol{v}^1 + 1 \cdot \boldsymbol{v}^2 + 0 \cdot \boldsymbol{v}^3 = \mathbf{0}$). Possiamo anche osservare che c'è almeno uno dei tre vettori che si può scrivere come combinazione lineare degli altri (infatti $\boldsymbol{v}^2 = -\boldsymbol{v}^1$).
Si poteva arrivare alla conclusione anche osservando che i vettori dati sono tre e che appartengono ad uno spazio di dimensione 2. Quindi, dai risultati visti nella lezione, essi sono certamente dipendenti.

Esercizio 2.2

Sono due vettori in $\mathbb{R}^2$ e quindi dal semplice confronto tra il numero dei vettori e la dimensione dello spazio non si può dire nulla. Questa volta non è evidente se ci sia una c.l. non banale che dia il vettore nullo. Affrontiamo quindi il problema nella sua generalità: prendiamo una c.l. dei due vettori, poniamola uguale al vettore nullo e vediamo se la cosa può sussistere in modo non banale oppure no.

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(1, -1) = (0, 0) \quad \text{equivale a} \quad (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0, 0) \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Anche se non abbiamo ancora trattato i sistemi lineari in generale, dalle conoscenze che gli studenti hanno dalle scuole secondarie (si ricava α_2 dalla seconda equazione e lo si sostituisce nella prima) si trova facilmente che deve essere $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, cioè l'unica soluzione è quella banale. I due vettori sono quindi linearmente indipendenti.

Esercizio 2.3

Anche qui il semplice confronto tra il numero dei vettori e la dimensione dello spazio non ci consente di concludere (sono due vettori in uno spazio di dimensione 3 e quindi nulla si può dire).
Costruiamo la generica combinazione lineare dei due vettori:

$$\alpha_1(-1, 0, 1) + \alpha_2(1, 1, 0) = (-\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1).$$

Questo vettore è il vettore nullo se (e solo se) si ha contemporaneamente $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 = 0$. È chiaro che l'unica possibilità è con $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Pertanto i vettori sono linearmente indipendenti.
Si può anche osservare che nessuno dei due vettori è c.l. dell'altro.[15]

Esercizio 2.4

Se ci si accorge subito che la somma dei primi due vettori è il terzo vettore l'esercizio è finito, dato che $\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}^3 = \mathbf{0}$ è la c.l. non banale che mi dà il vettore nullo, e quindi i vettori sono linearmente dipendenti.
Se non ci si accorge di questo si può affrontare il problema costruendo la generica c.l dei tre vettori. Si ha

$$\alpha_1(0, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, -1) + \alpha_3(1, 1, 0) \quad \text{, che è uguale a} \quad (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2).$$

Questo vettore è il vettore nullo se e solo se

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Ricavando α_3 dalla prima e sostituendo nelle altre si trova il sistema

$$\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Chiaramente il sistema non ha come unica soluzione quella banale (cioè $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$) dato che ad esempio $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ è una soluzione non banale. Pertanto i vettori sono linearmente dipendenti, dato che risulta $\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}^3 = \mathbf{0}$.
Si può anche osservare che l'ultima uguaglianza scritta permette di esprimere uno dei tre vettori come c.l. degli altri (ad esempio $\boldsymbol{v}^3 = +\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2$).

Esercizio 4.1

(a) L'insieme $\mathbb{S}_1$ è formato dai vettori di $\mathbb{R}^2$ in cui la seconda componente è l'opposto della prima. Dimostriamo con la definizione che è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Facciamo vedere cioè che, presi due generici elementi di $\mathbb{S}_1$, ogni loro c.l. è ancora un elemento di $\mathbb{S}_1$. Siano

$$(x, -x) \quad \text{e} \quad (y, -y) \quad \text{due generici elementi di } \mathbb{S}_1.$$

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha(x, -x) + \beta(y, -y) = (\alpha x + \beta y, -\alpha x - \beta y) = (\alpha x + \beta y, -(\alpha x + \beta y)).$$

Quindi la c.l. sta in $\mathbb{S}_1$, dato che la seconda componente è l'opposto della prima. Quindi $\mathbb{S}_1$ è un sottospazio.

Per determinare una base di $\mathbb{S}_1$ basta osservare che gli elementi di $\mathbb{S}_1$, cioè i vettori del tipo $(s, -s)$ (con $s \in \mathbb{R}$) si possono scrivere come $s(1, -1)$, e cioè sono i multipli del vettore $(1, -1)$. Allora il vettore $(1, -1)$ è un generatore di $\mathbb{S}_1$. Ma $(1, -1)$ è anche linearmente indipendente, essendo non nullo. Quindi una base di $\mathbb{S}_1$ è $\{(1, -1)\}$.

(b) $\mathbb{S}_2$ non è un sottospazio. Infatti non è vero che, presi due generici elementi di $\mathbb{S}_2$, ogni loro c.l. è ancora un elemento di $\mathbb{S}_2$. Possiamo vederlo ad esempio considerando che

$$(1, 1) \in \mathbb{S}_2 \quad \text{e} \quad (-1, 1) \in \mathbb{S}_2.$$

La somma dei due però è $(0, 2)$, che non sta in $\mathbb{S}_2$. Questo è sufficiente per concludere che $\mathbb{S}_2$ non è un sottospazio.
Si poteva anche osservare che

$$(1, 1) \in \mathbb{S}_2 \quad \text{ma} \quad 2(1, 1) = (2, 2) \notin \mathbb{S}_2.$$

[15] Dire che un vettore $\boldsymbol{v}$ è c.l. di un altro vettore $\boldsymbol{u}$ significa che $\boldsymbol{v}$ si ottiene come moltiplicazione scalare di $\boldsymbol{u}$ per una qualche costante. Si può anche dire che i due sono *proporzionali*.

(c) $\mathbb{S}_3$ non è un sottospazio. Lo si può affermare poiché $\mathbb{S}_3$ non contiene il vettore nullo. Oppure, con la definizione, si può osservare che ad esempio
$$(0,-1) \in \mathbb{S}_3 \quad \text{e} \quad (1,0) \in \mathbb{S}_3,$$
ma la loro somma $(1,-1)$ non sta in $\mathbb{S}_3$. Oppure anche osservando che
$$(1,0) \in \mathbb{S}_3 \quad \text{ma} \quad 2(1,0) = (2,0) \notin \mathbb{S}_3.$$

(d) $\mathbb{S}_4$ è (in $\mathbb{R}^2$) il quadrato di vertici $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Pur contenendo l'origine, $\mathbb{S}_4$ non soddisfa la proprietà richiesta ai sottospazi: infatti, ad esempio,
$$(1,1) \in \mathbb{S}_4 \quad \text{e} \quad (-1,1) \in \mathbb{S}_4,$$
ma la loro somma $(0,2)$ non sta in $\mathbb{S}_4$. Si può anche osservare che
$$(1,1) \in \mathbb{S}_4 \quad \text{ma} \quad 2(1,1) = (2,2) \notin \mathbb{S}_4.$$

(e) $\mathbb{S}_5$ è (in $\mathbb{R}^3$) l'insieme dei vettori che hanno uguali la prima e la terza componente. $\mathbb{S}_5$ contiene il vettore nullo e quindi può essere un sottospazio. Vediamo con la definizione: prendiamo due generici elementi di $\mathbb{S}_5$, indichiamoli con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ (quindi $x_1 = x_3$ e $y_1 = y_3$), e facciamo una loro generica combinazione lineare con coefficienti α e β:
$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$
Ora, dato che $x_1 = x_3$ e $y_1 = y_3$, evidentemente la prima e la terza componente sono uguali. Quindi $\alpha x + \beta y$ sta in $\mathbb{S}_5$ e allora $\mathbb{S}_5$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Per trovare una base di $\mathbb{S}_5$ si fa così: gli elementi di $\mathbb{S}_5$ sono del tipo (t, z, t), con $t, z \in \mathbb{R}$ (questi sono tutti i vettori che hanno prima e terza componente uguali). Possiamo scrivere tali vettori nella forma
$$(t, z, t) = t(1, 0, 1) + z(0, 1, 0).$$
Questo prova che $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ sono generatori di $\mathbb{S}_5$. È immediato capire che i due vettori sono l.i. Quindi essi formano una base di $\mathbb{S}_5$. La scrittura corretta è: una base di $\mathbb{S}_5$ è $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

(f) $\mathbb{S}_6$ non è invece un sottospazio. Non contiene l'origine.

Oppure, con la definizione,
$$(1,0,0) \in \mathbb{S}_6 \quad \text{e} \quad (0,0,-1) \in \mathbb{S}_6,$$
ma la loro somma $(1,0,-1)$ non sta in $\mathbb{S}_6$. O anche osservando che
$$(1,0,0) \in \mathbb{S}_6 \quad \text{ma} \quad 2(1,0,0) = (2,0,0) \notin \mathbb{S}_6.$$

Esercizio 5.1

Si ha
$$\langle \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2 \rangle = \langle (1,0,-1), (1,-1,1) \rangle = 1 - 1 = 0.$$
La norma euclidea (che coincide con la norma 2) di un vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è data da $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Quindi si ha
$$\|\boldsymbol{v}^1\|_2 = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{v}^2\|_2 = \sqrt{3}.$$
La norma 1 è invece data da $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, e quindi
$$\|\boldsymbol{v}^1\|_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{v}^2\|_1 = 3.$$
La norma 3 è data da $\|\boldsymbol{x}\|_3 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^3\right)^{1/3}$, e quindi
$$\|\boldsymbol{v}^1\|_3 = \sqrt[3]{2} \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{v}^2\|_3 = \sqrt[3]{3}.$$
Infine la norma ∞ è data da $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, e quindi
$$\|\boldsymbol{v}^1\|_\infty = 1 \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{v}^2\|_\infty = 1.$$

Esercizio 5.2

Basta *normalizzare* il vettore $\boldsymbol{v}$, cioè dividere $\boldsymbol{v}$ per la sua norma (usiamo quella euclidea). Si ha $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{5}$ e quindi un vettore di norma 1 che genera lo stesso sottospazio di $\boldsymbol{v}$ è ad esempio $u = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Esercizio 5.3

Anche qui basta normalizzare i due vettori: si ha

$$\boldsymbol{u}^1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}^1\|}\boldsymbol{v}^1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

e

$$\boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}^2\|}\boldsymbol{v}^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Esercizio 5.4

Dobbiamo verificare che $\boldsymbol{x}^1$ e $\boldsymbol{x}^2$ sono ortogonali e di norma 1. Si ha

$$\|\boldsymbol{x}^1\| = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1 \quad , \quad \|\boldsymbol{x}^2\| = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1.$$

Inoltre il prodotto interno $\langle \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$.
Possiamo quindi affermare che i due vettori sono ortonormali.

Esercizio 5.5

Verifichiamo che $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3$ sono ortonormali, cioè sono di norma 1 e a due a due ortogonali. Si ha

$$\|\boldsymbol{x}^1\| = \sqrt{1/2 + 1/6 + 1/3} = 1 \quad , \quad \|\boldsymbol{x}^2\| = \sqrt{1/2 + 1/6 + 1/3} = 1 \quad , \quad \|\boldsymbol{x}^2\| = \sqrt{2/3 + 1/3} = 1.$$

Calcoliamo ora i prodotti interni a due a due:

$$\langle \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \rangle = -1/2 + 1/6 + 1/3 = 0 \quad , \quad \langle \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^3 \rangle = 1/3 - 1/3 = 0 \quad , \quad \langle \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3 \rangle = 1/3 - 1/3 = 0.$$

Possiamo quindi affermare che i tre vettori sono ortonormali.