III-3 Determinante e rango

Indice

1 Determinante di una matrice

Veniamo ora alla definizione di determinante di una matrice quadrata.

Quella che presento è una definizione *ricorsiva*. Per avere un esempio (più semplice) di definizione ricorsiva, lo studente consideri quanto segue.

Il *fattoriale* di un numero naturale $n \geq 1$ si può definire in modo diretto come

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Allo stesso risultato si perviene però anche definendo

$$\begin{array}{rrcl} & 0! & = & 1 \\ \text{e} & n! & = & n(n-1)! \quad , \text{ per } n \geq 1. \end{array}$$

Questa è una definizione ricorsiva, in quanto nel definire il fattoriale di n si utilizza il fattoriale di $n-1$, che ancora non è stato definito. La definizione non avrebbe senso se non ci fosse quella che si chiama la base della definizione ricorsiva, e cioè in questo caso la definizione di $0!$.

La definizione ricorsiva di determinante di una matrice quadrata, che ora presento, procede in modo analogo, definendo il determinante di una matrice di ordine n in funzione del determinante di una matrice di ordine $n-1$.

Sono necessarie alcune definizioni preliminari.

Definizione Se A è una matrice qualunque (anche non quadrata), si chiama *sottomatrice* di A una qualunque matrice che si ottiene da A eliminando alcune righe e alcune colonne.

Esempio Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

una sottomatrice di A è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{, ottenuta eliminando la seconda e la terza colonna.}$$

Un'altra sottomatrice di A è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{, ottenuta eliminando la terza riga e la prima e terza colonna.}$$

Osservazione Si noti che le sottomatrici possono essere formate quindi da elementi non adiacenti nella matrice originaria. Inoltre le sottomatrici di una matrice data possono essere quadrate oppure no. È evidente che, per ottenere una sottomatrice quadrata da una matrice che non lo è, dovrò eliminare un numero di righe diverso dal numero di colonne, mentre le sottomatrici quadrate di una matrice quadrata si ottengono eliminando un numero di righe uguale al numero di colonne. Una sottomatrice quadrata $k \times k$ si dice una sottomatrice quadrata di ordine k.

Sono necessarie ora altre due definizioni preliminari, nelle quali procediamo come se sapessimo già che cosa è il determinante di una matrice quadrata.

Definizione Se A è una matrice quadrata e se a_{ij} è il suo elemento di posto (i,j), si definisce **minore complementare** di a_{ij} il numero

$$M_{ij} = \text{ determinante della sottomatrice di } A \text{ ottenuta eliminando la } i\text{-esima riga e la } j\text{-esima colonna.}$$

È ovvio che, se la matrice A è di ordine n, allora la sottomatrice di cui si parla nella definizione di minore complementare è una sottomatrice quadrata di ordine $n-1$. Faccio esplicitamente notare che il minore complementare di a_{ij} non dipende dal valore di a_{ij}. [1]

Definizione Sempre se A è una matrice quadrata e se a_{ij} è il suo elemento di posto (i,j), si definisce **complemento algebrico** di a_{ij} il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Dato che la quantità $(-1)^{i+j}$ vale o $+1$ oppure -1, a seconda che l'esponente sia pari o dispari, in pratica il complemento algebrico di a_{ij} coincide col suo minore complementare se la somma degli indici di riga e di colonna è pari, ed è invece l'opposto del minore complementare se tale somma è dispari.

Inizia ora la definizione ricorsiva di determinante. Parliamo sempre di matrici *quadrate*.
Sia dunque A una matrice quadrata di ordine n.

- ▷ Se $n = 1$, allora il determinante di A è per definizione l'unico elemento che la costituisce (un numero reale).[2]
- ▷ Se invece $n > 1$,

  Definizione Si definisce **determinante** di A il numero reale

  $$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}.$$

  Il determinante di una matrice di ordine n viene quindi definito attraverso i determinanti di matrici di ordine $n-1$ (quelli che figurano nei complementi algebrici). La definizione, a parole, potrebbe quindi essere: *il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della prima riga per i rispettivi complementi algebrici.*

Esempi Vediamo qualche esempio. Per le matrici di ordine 1 il calcolo del determinante non crea problemi. Consideriamo una generica matrice quadrata di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} M_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Abbiamo allora una comoda regola per il calcolo del determinante di tutte le matrici quadrate *di ordine* 2. Ad esempio, il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Consideriamo ora una generica matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

[1] Il motivo dovrebbe essere chiaro: per trovare il minore complementare di a_{ij} si eliminano la i-esima riga e la j-esima colonna e quindi si elimina l'elemento a_{ij}.
[2] Questa è la base della definizione ricorsiva di determinante.

Procedendo con la definizione abbiamo

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\
&= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} M_{13} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

La formula che risulta non è evidentemente così semplice da ricordare.[3] Esiste anche un metodo pratico che aiuta a ricostruire la formula, e che si chiama *regola di Sarrus*: si affiancano alla matrice data nuovamente la prima e la seconda colonna, ottenendo così la seguente matrice 3×5:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Ora basta sommare i prodotti degli elementi che figurano nelle diagonali indicate dalle frecce che puntano a SE ($\searrow$) e sottrarre i prodotti degli elementi delle diagonali indicate dalle frecce che puntano a SO ($\swarrow$). Si vede facilmente che il risultato è esattamente la sequenza di fattori trovati poco fa con la definizione, con i segni corretti.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Consideriamo ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con la definizione di determinante otteniamo

$$\begin{aligned}
\det A &= 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 1 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + 2 \cdot (-1)^{1+3} M_{13} \\
&= M_{11} - M_{12} + 2M_{13} \\
&= -1 - 1 + 4 = 2.
\end{aligned}$$

Con la regola di Sarrus, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\det A = (-1 + 0 + 4) - (0 + 0 + 1) = 2.$$

Attenzione: la regola di Sarrus vale *solo* per le matrici di ordine 3. Non c'è una regola analoga per matrici di ordine maggiore di 3.

Consideriamo, a titolo di esempio conclusivo, una matrice quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta, con la definizione,

$$\begin{aligned}
\det A &= 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14} \\
&= M_{11} - M_{13} - M_{14}.
\end{aligned}$$

Procedendo ora sulle sottomatrici di ordine 3 abbiamo

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2\ ; \\
M_{13} &= 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = 0\ ; \\
M_{14} &= 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 0
\end{aligned}$$

[3] In questo caso è certamente più semplice ricordare il metodo che porta a questa formula, più che la formula stessa.

e quindi $\det A = 2 - 0 - 0 = 2$.

Osservazione Nella definizione di determinante, cioè nella formula

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$

i calcoli sono svolti con riferimento alla prima riga: abbiamo detto infatti che si tratta della somma dei prodotti degli elementi della prima riga di A per i rispettivi complementi algebrici.

Si può dimostrare però un risultato interessante e per nulla prevedibile secondo il quale, se noi effettuiamo lo stesso tipo di calcolo con riferimento ad una *qualunque riga* o *qualunque colonna*, il risultato è sempre lo stesso.

In altre parole, se fissiamo una qualunque riga (o colonna) e facciamo la somma dei prodotti degli elementi di quella riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici, otteniamo sempre $\det A$. Quindi possiamo dire che

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (\text{per qualunque } i = 1, \ldots, n)\\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{per qualunque } j = 1, \ldots, n).\end{aligned}$$

Questo risultato va sotto il nome di *primo teorema di Laplace*.

Rispetto a quale riga o colonna calcolare il determinante di una matrice è quindi a questo punto una scelta di convenienza. Ovviamente conviene operare rispetto alla riga o colonna che contiene il maggior numero di zeri.

Osservazione Si può dimostrare facilmente che il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi che stanno sulla diagonale principale. Si consideri una generica matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sviluppando rispetto alla prima riga si ottiene

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \cdot A_{11} \qquad (\text{gli altri sono nulli})\\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot A'_{22} \qquad (\text{gli altri sono nulli})\ [4]\\ &= \ldots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.\end{aligned}$$

Elenco qui di seguito alcune tra le principali **proprietà del determinante**.

Siano $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n$ vettori colonna di $\mathbb{R}^n$. [5] Indico con A la matrice che si ottiene affiancando tali vettori. Valgono le proprietà:

1. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ (si ricordi che moltiplicare per α la matrice vuol dire moltiplicare per α tutti i suoi elementi).
2. Il determinante è nullo se la matrice ha una riga (o una colonna) nulla: la cosa è ovvia se si pensa di calcolare il determinante rispetto a quella riga (o colonna).
3. Scambiando tra loro due righe (o due colonne) il determinante cambia segno.
4. Il determinante è nullo se vi sono due righe (o due colonne) uguali: immediata conseguenza della precedente.
5. Il determinante non cambia se si aggiunge ad una riga un'altra riga moltiplicata per una costante (lo stesso con le colonne).
6. Il determinante è nullo se le righe (o le colonne) sono vettori linearmente dipendenti.

Osservazione Faccio notare che i punti 2,4 e 6 forniscono condizioni sufficienti per l'annullarsi del determinante. Si può dimostrare che solo la condizione espressa al punto 6 è anche necessaria, e ovviamente raccoglie in sé le altre come casi particolari.[6]

[4] Indico con A'_{22} il complemento algebrico dell'elemento di posto $(2, 2)$ della matrice che si è ottenuta da A dopo aver eliminato la prima riga e la prima colonna.

[5] Lo stesso se si trattasse di vettori riga.

[6] Questo significa che: se la matrice ha una riga o una colonna nulla, allora ha determinante nullo, ma non è detto che se il determinante è nullo ci sia necessariamente una riga o colonna nulla. Lo stesso con la 4: se la matrice ha due righe uguali, allora ha determinante nullo, ma se il determinante è nullo non è detto che ci siano due righe uguali.
Invece per la 6 il discorso è diverso: se le righe (o colonne) sono l.d., allora il determinante è nullo e se il determinante è nullo, allora le righe (e le colonne) sono linearmente dipendenti.

Osservazione La proprietà 5 può risultare molto utile nel calcolo del determinante. Le operazioni di cui si parla in questa proprietà (ad esempio aggiungere ad una riga un'altra riga moltiplicata per una costante) si chiamano *operazioni elementari*. Nel calcolo del determinante di una matrice di ordine elevato (pensiamo ad esempio ad una matrice del quarto ordine) può essere utile l'applicazione di un certo numero di operazioni elementari: queste, lasciando inalterato il determinante, possono annullare alcuni elementi della matrice. Una volta che un po' di elementi sono diventati zero, si può procedere al calcolo del determinante con la definizione. Vediamo il tutto in un paio di esempi.

Prendiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

già considerata prima. La definizione di determinante porta a sviluppare i calcoli rispetto alla prima riga, ma già il farlo rispetto alla terza riga (o anche seconda o terza colonna) porta dei vantaggi. Ma possiamo anche effettuare prima un'operazione elementare per introdurre nuovi zeri: ad esempio possiamo annullare l'elemento di posto $(3, 4)$, togliendo alla quarta colonna la terza (o sommando alla quarta colonna la terza moltiplicata per -1, che è lo stesso).[7] Si ottiene la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha lo stesso determinante di A. Possiamo ora calcolare il determinante rispetto alla terza riga, e dobbiamo calcolare solo un determinante del terzo ordine. Si ottiene

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora per esercizio possiamo utilizzare ancora operazioni elementari. Possiamo annullare l'elemento di posto $(1, 3)$. Attenzione però: nell'annullare un elemento dobbiamo fare in modo che gli elementi già nulli restino tali; quindi per annullare il 2 in alto a destra non aggiungeremo alla prima riga il doppio della seconda, ma ad esempio toglieremo alla terza colonna il doppio della prima. Otteniamo quindi

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Vediamo un altro esempio. Consideriamo la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo annullare gli elementi della prima colonna a partire dal secondo. L'elemento di posto $(1, 1)$ è nullo e conviene allora procedere così: scambiare la prima con la seconda riga (il determinante cambia segno per la proprietà 3) e annullare gli elementi non nulli della prima colonna con operazioni elementari. Si ha

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ [8]

Ora sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[7] Attenzione. Colonne con colonne e righe con righe. Se sommiamo ad una colonna una riga moltiplicata per una costante, il determinante può cambiare.

[8] Per annullare a_{31} ho tolto la prima riga alla terza; per annullare a_{41} ho tolto la prima riga alla quarta.

Posso annullare l'elemento di posto $(1,3)$, sommando alla prima riga la terza e ottengo

$$\det A = -\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = (-1)(-1)(-3) = -3.$$ [9]

Da ricordare il seguente importante risultato:

Teorema (di Binet) Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, vale l'uguaglianza

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Osservazione Si noti che, come visto, le matrici AB e BA possono essere diverse ma, per il teorema di Binet, esse hanno lo stesso determinante.

Esercizio 1.1 Data la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$ si calcolino i complementi algebrici di a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{32}.

Esercizio 1.2 Si calcolino, con la definizione, i determinanti delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.3 Si verifichi il teorema di Binet con le matrici

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.4 Si calcoli nuovamente il determinante di A_3 con operazioni elementari: si annullino gli elementi della prima colonna a partire dal secondo.

2 Calcolo della matrice inversa

Torniamo a parlare ora di matrice inversa. Abbiamo già visto in precedenza che cosa significa che una matrice è invertibile. Non abbiamo ancora però a disposizione un procedimento di calcolo che consenta di dire se una matrice è invertibile e di calcolare la matrice inversa.

Un metodo generale, ma di non facile applicazione se l'ordine della matrice è maggiore di 2, è quello che vediamo ora su questo esempio.

Esempio Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Cerchiamo una matrice $B = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ tale che $AB = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Si ottiene

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\\ 2x+z & 2y+t\end{pmatrix},$$

[9] Per il calcolo del determinante ho sviluppato rispetto alla terza colonna, quindi il primo -1 è quello davanti al determinante. il secondo -1 è l'elemento di posto $(3,3)$ della matrice e infine il -3 è il determinante della sottomatrice 2×2 che si ottiene eliminando la terza riga e la terza colonna.

pertanto deve essere[10] $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e si vede subito che anche $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto A è invertibile e B è la sua matrice inversa. Si intuisce facilmente che questo metodo per trovare la matrice inversa diventa molto pesante al crescere dell'ordine della matrice. Già con una matrice 3×3 richiede la soluzione di un sistema di 9 equazioni in 9 incognite.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Procedendo come prima, calcoliamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -x + z & -y + t \end{pmatrix}.$$

È evidente che la matrice a secondo membro non può essere la matrice identità per nessun valore delle incognite.[11] In questo caso la matrice A non è invertibile. Si osservi che la matrice che risultava prima invertibile ha determinante 1 e quest'ultima invece ha determinante 0.

Ecco ora il risultato fondamentale.

Teorema Una matrice A è invertibile se e solo se il suo determinante non è zero.

Osservazione La dimostrazione di questo teorema consentirebbe di dare giustificazione al metodo, che ora viene indicato, per il calcolo della matrice inversa, quando questa esiste. Detta A la matrice di cui vogliamo trovare l'inversa, consiglio allo studente di seguire questi passi successivi: dopo aver verificato che il determinante di A non si annulla,

1. Costruire la matrice dei complementi algebrici di A, cioè la matrice che ha per elemento di posto (i, j) il complemento algebrico di a_{ij} (che abbiamo indicato con A_{ij} nella definizione di determinante).[12]

2. Scrivere la trasposta della matrice dei complementi algebrici (viene detta *matrice aggiunta di A* e indicata di solito con $A^\star$).

3. Dividere la matrice aggiunta per il determinante di A.

Pertanto, se A è invertibile, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^\star.$$

Esempi

Vediamo un paio di esempi di calcolo della matrice inversa.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

è invertibile in quanto $\det A = -2$. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad A^\star = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa è quindi

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Per verificare la correttezza del risultato si può moltiplicare questa matrice per la matrice iniziale e constatare che il prodotto è la matrice identità I_2.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[10] Uguagliando la matrice AB con la matrice identità, x deve essere 1, y deve essere 0 e sostituendo nelle altre si ricava che deve essere $z = -2$ e $t = 1$.

[11] Si noti che nella matrice prodotto che abbiamo ottenuto gli elementi della prima colonna sono opposti e questo non è vero nella matrice identità.

[12] Ricordo che $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, dove M_{ij} è il minore complementare di a_{ij}.

Essa è invertibile dato che $\det A = -1$. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{che, essendo simmetrica, coincide con} \quad A^{\star} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Lo studente è invitato a verificare che i prodotti $A \cdot A^{-1}$ e $A^{-1} \cdot A$ sono entrambi uguali alla matrice identità I_3.

Definizione Si dicono *singolari* le matrici con determinante nullo (e quindi non invertibili). Quelle invertibili si dicono anche *non singolari*.

Esercizio 2.1 Si stabilisca se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, se ne calcoli la matrice inversa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Calcolo del rango

Abbiamo visto in precedenza che il rango rA di una matrice $m \times n$ A è il rango della trasformazione lineare che A rappresenta (cioè la dimensione dell'immagine di questa) e che questo coincide con il massimo numero di colonne (o righe) l.i. di A. Ricordando che in uno spazio non ci possono essere più vettori l.i. di quella che è la dimensione dello spazio, si ha subito che risulta sempre

$$0 \le rA \le \min\{m, n\}. \text{ [13]}$$

Osservazione La definizione di rango non ha carattere "operativo", cioè non suggerisce come si possa determinare il rango nei casi concreti, a meno che non si trovi un modo "operativo" per decidere se dei vettori assegnati sono o non sono linearmente indipendenti.

Esiste un tale metodo operativo e mi limito ad enunciare il risultato teorico sul quale tale metodo si fonda.

Anzitutto diamo la seguente

Definizione Sia A una matrice $m \times n$. Si chiamano *minori di A di ordine k* i determinanti delle sottomatrici quadrate di A di ordine k.

Esempio Consideriamo ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trattandosi di una matrice 3×4, essa ha minori di ordine 1, 2 e 3. I suoi minori di ordine 1 sono: 0, 1, -1, 2 e -2 (ci sono 12 sottomatrici quadrate di ordine 1, ma i determinanti sono soltanto questi).

Ci sono 18 sottomatrici quadrate di ordine 2; un minore di ordine 2 è ad esempio 1, dato che è il determinante della sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si ottiene eliminando la terza riga e la terza e quarta colonna. Un altro minore di ordine 2 è -2, dato che è il determinante della sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che si ottiene eliminando la seconda riga e la prima e terza colonna.

[13] L'unico caso in cui può risultare $rA = 0$ è quando si tratta della matrice nulla, quindi tipicamente sarà $1 \le rA \le \min\{m, n\}$.

Infine ci sono 4 sottomatrici quadrate di ordine 3; un minore di ordine 3 è ad esempio 0, dato che è il determinante della sottomatrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che si ottiene eliminando la seconda colonna. Si verifichi che nella matrice A tutti i minori di ordine 3 sono nulli.

Osservazione Non si confonda il minore con la sottomatrice. Il minore è un numero e non una sottomatrice. L'ordine di ogni minore di una matrice A di m righe ed n colonne (con $m, n \geq 1$) è sicuramente (un numero naturale) compreso tra 1 e il minimo tra m ed n.

Vale ora il seguente risultato:

Teorema Sia A una matrice $m \times n$. La matrice A ha rango k se e solo se esiste almeno un minore di A di ordine k diverso da zero e tutti i minori di A di ordine $k + 1$, se ci sono, hanno valore zero.

Esempio Con una matrice 3×4 avremo che il rango è 2 se e solo se la matrice ha un minore di ordine 2 diverso da zero e tutti i minori di ordine 3 sono invece nulli.

Per quanto riguarda l'indipendenza dei vettori fornisco quest'altro risultato generale:

Teorema Dati i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$, sia V la matrice che si ottiene disponendo tali vettori in colonna (o in riga, è lo stesso). I vettori sono indipendenti se e solo se la matrice V ha rango k.

Osservazione Quindi i k vettori sono l.i. se e solo se il rango di questa matrice è uguale al numero dei vettori che abbiamo considerato. Questo teorema fornisce un metodo operativo per stabilire se dei vettori dati sono l.i. oppure no: tutto è ricondotto al calcolo del rango della matrice costruita con i vettori dati.

Osservazione Dal teorema segue immediatamente un fatto già noto, che cioè, dati i vettori $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$, se $k > n$, allora i vettori sono sicuramente linearmente dipendenti. Infatti la matrice V ha certamente rango minore o uguale a n e quindi il rango non può essere k. Analogamente possiamo dire che nella matrice V non può esserci un minore di ordine k in quanto, come già osservato, l'ordine dei minori di V non può superare il minimo tra n e k, che in questo caso è certamente n.

Valendo il risultato del teorema che stabilisce il legame tra il rango e i minori della matrice, si può dire allora che il rango di una matrice coincide col *massimo ordine dei suoi minori non nulli* oppure, equivalentemente, col massimo ordine delle sue sottomatrici quadrate non singolari.

In molti testi lo studente può trovare quest'ultima quale definizione di rango di una matrice.

Vediamo ora un paio di esempi. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

È evidente che A ha sottomatrici quadrate di ordine 1 e 2. Le sottomatrici di ordine 1 sono 6 e i minori di ordine 1 sono: $2, -2, 0, -1, 1$.

Le sottomatrici di ordine 2 sono 3 e i minori di ordine 2 sono: $0, 2, -2$. Il rango di A è quindi 2.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha invece rango 1, dato che tutti i suoi minori di ordine 2 sono nulli.

Osservazione È chiaro che in generale non serve trovare tutti i minori della matrice per stabilire qual è il rango. Se ne trovo uno di ordine k diverso da zero, non serve trovare gli altri minori di ordine k o quelli di ordine minore di k, dato che il rango è sicuramente *almeno* k. Occorrerà invece considerare quelli di ordine maggiore di k, sempre che ce ne siano.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

può avere al più rango 3. Dato che la terza colonna è nulla, ogni sottomatrice di ordine 3 che contiene la terza colonna ha sicuramente determinante nullo. L'unica sottomatrice di ordine 3 non singolare può essere quella che non contiene la terza colonna. Tale sottomatrice ha determinante uguale a -1. Quindi il rango di A è 3.

Ancora, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

presa come esempio poco fa per il calcolo di alcuni minori, ha almeno rango 2 (ad esempio, il primo minore di ordine 2 in alto a sinistra vale 1). Ora si può osservare che la terza colonna è la somma delle prime due e che la quarta colonna è la differenza delle prime due. Questo ci permette di dire che certamente tutti i minori di ordine 3 sono nulli (lo studente lo verifichi con il calcolo diretto). Pertanto il rango, non potendo essere 3, è 2.

Osservazione Si dice che una matrice $m \times n$ A ha *rango massimo* (o *rango pieno*) se risulta $rA = \min\{m, n\}$. Se la matrice è quadrata di ordine n, essa ha un solo minore di ordine n, che coincide col $\det A$. Allora una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se il suo determinante non è zero, il che equivale al fatto che le righe (e le colonne) sono indipendenti, oppure al fatto che la matrice è invertibile.

Lo studente presti attenzione al fatto che è falso affermare in generale che in una matrice a rango pieno sono linearmente indipendenti sia le righe sia le colonne, a meno che la matrice non sia quadrata.

Osservazione Sia A una matrice $m \times n$. Per riassumere, possiamo affermare che, affinché il rango di A sia k, è necessario e sufficiente che valgano le seguenti due proprietà:

1. esiste un minore non nullo di A di ordine k;
2. non esistono minori di A di ordine $k + 1$ oppure, se ne esistono, sono tutti nulli.[14]

Relativamente al punto 2, è evidente che esistono minori di ordine $k + 1$ se e solo se $k < \min\{m, n\}$.

Esempio Talvolta la matrice può dipendere da uno (o più) parametri reali. In questi casi è ovvio che il rango della matrice dipende anch'esso dai valori che si attribuiscono ai parametri.

Consideriamo ad esempio la matrice

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & -1 \\ 1 & 2 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

A priori (cioè per il solo fatto che la matrice è 3×4) possiamo dire che i valori possibili del rango della matrice sono 1, 2 o 3.

Da un esame un po' più dettagliato risulta che rA è almeno 2, qualunque sia il valore di x. Esiste infatti, qualunque sia x, almeno un minore non nullo di ordine 2 (ad esempio quale?).

Ora vediamo se ci sono valori di x per cui il rango è 3, oppure no. Consideriamo un minore di ordine 3. In questi casi occorre un po' di scaltrezza. Un minore di una matrice che dipende da un parametro x è un polinomio nella variabile x. Anche se in generale non è vero che "il numero di x" presenti nella sottomatrice coincida con il grado del polinomio, è comunque bene fare in modo che non ci siano troppe x nella sottomatrice che vado a scegliere.

Quindi la scaltrezza consiste nello scegliere, possibilmente, una sottomatrice che contenga "tanti zeri e poche x".

La cosa è particolarmente apprezzabile nell'esempio che stiamo considerando. Se scegliamo la sottomatrice di ordine 3 costituita dalle prime 3 colonne di A, il minore corrispondente è

$$x \cdot x^2 + 1 \cdot (-2 - x) = x^3 - x - 2.$$

Possiamo dire che esiste certamente almeno uno zero reale di questo polinomio[15], ma non siamo in grado di trovarlo in quanto il polinomio non si fattorizza in polinomi di grado inferiore a coefficienti razionali.

Se scegliamo invece la sottomatrice costituita dalle ultime 3 colonne, il minore corrispondente è

$$-1 \cdot (x + 2) + 1 \cdot x^2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$$

Possiamo ora affermare che, se $x \neq -1$ e $x \neq 2$, il rango è 3, poiché per tali valori di x questo minore di ordine 3 è non nullo.

Ci restano da studiare due casi: $x = -1$ e $x = 2$.

Lo studente stia attento a non cadere nella tentazione di affermare che per tali valori di x il rango è sicuramente 2: prima di arrivare a questa conclusione occorre esaminare i minori di ordine 3 non ancora considerati. Di solito conviene sostituire i valori del parametro x nella matrice (cioè scrivere le matrici A_{-1} e A_2 nel nostro caso) e poi calcolare altri minori non ancora esaminati (nel nostro caso ce ne sono tre oltre a quello già considerato): se ne troviamo uno non nullo, possiamo concludere che il rango è 3; il rango è invece 2 se tutti e tre i minori di ordine 3 sono nulli.

[14] Si noti che, se i minori di ordine $k + 1$ sono tutti nulli ed esistono minori di ordine $> k + 1$, allora questi sono certamente tutti nulli.

[15] Lo possiamo affermare in base al teorema degli zeri, applicato ad esempio nell'intervallo $[0, 2]$, dato che in esso il polinomio assume valori opposti agli estremi.

Nel nostro caso, dato che il minore relativo alla sottomatrice formata dalle prime tre colonne risulta essere il polinomio $P(x) = x^3 - x - 2$, possiamo intanto calcolare tale polinomio per i valori $x = -1$ e $x = 2$. Risulta $P(-1) = -2$ e $P(2) = 4$. Entrambi i valori sono non nulli e quindi il rango è 3 anche per $x = -1$ e $x = 2$. Pertanto concludiamo che il rango di A_x è 3 qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.

Consideriamo ora la matrice

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -1 \\ 1 & 2 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo subito affermare che il rango di A è almeno 2 in quanto il determinante della sottomatrice di ordine 2 formata da 2ª e 3ª riga e 2ª e 3ª colonna è non nullo qualunque sia x (il minore è $x^2 + 2$).

Poi, con procedimento analogo a quello usato nell'esempio precedente, il minore relativo alla sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne è

$$-1 \cdot (x + 2) + 1 \cdot (x^2 + 2) = x^2 - x = x(x - 1).$$

Possiamo dire allora che, se $x \neq 0$ e $x \neq 1$, il rango è 3.

Se $x = 0$ oppure se $x = 1$ si ottengono rispettivamente le due matrici

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_0 è 3 in quanto la sottomatrice formata dalle prime tre colonne è non singolare.

Il rango di A_1 è invece 2. Si può infatti osservare che ci sono tre colonne uguali. Pertanto ogni sottomatrice quadrata di ordine 3 è singolare, avendo sicuramente almeno due colonne uguali. In conclusione quindi $rA_x = 2$ per $x = 1$ e $rA_x = 3$ per ogni $x \neq 1$.

Esercizio 3.1 Si calcoli il rango delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.2 Dati i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (2, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, 1),$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti (non si utilizzi la definizione ma i risultati legati al rango di un'opportuna matrice). Si stabilisca poi la dimensione del sottospazio da essi generato in $\mathbb{R}^2$. Si indichi infine una base di tale sottospazio.

Esercizio 3.3 Dati i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (-1, 2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, -2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (-2, 4),$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti (come prima non si utilizzi la definizione ma i risultati legati al rango). Si stabilisca poi la dimensione del sottospazio da essi generato in $\mathbb{R}^2$. Si indichi infine una base di tale sottospazio.

Esercizio 3.4 Dati i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1, 0, -1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (1, 1, 0) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (-1, 0, 1),$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti (non si utilizzi la definizione ma i risultati legati al rango di un'opportuna matrice). Si stabilisca poi la dimensione del sottospazio da essi generato in $\mathbb{R}^3$. Si indichi infine una base di tale sottospazio.

Esercizio 3.5 Dati i vettori

$$\boldsymbol{v}^1 = (1,2,-1) \quad , \quad \boldsymbol{v}^2 = (3,-1,2) \quad , \quad \boldsymbol{v}^3 = (-2,3,-3) \quad , \quad \boldsymbol{v}^4 = (4,1,1),$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti (come prima, non si utilizzi la definizione ma i risultati legati al rango). Si stabilisca poi la dimensione del sottospazio da essi generato in $\mathbb{R}^3$. Si indichi infine una base di tale sottospazio.

Esercizio 3.6 Si studi, al variare del relativo parametro in $\mathbb{R}$, il rango delle matrici

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & x & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad A_y = \begin{pmatrix} y & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2y \end{pmatrix} \quad , \quad A_z = \begin{pmatrix} -1 & z & -1 \\ z & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & t \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_u = \begin{pmatrix} 1 & u & 2 & 0 \\ u & 2 & 3 & -u \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Indicando come sempre con A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} e con M_{ij} il relativo minore complementare, si ha

$$A_{11} = M_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = 45 - 48 = -3.$$

Poi

$$\begin{aligned} A_{12} &= -M_{12} = -\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = -(36-42) = 6 \\ A_{22} &= M_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = 9 - 21 = -12 \\ A_{32} &= -M_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = -(6-12) = 6. \end{aligned}$$

Esercizio 1.2

La definizione prevede di calcolare il determinante sviluppando i calcoli rispetto alla prima riga. Quindi abbiamo

$$\det A_1 = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 5 + 6 = 11.$$

Poi

$$\det A_2 = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -3 - 2(-6) + 3(-3) = 0.$$

Infine

$$\det A_3 = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -5 - 5 + 10 = 0.$$

Esercizio 1.3

Si tratta di verificare che si ha $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

$$\det A = -2 \quad , \quad \det B = -10 \quad , \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\det A \cdot \det B = 20 \quad \text{e} \quad \det(AB) = 130 - 110 = 20.$$

Esercizio 1.4

L'elemento di posto $(1,1)$ è nullo e quindi dobbiamo intanto scambiare le prime due righe, ricordando che così facendo il determinate cambia segno. Quindi

$$\det A_3 = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora possiamo annullare gli elementi di posto $(3,1)$ e $(4,1)$ con operazioni elementari sulle righe. In particolare per annullare il primo possiamo togliere alla terza riga la prima moltiplicata per $1/2$; per annullare il secondo possiamo aggiungere alla quarta riga la prima moltiplicata per $1/2$. Si ottiene quindi

$$\det A_3 = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 & -3/2 \\ 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ora, sviluppando rispetto alla prima colonna, si ha

$$\det A_3 = -2\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ancora con operazioni elementari possiamo annullare il secondo e il terzo elemento della prima riga (rispettivamente aggiungendo alla seconda colonna la prima e togliendo alla terza colonna la prima moltiplicata per 2). Si ottiene

$$\det A_3 = -2\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & -5/2 \\ 3/2 & 5/2 & -5/2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(sviluppando rispetto alla prima riga).}$$

Esercizio 2.1

Consideriamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice è invertibile, dato che il suo determinante non si annulla ($\det A_1 = -2$). Allora possiamo calcolare la matrice inversa A_1^{-1}. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad A_1^\star = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è allora

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} A_1^\star = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Si ha infatti, a verifica di questo,

$$A_1 A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Risulta $\det A_2 = 24$ e quindi A_2 è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & -12 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad A_2^\star = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -5 \\ -12 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è allora

$$A_2^{-1} = \frac{1}{\det A_2} A_2^\star = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -5 \\ -12 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & -5/24 \\ -1/2 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo infine

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che A_3 è una matrice simmetrica. Risulta $\det A_3 = -1$ e quindi A_3 è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è[16]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$ La matrice aggiunta è la stessa, dato che anche questa è simmetrica.

La matrice inversa è allora

$$A_3^{-1} = \frac{1}{\det A_3} A_3^\star = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.1

(a) $\det A_1 = 0$, quindi il rango è 1.

(b) $\det A_2 = 0$ (lo abbiamo calcolato in un esercizio precedente). Pertanto il rango di A_2 non è 3. Dato che esiste almeno un minore del secondo ordine diverso da zero (ad esempio quello che si ottiene con le prime due righe e le prime due colonne) risulta $rA_2 = 2$.

(c) Si potrebbe osservare che la seconda riga è il doppio della prima e che la terza è l'opposto della prima. Questo porta subito a dire che il rango è 1. Se uno non si accorge delle dipendenze, arriva comunque alla stessa conclusione calcolando prima il determinante, che è nullo. Quindi il rango non è massimo. Ora si passa ai minori del secondo ordine e si vede facilmente che sono tutti nulli. Pertanto si ha $rA_3 = 1$.

(d) La matrice A_4 può avere al più rango 2 (e ha evidentemente almeno rango 1). Il minore che si ottiene con le prime due colonne è nullo, ma quello che si ottiene con le ultime due colonne non lo è, e quindi si ha $rA_4 = 2$.

(e) Anche A_5 può avere al più rango 2 (e ha evidentemente almeno rango 1). Questa volta tutti e tre i minori del secondo ordine sono nulli e quindi $rA_5 = 1$. Si noti anche che le due righe sono proporzionali, cioè linearmente dipendenti.

(f) La matrice A_6 può avere al più rango 3 (e ha evidentemente almeno rango 1). Il minore del secondo ordine che si ottiene con le prime due righe e le prime due colonne è diverso da zero: questo dice che il rango è almeno 2 (quindi o è 2 o è 3). Se non si scoprono evidenti dipendenze tra le righe o colonne[17] occorre passare a considerare i minori del terzo ordine (e ce ne sono 4 al più da esaminare). Si trova che sono tutti nulli. Quindi $rA_6 = 2$.

(g) La matrice A_7 può avere al più rango 3 (e ha evidentemente almeno rango 1). Osservando che il minore del secondo ordine che si ottiene con le prime due righe e le prime due colonne è diverso da zero, si ha che il rango è almeno 2. Il minore del terzo ordine che si ottiene con le prime tre colonne è nullo. Questo non consente di concludere che il rango è 2: infatti il minore del terzo ordine che si ottiene con le ultime tre colonne è diverso da zero e quindi $rA_7 = 3$.

[16] Occorre un po' di pazienza nei calcoli dei complementi algebrici. Si sfruttino le proprietà del determinante: accade spesso che ci siano due righe o due colonne uguali o che ci sia una riga o colonna nulla.

[17] Qui in realtà è semplice accorgersi che la terza riga è somma delle prime due. Questo permette di concludere che il rango è 2.

Esercizio 3.2

Si tratta di due vettori in $\mathbb{R}^2$. Essi sono l.i. se e soltanto se il rango della matrice[18]

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è uguale a 2, cioè se e solo se il determinante di V è diverso da zero. Si ha $\det V = 3$ e quindi i due vettori sono linearmente indipendenti.
La dimensione del sottospazio da essi generato è uguale al rango di V e cioè 2.
Essi generano tutto $\mathbb{R}^2$ e ne costituiscono una base.

Esercizio 3.3

Si tratta di tre vettori in $\mathbb{R}^2$. Possiamo dire a priori che essi sono dipendenti, poiché sono in numero maggiore della dimensione dello spazio cui appartengono. Si può anche affermare che sono dipendenti in quanto il rango della matrice

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

non può essere 3.
La dimensione del sottospazio da essi generato è uguale al rango di V. Possiamo osservare che le due righe sono dipendenti (sono multiple una dell'altra). Quindi il rango di V non può essere 2, ma è certamente 1. Pertanto la dimensione del sottospazio generato da $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3$ è 1.
Una base di tale sottospazio è formata da uno qualunque dei tre vettori: ad esempio una base è $\{\boldsymbol{v}^1\}$ (anche $\{\boldsymbol{v}^2\}$ e $\{\boldsymbol{v}^3\}$ sono basi dello stesso sottospazio).

Esercizio 3.4

Per sapere se i tre vettori sono dipendenti o indipendenti possiamo calcolare il rango della matrice che si ottiene disponendo i vettori ad esempio in colonna: sia

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di V è zero. Pertanto i tre vettori sono dipendenti (si può osservare che $\boldsymbol{v}^3$ è l'opposto di $\boldsymbol{v}^1$).
La dimensione del sottospazio da essi generato coincide con il rango della matrice V. Il rango di V è chiaramente 2 (non può essere 3 in quanto il determinante si annulla), dato che ad esempio il primo minore di ordine 2 in alto a sinistra è diverso da zero. Quindi la dimensione del sottospazio generato da $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3$ è 2.
Una base di tale sottospazio è una qualunque coppia di vettori indipendenti scelti tra $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3$. Qui è importante ricordare che per sapere se dei vettori sono l.i. basta controllare che il rango della matrice formata con questi vettori sia uguale al numero dei vettori stessi. Ad esempio, se voglio sapere se $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2$ sono l.i. basta che il rango della matrice formata con $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2$ sia 2. Nel nostro caso il rango della sottomatrice di V formata dalle prime due colonne è appunto 2. Quindi $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2$ sono l.i. e quindi sono una base per quel sottospazio. Possiamo osservare che anche $\boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3$ sono una base del sottospazio, dato che anche il rango della sottomatrice formata dalla seconda e terza colonna è 2. Invece $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^3$ non sono una base del sottospazio, dato che sono l.d. Infatti il rango della sottomatrice di V formata dalla prima e terza colonna non è 2, ma 1 (tutti e tre i minori del secondo ordine di questa sottomatrice sono nulli).

Esercizio 3.5

Costruiamo una matrice disponendo i vettori ad esempio in colonna (è lo stesso anche se li disponiamo in riga):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora affrontiamo la prima questione, se cioè i vettori siano dipendenti o indipendenti. Qui non serve molto: i vettori sono certamente dipendenti in quanto sono quattro vettori in uno spazio ($\mathbb{R}^3$) di dimensione 3. Possiamo quindi affermare questo anche senza scoprire qualche particolare dipendenza tra le colonne di V (dipendenza che c'è sicuramente).
Chiamiamo ora per comodità S il sottospazio generato dai quattro vettori. Possiamo dire che la dimensione di S coincide con il rango della matrice V. È chiaro che tale dimensione non può essere più di 3. Potremmo calcolare il rango attraverso il calcolo dei minori di V. Oppure possiamo cercare di scoprire qualche particolare dipendenza nelle

[18] Dispongo i vettori in colonna ma sarebbe lo stesso disporli in riga.

colonne di V. Ad esempio possiamo osservare che la terza colonna è la differenza delle prime due (cioè $\boldsymbol{v}^3 = \boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2$). Ma si ha anche che la quarta colonna è la somma delle prime due ($\boldsymbol{v}^4 = \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2$). Allora il sottospazio generato da $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3, \boldsymbol{v}^4$ è lo stesso generato da soltanto $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2$. Dato che questi ultimi due sono l.i. (e qui lo possiamo dire semplicemente perché la sottomatrice formata da $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$ ha evidentemente rango 2) allora la dimensione di S è 2.[19] Dato che $\boldsymbol{v}^1$ e $\boldsymbol{v}^2$ sono l.i. e sono generatori di S, essi formano una base di S.

Esercizio 3.6

(a) Sia dunque $A_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & x & -4 \end{pmatrix}$. Evidentemente il rango di A_x è almeno 1 e al più 2, a seconda del valore del parametro x. Possiamo procedere così: consideriamo uno dei minori del secondo ordine, ad esempio il primo, cioè il

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & x \end{pmatrix} = x - 2.$$

Possiamo allora dire che, se $x \neq 2$, allora il rango è certamente 2, dato che c'è un minore del secondo ordine diverso da zero.

Per $x = 2$ non possiamo dire che il rango non è 2, ma dobbiamo considerare prima gli altri minori. Conviene allora sostituire $x = 2$ nella matrice:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver osservato che le righe sono chiaramente dipendenti, possiamo concludere che per $x = 2$ il rango è 1.

(b) Sia $A_y = \begin{pmatrix} y & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2y \end{pmatrix}$. Il rango di A_y è almeno 1 e al più 3, a seconda del valore del parametro y. Conviene iniziare dal calcolo del determinante. Si ha

$$\det A_y = \det \begin{pmatrix} y & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2y \end{pmatrix} = 2y^2 - y - 1 = (y-1)(2y+1).$$

Possiamo ora affermare che, se $y \neq 1$ e $y \neq -1/2$, il rango è 3. Restano poi da studiare i casi $y = 1$ e $y = -1/2$.

Con $y = 1$ abbiamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inutile calcolare il determinante, dato che è certamente nullo. C'è almeno un minore del secondo ordine diverso da zero (ad esempio quello che si ottiene con la sottomatrice in alto a sinistra) e quindi si ha $rA_1 = 2$.

Con $y = -1/2$ abbiamo

$$A_{-1/2} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso il rango è 2, dato che c'è almeno un minore del secondo ordine diverso da zero.

(c) Sia $A_z = \begin{pmatrix} -1 & z & -1 \\ z & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il rango di A_z è almeno 1 e al più 3, a seconda del valore del parametro z. Conviene iniziare dal calcolo del determinante. Si ha

$$\det A_z = \det \begin{pmatrix} -1 & z & -1 \\ z & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (z-1)^2.$$

Possiamo affermare che, se $z \neq 1$, il rango è 3. Resta poi da studiare il caso $z = 1$.

Con $z = 1$ abbiamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[19] Se avessimo calcolato il rango attraverso i minori di V avremmo trovato che tutti i minori del terzo ordine sono nulli e invece c'è almeno un minore del secondo ordine diverso da zero.

Le righe sono a due a due dipendenti[20] e quindi $rA_1 = 1$.

(d) Sia $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & t \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il rango di A_t è almeno 1 e al più 3, a seconda del valore del parametro t. Si vede facilmente che il rango è almeno 2, per ogni valore di t. Consideriamo il minore del terzo ordine dato dalla sottomatrice delle prime tre colonne:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3t - 1.$$

Allora, se $t \neq 1/3$, il rango è 3.

Con $t = 1/3$ abbiamo

$$A_{1/3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1/3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il minore del terzo ordine dato dalla sottomatrice delle ultime tre colonne vale $20/3$ e quindi il rango di $A_{1/3}$ è 3. Pertanto il rango è 3 per ogni valore di z.

(e) Sia $A_u = \begin{pmatrix} 1 & u & 2 & 0 \\ u & 2 & 3 & -u \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Il rango di A_u è almeno 1 e al più 3, a seconda del valore del parametro u. Si vede facilmente che il rango è almeno 2, per ogni valore di u (minore del secondo ordine ottenuto dalla sottomatrice formata da seconda e terza riga e seconda e terza colonna, ad esempio).

Consideriamo il minore del terzo ordine dato dalla sottomatrice delle prime tre colonne:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & u & 2 \\ u & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - u.$$

Allora, se $u \neq 1$, il rango è 3.

Con $u = 1$ abbiamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

C'è una dipendenza tra le righe, ma non è così evidente. Procediamo con gli altri minori del terzo ordine: si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi concludiamo che $rA_1 = 2$.

[20]Si faccia attenzione che è diverso affermare che tre vettori sono dipendenti dall'affermare che sono a due a due dipendenti: la prima affermazione non esclude che tra i tre vettori ce ne siano due di indipendenti, mentre la seconda esclude questo.