III-4 Sistemi di equazioni lineari

Indice

1 Sistemi di equazioni lineari

Con il termine *equazione lineare in n incognite* si intende un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b sono numeri reali fissati e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le incognite.

Con *sistema di m equazioni lineari in n incognite* si intende la scrittura

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Ciascuna riga del sistema è ovviamente un'equazione lineare nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Solitamente i numeri a_{ij}, con $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, si dicono i *coefficienti* del sistema, i numeri b_i, con $1 \le i \le m$, sono i *termini noti* e le x_j, con $1 \le j \le n$, sono appunto le *incognite* del sistema. Talvolta, anziché dire più correttamente *sistema di equazioni lineari*, diremo più sinteticamente *sistema lineare* o semplicemente *sistema*.

È immediato osservare che il sistema (di m equazioni ed n incognite) si può scrivere, in forma matriciale, con $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avendo posto

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(A si dice la matrice del sistema, $\boldsymbol{x}$ il vettore delle incognite e $\boldsymbol{b}$ il vettore dei termini noti).

Ribadisco che A e $\boldsymbol{b}$ si presumono fissati, cioè sono rispettivamente una matrice ed un vettore di numeri reali assegnati. Con il termine **soluzione** del sistema intendiamo ogni vettore $\boldsymbol{x}$ tale che $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Risolvere il sistema significa trovare *tutte* le sue soluzioni. Un sistema si dice *possibile* se ha almeno una soluzione. Si dice *impossibile* se non ha soluzioni. Si è soliti anche chiamare *determinato* un sistema possibile che abbia un'unica soluzione, *indeterminato* un sistema possibile che abbia più di una soluzione. Un sistema si dice *quadrato* se la matrice A è quadrata.

Osservazione Dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, è chiaro che risolvere il sistema significa trovare la controimmagine di $\boldsymbol{b}$ attraverso la trasformazione lineare f rappresentata dalla matrice A ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$),[1] cioè l'insieme

[1] Ricordo che in generale, data una funzione $g : X \to Y$, se $B \subset Y$, allora la controimmagine di B attraverso la funzione g è l'insieme

$$g^{-1}(B) = \{x \in X : g(x) \in B\}.$$

Quindi la controimmagine di $\boldsymbol{b}$ attraverso f è

$$f^{-1}(\{\boldsymbol{b}\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}.$$

dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che la f trasforma nel vettore $\boldsymbol{b}$. È evidente che il sistema è possibile se e solo se $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ o, se si preferisce, se e solo se $\boldsymbol{b}$ si può scrivere, in $\mathbb{R}^m$, come combinazione lineare delle colonne di A.[2]

Definizione Un sistema si dice **omogeneo** se $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

Osservazione Un sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ è sempre possibile, avendo sicuramente almeno la soluzione nulla $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Quindi la domanda interessante nel caso di sistema omogeneo è se esso ha altre soluzioni oltre a quella nulla, oppure no.

Vale il seguente importante risultato:

Teorema Dato un sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, in n variabili, le sue soluzioni formano un *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$. La dimensione di tale sottospazio è $n - rA$.

Osservazione Il rango della matrice A ha dunque un'importanza rilevante non solo come dimensione dell'immagine della trasformazione associata alla matrice A o nella dipendenza/indipendenza lineare dei vettori, ma anche nella dimensione delle soluzioni di un sistema lineare.

Esercizio 1.1 Si scrivano in forma matriciale i seguenti sistemi lineari:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x + z = 3 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{(c)} \quad \begin{cases} y + t = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

2 Alcuni risultati generali

Il seguente teorema fornisce in un certo senso la struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, quando queste esistono.

Teorema Se $\overline{\boldsymbol{x}}$ è una soluzione (soluzione particolare) del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, allora l'insieme delle sue soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \left\{\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y} : A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}\right\}.$$

Osservazione Dato un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, si usa chiamare *sistema omogeneo associato* il sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Il teorema dice quindi che (tutte) le soluzioni di un sistema si ottengono sommando ad una soluzione particolare del sistema stesso (indicata nell'enunciato da $\overline{\boldsymbol{x}}$) le soluzioni del sistema omogeneo associato. Questo risultato è importante e molto generale. Presento anche la dimostrazione, che è semplice.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare due cose: che ogni soluzione del sistema può essere scritta come somma di $\overline{\boldsymbol{x}}$ e di una soluzione dell'omogeneo associato e che, viceversa, ogni vettore di questo tipo è soluzione.

Per ipotesi $A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$. Sia $\boldsymbol{v}$ una generica soluzione del sistema. Possiamo scrivere $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{x}})$. Ora il vettore $\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{x}}$ è soluzione del sistema omogeneo associato, infatti $A(\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{x}}) = A\boldsymbol{v} - A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ e la prima parte è dimostrata (il vettore $\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{x}}$ è il vettore $\boldsymbol{y}$ dell'enunciato).

Viceversa, dato un vettore del tipo $\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}$, con $A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, chiaramente si ha $A(\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}) = A\overline{\boldsymbol{x}} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} = \boldsymbol{b}$ e quindi un tale vettore è soluzione.

Osservazione Abbiamo visto poco fa che le soluzioni di un sistema omogeneo formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. L'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo invece no (basta ricordare che tale insieme, non contenendo il vettore nullo, non può essere un sottospazio). Tale insieme però, pur non essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, tuttavia gli assomiglia molto, essendo sostanzialmente una *traslazione* di un sottospazio propriamente detto: viene detto sottospazio *affine*. Si può parlare di dimensione del sottospazio affine delle soluzioni di $A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$, riferendosi alla dimensione delle soluzioni di $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Osservazione Il teorema appena visto ha un'importante conseguenza. Se un sistema è possibile, cioè ha soluzioni, allora o ne ha una o ne ha infinite. Infatti se non ne ha soltanto una, lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato non è banale (cioè costituito dal solo vettore nullo) e quindi ha almeno dimensione 1, ma sappiamo bene che un sottospazio di dimensione 1 ha pur sempre infiniti elementi.

[2] Si ricordi che l'immagine di una trasformazione lineare è generata dalle colonne della sua matrice di rappresentazione.

2.1 Il teorema di Rouché – Capelli

Il seguente è un risultato fondamentale e fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema abbia soluzioni. Conviene prima dare questa

Definizione Dato un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la matrice, che si indica con $A|\boldsymbol{b}$, ottenuta affiancando ad A il vettore $\boldsymbol{b}$ quale ulteriore colonna, si chiama *matrice completa* del sistema. Solitamente A viene detta allora *matrice incompleta*.

Teorema (di Rouché – Capelli) Un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ha almeno una soluzione se e solo se $rA = r(A|\boldsymbol{b})$.

Osservazione Il teorema di Rouché – Capelli fornisce quindi una condizione del tutto generale (necessaria e sufficiente) per l'esistenza di soluzioni di un sistema.

Osservazione Ricordando quanto detto poco fa, quando un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è possibile, con A matrice $m \times n$, la dimensione dello spazio delle sue soluzioni è $n - rA$.

Grazie al teorema di Rouché – Capelli è relativamente semplice sapere se un sistema ha soluzioni oppure no. Come trovare le soluzioni (quando esistono) lo vediamo tra breve. Vediamo intanto un altro importante risultato.

2.2 Il teorema e la regola di Cramer

Il teorema di Cramer parla di sistemi **quadrati**.

Teorema (di Cramer) Un sistema quadrato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ha una sola soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.

Osservazione Si noti che quindi, nel caso sia $\det A = 0$, ci si può attendere che il sistema o sia impossibile oppure abbia più di una soluzione.

Osservazione Relativamente al calcolo della soluzione di un sistema quadrato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\det A \neq 0$, il modo più naturale per trovare la soluzione è sicuramente $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. [3] Esiste un metodo equivalente che consente di trovare la soluzione componente per componente, evitando così il calcolo della matrice inversa. Si tratta della cosiddetta *regola di Cramer*: dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con A quadrata di ordine n non singolare, l'unica soluzione del sistema è il vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ la cui i-esima componente è

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_i,$$

dove A_i è la matrice che si ottiene da A, sostituendo alla i-esima colonna il vettore $\boldsymbol{b}$.

Non fornisco una dimostrazione della regola di Cramer. Vediamo invece un paio di esempi.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Dopo aver osservato che $\det A = 3$, possiamo dire che c'è una sola soluzione e utilizzando la regola di Cramer otteniamo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}, \\ x_2 &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

L'unica soluzione è quindi il vettore $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

[3] Dall'equazione matriciale $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, moltiplicando ambo i membri a sinistra per A^{-1}, che esiste in quanto $\det A \neq 0$, si ottiene appunto $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Risulta $\det A = 3$ e pertanto anche in questo caso il sistema ha una sola soluzione. Applicando la regola di Cramer si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1; \\ x_2 &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -1; \\ x_3 &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

L'unica soluzione è quindi il vettore $(1, -1, 0)$.

3 Il calcolo delle soluzioni nel caso generale

Al momento abbiamo imparato a risolvere un caso particolare di sistemi, quelli quadrati con determinante di A diverso da zero. Ora vediamo come affrontare il caso generale.

Prima però facciamo qualche ulteriore considerazione sui sistemi omogenei. Come già osservato in precedenza, essi hanno sempre almeno la soluzione nulla. Sull'esistenza di altre soluzioni, distinguiamo i due casi:

- se il sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ è quadrato, con A matrice $n \times n$, in base al teorema di Cramer possiamo dire che esso ha soluzioni non nulle se e solo se A è singolare, cioè $\det A = 0$;[4]

- se il sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ non è quadrato, con A matrice $m \times n$ e $m \neq n$, il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se $rA < n$. A tale proposito si osservi che la condizione è sicuramente verificata se $m < n$, cioè se il sistema ha più incognite che equazioni.

Vediamo ora come si possono calcolare le soluzioni di un sistema in tutti i casi diversi da quello di sistema quadrato con $\det A \neq 0$.[5] Esiste un metodo generale che porta ad esprimere le soluzioni in funzione di un certo numero di parametri arbitrari. Vediamo questo metodo e poi lo applicheremo ad alcuni esempi conclusivi.

Dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, supponiamo di aver trovato che $rA = r(A|\boldsymbol{b}) = r$ e indichiamo con $\overline{A}$ una sottomatrice quadrata di A non singolare di ordine r (potrebbero ovviamente esserci più sottomatrici con queste caratteristiche). Riscriviamo il sistema eliminando le eventuali equazioni corrispondenti a righe di A che non figurano in $\overline{A}$ e "portando a secondo membro" le eventuali incognite relative a colonne di A che non figurano in $\overline{A}$.[6]

Si può dimostrare che in questo modo otteniamo un sistema *ridotto* equivalente a quello dato (cioè con lo stesso insieme di soluzioni).[7]

In tale sistema ridotto le r incognite relative alle colonne di A che figurano in $\overline{A}$ vengono espresse in funzione delle altre $n - r$, che a questo punto diventano parametri arbitrari. Infatti è chiaro che, fissati in modo arbitrario i valori di questi $n - r$ parametri, e cioè per ogni scelta di questi, il sistema ha una ed una sola soluzione poiché è un sistema quadrato e il determinante della matrice di questo sistema (cioè $\overline{A}$) è non nullo.[8]

Osservazione Il fatto che tutte le soluzioni si possano esprimere al variare di $n - r$ parametri arbitrari è una sorta di modo "operativo" di affermare che la dimensione dello spazio delle soluzioni è $n - r$.

Come anticipato nella nota, è evidente che, nel caso sia $r = n$, avremo necessariamente $m > n$ (altrimenti il sistema è quadrato con matrice non singolare e si ricade nel teorema di Cramer) e il procedimento descritto sopra consiste nella sola eliminazione delle equazioni "superflue": una volta eliminate queste equazioni, il sistema è quadrato ed ha una sola soluzione per il teorema di Cramer.

Per il calcolo esplicito delle soluzioni basta risolvere il sistema ridotto con la regola di Cramer, considerando parametri arbitrari, come già detto, le incognite che figurano a destra. Questo è un metodo del tutto generale. Concludiamo allora con un certo numero di esempi di risoluzione di un sistema in cui usiamo questo metodo, nei vari casi possibili.

[4] Infatti il sistema è certamente possibile e quindi la condizione $\det A = 0$ equivale alla non unicità della soluzione.

[5] Quindi qui si considerano sistemi o con $m \neq n$ o con $m = n$ ma $\det A = 0$.

[6] Si ottiene così un sistema di r equazioni, con r incognite "a sinistra" e $n - r$ incognite "a destra". Le incognite a destra assumono ora il significato di parametri, come vediamo subito.

[7] Il portare a destra alcune incognite è chiaro che non fa cambiare le soluzioni. L'eliminazione delle equazioni è un'azione più pericolosa ovviamente, ma in questo caso non modifica l'insieme delle soluzioni poiché si tratta di equazioni dipendenti dalle altre.

[8] Aggiungo solo che, se fosse $r = n$ (e quindi $n - r = 0$), quello che resta dopo aver eliminato le equazioni in più è semplicemente un sistema quadrato di Cramer, senza parametri.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$A|\boldsymbol{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right). \quad \text{Risulta } rA = r(A|\boldsymbol{b}) = 2.$$

Il sistema è quindi possibile e lo spazio delle sue soluzioni ha dimensione $n - rA = 3 - 2 = 1$.

Quale sottomatrice di ordine massimo non singolare possiamo prendere quella formata dalla 1ª e dalla 3ª colonna di A, e cioè $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si noti che invece, ad esempio, la sottomatrice formata dalle prime due colonne è singolare.

Riscriviamo allora il sistema dato nel sistema equivalente (non ci sono equazioni da eliminare)

$$\begin{cases} x + z = 2 + y \\ -x + z = 1 - y. \end{cases}$$

Osservando che $\det \overline{A} = 2$, con la regola di Cramer si ottiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2+y & 1 \\ 1-y & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(2 + y - 1 + y) = \frac{1}{2} + y, \\ z &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2+y \\ -1 & 1-y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - y + 2 + y) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni si possono scrivere come i vettori

$$\left(\tfrac{1}{2} + y, y, \tfrac{3}{2}\right),$$

dove y è un numero reale arbitrario.

Volendo, possiamo esprimere le soluzioni trovate nella forma $\overline{x} + \boldsymbol{y}$, con $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, ossia "soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo associato": basta scrivere

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{2} + y, y, \tfrac{3}{2}\right) &= \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{3}{2}\right) + (y, y, 0) \\ &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{3}{2}\right)}_{\overline{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{y\,(1,1,0)}_{S_0}, \end{aligned}$$

dove ho indicato per comodità con S_0 lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si tratta, al variare di $y \in \mathbb{R}$, del sottospazio generato dal vettore $(1,1,0)$, traslato del vettore $\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{3}{2}\right)$. Il vettore $(1,1,0)$ è chiaramente una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato.

Osservazione Quello seguito non era l'unico modo di procedere. Si poteva anche porre

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2^{\text{a}} \text{ e } 3^{\text{a}} \text{ colonna di } A),$$

riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} -y + z = 2 - x \\ y + z = 1 + x, \end{cases}$$

trovare, con la regola di Cramer (ora $\det \overline{A} = -2$),

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1+x & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(2 - x - 1 - x) = -\frac{1}{2} + x, \\ z &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 2-x \\ 1 & 1+x \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-1 - x - 2 + x) = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

ed esprimere quindi le soluzioni con i vettori

$$\begin{aligned} \left(x, -\tfrac{1}{2} + x, \tfrac{3}{2}\right) &= \left(0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) + (x, x, 0) \\ &= \left(0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) + x(1,1,0), \quad \text{con } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

È chiaro che questo è un modo solo formalmente diverso di scrivere le soluzioni trovate prima: al variare dei parametri (y nel primo modo, x nel secondo) in tutto l'insieme $\mathbb{R}$ si ottiene lo stesso insieme di vettori in $\mathbb{R}^3$.

Si osservi che non era invece possibile esprimere le soluzioni in funzione di z, in quanto la sottomatrice di A formata dalla 1ª e 2ª colonna è singolare.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ -x + y + z = 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$A|\boldsymbol{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right). \quad \text{Risulta } rA = r(A|\boldsymbol{b}) = 2.$$

Il sistema è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n - rA = 4 - 2 = 2$.

Quale sottomatrice di ordine massimo non singolare possiamo prendere quella formata dalla 1ª e dalla 3ª colonna di A, e cioè $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Riscriviamo allora il sistema dato nel sistema equivalente

$$\begin{cases} x = y - t \\ -x + z = 1 - y. \end{cases}$$

Con la regola di Cramer (ma è sicuramente più semplice in questo caso sostituire ad x nella seconda equazione $y - t$) si ottiene[9]

$$\begin{cases} x = y - t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni si possono scrivere come i vettori

$$\big(y - t, y, 1 - t, t\big)\ , \text{ con } y, t \in \mathbb{R}.$$

Anche qui possiamo esprimere le soluzioni nella forma $\overline{x} + S_0$, con lo stesso significato di prima per S_0:

$$\begin{aligned} \big(y - t, y, 1 - t, t\big) &= \big(0, 0, 1, 0\big) + \big(y, y, 0, 0\big) + \big(-t, 0, -t, t\big) \\ &= \underbrace{\big(0, 0, 1, 0\big)}_{\overline{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{y\,\big(1, 1, 0, 0\big) + t\,\big(-1, 0, -1, 1\big)}_{S_0}, \end{aligned}$$

dove y e t sono numeri reali arbitrari. I vettori $(1, 1, 0, 0)$ e $(-1, 0, -1, 1)$ sono generatori dello spazio S_0 e, essendo l.i., sono anche una base di tale spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Osservazione Anche in questo caso non era l'unico modo di procedere. Si poteva anche porre

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1^{\text{a}} \text{ e } 4^{\text{a}} \text{ colonna di } A),$$

riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} x + t = y \\ -x = 1 - y - z \end{cases}$$

ed esprimere le soluzioni come i vettori

$$\big(-1 + y + z, y, z, 1 - z\big) = \big(-1, 0, 0, 1\big) + y\,\big(1, 1, 0, 0\big) + z\,\big(1, 0, 1, -1\big)\,, \quad \text{con } y, z \in \mathbb{R}.$$

Non era invece possibile esprimere le soluzioni in funzione di x e y, in quanto la sottomatrice di A formata dalla 1ª e 2ª colonna è singolare.

Osservazione Lo studente, prendendo in esame i due esempi visti, può osservare che in entrambi abbiamo risolto il sistema in due modi alternativi. Per chiarire bene le osservazioni che seguono, riporto qui le soluzioni trovate utiliando la forma $\overline{x} + S_0$. Nel primo esempio abbiamo trovato

$$\big(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{3}{2}\big) + y\,\big(1, 1, 0\big) \qquad \text{oppure} \qquad \big(0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\big) + x\,\big(1, 1, 0\big)\,,$$

[9] Attenzione quando, per risolvere il sistema, si usa una sostituzione anziché la regola di Cramer: è facile fare confusione tra vere incognite e parametri. Basta però tenere presente questo: se ho portato a destra y e t vuol dire che ho deciso di usare y e t come parametri, e quindi le incognite (qui x e z) devono essere espresse in funzione di y e t.

mentre nel secondo abbiamo trovato

$$\big(0,0,1,0\big)+y\,\big(1,1,0,0\big)+t\,\big(-1,0,-1,1\big)\qquad\text{oppure}\qquad\big(-1,0,0,1\big)+y\,\big(1,1,0,0\big)+z\,\big(1,0,1,-1\big)\,.$$

Ora il commento è: nel primo esempio i vettori $\overline{x}$ sono diversi, ma il generatore dello spazio S_0 è lo stesso vettore, cioè $(1,1,0)$. Nel secondo esempio sono diversi sia $\overline{x}$ sia i generatori (meglio: uno dei due generatori è diverso, l'altro è lo stesso).

Non ci si deve assolutamente aspettare che in generale i vettori siano gli stessi, né gli $\overline{x}$, né i generatori di S_0. Nel primo esempio S_0 ha dimensione 1 e quindi i possibili generatori sono tutti proporzionali tra loro. Abbiamo trovato lo stesso, ma potevamo trovare l'opposto o anche ad esempio $(2,2,0)$. Nel secondo esempio S_0 ha dimensione 2 e qui potevamo trovare due vettori "completamente diversi" o meglio diversi, ma pur sempre generatori dello stesso sottospazio.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y-z-t=1\\ x+y+z-t=1. \end{cases}$$

Poniamo

$$A|\boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).\quad\text{Risulta } rA=r(A|\boldsymbol{b})=2.$$

Il sistema è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n-rA=4-2=2$.

Quale sottomatrice di ordine massimo non singolare possiamo prendere quella formata dalla 2ª e dalla 3ª colonna di A, e cioè $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Riscriviamo allora il sistema dato nel sistema equivalente

$$\begin{cases} y-z=1-x+t\\ y+z=1-x+t. \end{cases}$$

Con la regola di Cramer si ottiene (si ha $\det\overline{A}=2$)

$$y=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1-x+t & -1\\ 1-x+t & 1 \end{pmatrix}=1-x+t\quad\text{e}\quad z=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1-x+t\\ 1 & 1-x+t \end{pmatrix}=0.$$

Pertanto le soluzioni si possono scrivere come i vettori

$$\big(x,1-x+t,0,t\big)=\underbrace{\big(0,1,0,0\big)}_{\overline{x}}+\underbrace{x\,\big(1,-1,0,0\big)+t\,\big(0,1,0,1\big)}_{S_0},$$

dove x e t sono numeri reali arbitrari.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x-2y=1\\ -x+3y=1\\ x-y=3. \end{cases}$$

Poniamo

$$A|\boldsymbol{b}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right).\quad\text{Risulta } rA=r(A|\boldsymbol{b})=2.$$ [10]

Il sistema è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n-rA=2-2=0$, cioè la soluzione è unica.

Quale sottomatrice di ordine massimo non singolare possiamo ad esempio prendere quella formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A, e cioè $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2\\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Possiamo quindi eliminare la terza equazione, perché dipendente dalle altre due. Il sistema si riduce allora al sistema equivalente

$$\begin{cases} x-2y=1\\ -x+3y=1, \end{cases}$$

[10] Si noti che l'annullarsi del determinante della matrice $A|\boldsymbol{b}$ è in questo caso condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché esista almeno una soluzione. Infatti, se così non fosse, cioè se il determinante fosse diverso da zero, il rango della matrice completa sarebbe 3, mentre quello della matrice incompleta è certamente al più 2.

che è un sistema quadrato con determinante della matrice diverso da zero. L'unica soluzione è il vettore di componenti

$$x = \det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = 5 \quad \text{e} \quad y = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = 2.$$

Pertanto la soluzione è $(5,2)$.

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \\ y + 2z = 3. \end{cases}$$

Poniamo

$$A|\boldsymbol{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Il sistema è quadrato, ma il determinante di A è nullo. Il rango di A è 2 e anche il rango di $A|\boldsymbol{b}$ è 2. Quindi il sistema è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n - rA = 3 - 2 = 1$.

Quale sottomatrice di ordine massimo non singolare possiamo ad esempio prendere quella formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A, e cioè $\overline{A} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Possiamo eliminare la terza equazione, perché dipendente dalle altre due. Il sistema si riduce allora al sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + 3y + z = 2. \end{cases}$$

Si può far diventare parametro la z e, con il metodo già visto prima, si trovano le soluzioni

$$\big(7 - 5z, 3 - 2z, z\big) = \underbrace{(7,3,0)}_{\overline{x}} + \underbrace{z\,(-5,-2,1)}_{S_0}, \quad \text{con } z \in \mathbb{R}.$$

Esempio Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$A|\boldsymbol{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

La matrice completa $A|\boldsymbol{b}$ è quadrata e risulta $\det A|\boldsymbol{b} = 0$ (la prima e la terza riga sono opposte). Si noti, come già osservato in precedenza in un caso analogo, che l'annullarsi del determinante di $A|\boldsymbol{b}$ è una condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni: infatti se fosse $\det(A|\boldsymbol{b}) \neq 0$, avremmo che $r(A|\boldsymbol{b}) = 4$, mentre sicuramente $rA < 4$. [11]

Risulta (lo studente faccia la verifica) $rA = r(A|\boldsymbol{b}) = 2$. Per il teorema di Rouché – Capelli lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Possiamo scegliere quale sottomatrice di ordine massimo non singolare quella formata da 1ª e 2ª riga, 2ª e 3ªcolonna, e cioè $\overline{A} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Il sistema equivalente è

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1 - x_1 \\ -x_3 = -2x_1. \end{cases}$$

Con la regola di Cramer (ma qui è più veloce una semplice sostituzione) si trova

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = 3x_1 - 1. \end{cases}$$

[11] L'annullarsi del determinante di $A|\boldsymbol{b}$ non è ovviamente una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni dato che, con $\det A = 0$, si potrebbe comunque avere ad esempio $r(A|\boldsymbol{b}) = 3$ e $rA = 2$.

Le soluzioni sono i vettori $\big(x_1, 3x_1 - 1, 2x_1\big) = (0, -1, 0) + x_1(1, 3, 2)$, al variare di x_1 in $\mathbb{R}$.

Osservazione Anche in questo caso si potevano considerare altre sottomatrici non singolari, ad esempio

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2^{\mathrm{a}} \text{ e } 3^{\mathrm{a}} \text{ riga, } 1^{\mathrm{a}} \text{ e } 2^{\mathrm{a}}\text{colonna}).$$

Avremmo ottenuto il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 = x_3 \\ -x_1 + x_2 = x_3 - 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 - 1, \end{cases}$$

da cui le soluzioni

$$\big(\tfrac{1}{2}x_3, \tfrac{3}{2}x_3 - 1, x_3\big) = (0, -1, 0) + x_3(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 1) \text{ con } x_3 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

È ovviamente lo stesso insieme di prima: infatti la soluzione particolare è la stessa e lo spazio S_0 è generato da un vettore proporzionale al precedente, dato che è il generatore di prima diviso per 2.

Esercizio 3.1 Si risolvano i seguenti sistemi lineari (l'insieme delle soluzioni deve essere espresso con la notazione insiemistica; nel caso il sistema sia indeterminato, è richiesta l'indicazione di una soluzione particolare e di un insieme di generatori dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato).

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \text{(d)} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{(e)} \quad \begin{cases} x - y - z + t = 1 \\ -x + y - z - t = 2 \end{cases}$$

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} y - z = 2 \\ x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \text{(g)} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \qquad \text{(h)} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \qquad \text{(j)} \quad \begin{cases} x - y + t = 1 \\ y + z - t = 1 \\ x - 2y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.2 Si determini una base dell'immagine delle trasformazioni lineari rappresentate dalle seguenti matrici. Si determini poi una base dello spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato alle stesse matrici.

$$\text{(a)} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(e)} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.3 Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari (dipendenti da un parametro k) si dica per quali valori reali del parametro il sistema ha soluzioni e in questi casi si dica qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni. Si trovi infine l'insieme delle soluzioni.

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + ky = 3 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} kx - y + 2z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \text{(d)} \quad \begin{cases} x - y + kz = 0 \\ x + z = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \text{(e)} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = k \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} k^2x - y + z = 2 \\ 2x + y + z = k \\ x - 4y + 2z = 5 \end{cases} \qquad \text{(g)} \quad \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases} \qquad \text{(h)} \quad \begin{cases} kx + 2y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - y + 2z = k \end{cases}$$

4 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) La scrittura matriciale è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) La scrittura matriciale è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) La scrittura matriciale è[12]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.1

Indicherò sempre con A la matrice del sistema (incompleta), con $A|b$ la matrice completa e con S l'insieme delle soluzioni dei sistemi.

(a) Si tratta di un sistema quadrato. Si ha $\det A = 3$ e quindi il sistema ha un'unica soluzione. Con la regola di Cramer si ottiene

$$x = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$y = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1.$$

Quindi $S = \{(0, -1)\}$.

(b) Si tratta ancora di un sistema quadrato. Questa volta però si ha $\det A = 0$. La matrice incompleta ha rango 1, mente la matrice completa ha rango 2. Quindi il sistema è impossibile e risulta $S = \emptyset$.

(c) Si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Risulta $rA = 2 = rA|b$, e quindi il sistema è possibile. Possiamo anche affermare che lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, dato che vi sono 3 incognite e il rango di A è 2.

Osservando che il minore che si ottiene con le prime due colonne è diverso da zero, possiamo far diventare parametro z (e quindi esprimere poi le soluzioni in funzione di z) e riscrivere il sistema nel sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y = z \\ x = 1 - z \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2z - 1. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono

$$S = \Big\{(1 - z, 2z - 1, z) : z \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(1, -1, 0) + z(-1, 2, 1) : z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

A commento dell'ultima scrittura, possiamo dire che il vettore $(1, -1, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e il vettore $(-1, 2, 1)$ è un generatore dello spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

[12]Scelgo il seguente ordine nelle incognite del sistema: x, y, z, t. Non è evidentemente l'unica scelta possibile. Uno potrebbe seguire ad esempio l'ordine alfabetico t, x, y, z. Questo comporterebbe soltanto un riordinamento delle colonne della matrice e un riordinamento delle componenti del vettore delle incognite. Nulla cambia nelle soluzioni del sistema, a parte l'ovvio riordinamento.

(d) Si ha
$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$
Anche qui $rA = 2 = rA|b$ e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, dato che vi sono 3 incognite e il rango di A è 2.

Possiamo riscrivere il sistema nel sistema equivalente (facendo diventare parametro z)
$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x - y = 2 + z. \end{cases}$$
Con la regola di Cramer si ottiene
$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1-z & 1 \\ 2+z & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-1+z-2-z) = \frac{3}{2}, \\ y &= -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 2+z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(2+z-1+z) = -z-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$
Pertanto
$$S = \left\{(\tfrac{3}{2}, -z-\tfrac{1}{2}, z) : z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0) + z(0,-1,1) : z \in \mathbb{R}\right\}.$$

(e) Si ha
$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$
Risulta $rA = 2 = rA|b$. Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2, dato che vi sono 4 incognite e il rango di A è 2.

Si tratta ora di scegliere quali incognite far diventare parametri (sono 2). Qui attenzione: non si può "portare a destra a parametro" z e t, dato che il minore che si ottiene con le prime due colonne è nullo. Osservando invece che il minore ottenuto con la seconda e terza colonna di A è diverso da zero (vale 2), possiamo riscrivere il sistema nel sistema equivalente
$$\begin{cases} -y - z = 1 - x - t \\ y - z = 2 + x + t. \end{cases}$$
Con la regola di Cramer si ottiene
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1-x-t & -1 \\ 2+x+t & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-1+x+t+2+x+t) = x+t+\frac{1}{2}, \\ z &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1-x-t \\ 1 & 2+x+t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-2-x-t-1+x+t) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$
Pertanto
$$S = \left\{(x, x+t+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, t) : x,t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0) + x(1,1,0,0) + t(0,1,0,1) : x,t \in \mathbb{R}\right\}.$$
A conclusione possiamo dire che il vettore $(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e che i vettori $(1,1,0,0)$ e $(0,1,0,1)$ sono generatori dello spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato (sono anche una base di tale spazio).

(f) Questo è un sistema quadrato. Si ha
$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Risulta $\det A = 2$. Quindi il sistema ha un'unica soluzione e con la regola di Cramer si ottiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2},\\ y &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \frac{3}{2},\\ z &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$S = \Big\{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2})\Big\}.$$

(g) È un sistema quadrato e si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Qui si può intuire che il sistema è impossibile osservando che nella matrice A la terza riga è la somma delle prime due, mentre questo non è vero nella matrice $A|b$. Comunque procediamo con il confronto dei ranghi. Risulta $\det A = 0$ e $rA = 2$. Invece $rA|b = 3$, dato che ad esempio il determinante della sottomatrice di $A|b$ formata dalle ultime tre colonne vale 4. Il sistema è quindi impossibile.

(h) Si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right).$$

Questa volta $rA = 2$, ma anche $rA|b = 2$, dato che la terza riga è la differenza delle prime due, che sono indipendenti. Il sistema è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1.

Possiamo eliminare la terza equazione e quindi il sistema si può ridurre al sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1\\ x + 2z = 1\end{cases} \quad \text{e quindi al} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 - z\\ x = 1 - 2z\end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 - 2z\\ y = 1 - 3z.\end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono

$$S = \Big\{(1 - 2z, 1 - 3z, z) : z \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(1, 1, 0) + z(-2, -3, 1) : z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

A conclusione possiamo affermare allora che il vettore $(1, 1, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e che il vettore $(-2, -3, 1)$ è un generatore (e base) dello spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

(i) Si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{array}\right).$$

In questo caso abbiamo la matrice completa quadrata e la matrice incompleta non quadrata. Il sistema è possibile solo se $\det A|b = 0$.[13] Risulta $\det A|b = 0$. Si ha $rA = rA|b = 2$ e quindi il sistema è possibile. Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0, il che significa che c'è un'unica soluzione.

Possiamo eliminare un'equazione, ad esempio la terza. Il sistema equivale allora a

$$\begin{cases} 2x - y = 1\\ x + y = 2.\end{cases}$$

Con la regola di Cramer si trova

$$S = \Big\{(1, 1)\Big\}.$$

[13] Infatti, se fosse $\det A \neq 0$, avremmo che il rango di $A|b$ sarebbe 3, mentre il rango di A non può essere più di 2.

(j) Si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Lo studente calcoli i ranghi delle due matrici (sono entrambi uguali a 2): possiamo concludere che $rA = rA|b = 2$ anche osservando che la terza riga è la differenza delle prime due, che sono indipendenti. Possiamo eliminare la terza equazione e il sistema equivale allora al sistema

$$\begin{cases} x - y + t = 1 \\ y + z - t = 1. \end{cases}$$

Osservando che è diverso da zero il minore ottenuto con le colonne relative a x e y, possiamo far diventare parametri z e t e riscrivere

$$\begin{cases} x - y = 1 - t \\ y = 1 - z + t \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 - z + t. \end{cases}$$

Le soluzioni sono allora[14]

$$S = \Big\{(2 - z, 1 - z + t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(2, 1, 0, 0) + z(-1, -1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1) : z, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

A conclusione come sempre possiamo dire che il vettore $(2, 1, 0, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e che i vettori $(-1, -1, 1, 0)$ e $(0, 1, 0, 1)$ sono generatori (e anche base) dello spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esercizio 3.2

(a) Indichiamo con f_1 la trasformazione lineare rappresentata da A_1: f_1 è una trasformazione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. L'immagine di f_1, che è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, è generata dalle colonne della matrice A_1. Si tratta di due vettori linearmente indipendenti, dato che $\det A_1 \neq 0$. Pertanto una base di $\operatorname{Im} f_1$ è costituita dall'insieme dei due vettori. Possiamo scrivere quindi

$$\text{base di } \operatorname{Im} f_1 = \left\{ \binom{3}{1}, \binom{4}{2} \right\}.$$ [15]

$\operatorname{Im} f_1$ coincide con tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$.

Ora passiamo allo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A_1. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione $2 - rA_1 = 2 - 2$, e cioè il sottospazio banale fatto dal solo vettore nullo. Possiamo quindi scrivere $S_0 = \{(0, 0)\}$.

(b) Indichiamo con f_2 la trasformazione lineare rappresentata da A_2: f_2 è una trasformazione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. L'immagine di f_2, che è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, è generata dalle colonne della matrice A_2, che però sono due vettori linearmente dipendenti, dato che $\binom{-2}{2} = -2\binom{1}{-1}$. Pertanto una base di $\operatorname{Im} f_2$ è costituita da uno solo dei due vettori (indifferentemente). Quindi, ad esempio, possiamo scrivere

$$\text{base di } \operatorname{Im} f_2 = \left\{ \binom{1}{-1} \right\}.$$

$\operatorname{Im} f_2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1.

Ora passiamo allo spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A_2. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione $2 - rA_2 = 2 - 1 = 1$. Tale spazio è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni sono evidentemente dipendenti (la seconda si ottiene dalla prima cambiando il segno). Quindi il sistema equivale alla sola equazione

$$x_1 - 2x_2 = 0 \quad \text{che equivale alla} \quad x_1 = 2x_2.$$

[14] Si noti che talvolta per il calcolo delle soluzioni ho usato la regola di Cramer, altre volte, quando la presenza di zeri rende il calcolo quasi immediato, ho ricavato direttamente i valori delle incognite in funzione dei parametri.

[15] Le basi sono insiemi di vettori. Vanno quindi indicate utilizzando le parentesi graffe.

Quindi possiamo dire che S_0 è dato dai vettori $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ del tipo $(2\alpha, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.[16] Pertanto

$$S_0 = \Big\{(2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\alpha(2, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Quindi

$$\text{base di } S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Indichiamo con f_3 la trasformazione lineare rappresentata da A_3: f_3 è una trasformazione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$. L'immagine di f_3, che è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, è generata dalle colonne della matrice A_3, che però sono certamente dipendenti, essendo tre vettori in uno spazio di dimensione 2. Per trovare una base di $\operatorname{Im} f_3$ occorre trovare dei generatori indipendenti. Possiamo osservare che le prime due colonne sono i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^2$ e quindi la terza colonna è certamente c.l. delle prime due. Possiamo scrivere pertanto[17]

$$\text{base di } \operatorname{Im} f_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\operatorname{Im} f_3$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2, e quindi è tutto $\mathbb{R}^2$.

Ora passiamo allo spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A_3. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - rA_3 = 3 - 2 = 1$. Tale spazio è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere

$$S_0 = \Big\{(\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\alpha(1, -1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Quindi

$$\text{base di } S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Indichiamo con f_4 la trasformazione lineare rappresentata da A_4: f_4 è una trasformazione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. L'immagine di f_4 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed è generata dalle colonne della matrice A_4. Sono due vettori l.i (è immediato vedere che il rango della matrice è 2). I due vettori sono quindi una base dell'immagine di f_4. Pertanto

$$\text{base di } \operatorname{Im} f_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\operatorname{Im} f_4$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.

Ora passiamo allo spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A_4. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione $2 - rA_4 = 2 - 2 = 0$, che si riduce quindi al solo vettore nullo. Verifichiamolo: esso è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \text{che equivale a} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere

$$S_0 = \Big\{(0, 0)\Big\}.$$

(e) Indichiamo con f_5 la trasformazione lineare rappresentata da A_5: f_5 è una trasformazione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$. L'immagine di f_5 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed è generata dalle colonne della matrice A_5. Possiamo osservare che il determinante di A_5 è nullo: lo si vede o dal calcolo diretto, o notando che la terza riga è la somma delle prime due. Questo dice che le colonne sono dipendenti. Si vede facilmente che il rango di A_5 è 2 e ad esempio le

[16] Ho in pratica chiamato α quello che era x_2 (il parametro): quindi x_1 diventa 2α. Ovviamente la notazione è irrilevante: si poteva benissimo scrivere $(2x_2, x_2)$, con $x_2 \in \mathbb{R}$.

[17] Qui ho chiamato α quello che era x_3: quindi x_1 diventa α e x_2 diventa $-\alpha$.

prime due colonne sono indipendenti, dato che il minore che si ottiene dalla sottomatrice formata con la prima e seconda colonna e prima e seconda riga è diverso da zero. Quindi possiamo dire che $\dim(\operatorname{Im} f_5) = 2$ e che

$$\text{base di } \operatorname{Im} f_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$ [18]

Ora passiamo allo spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A_5. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - rA_5 = 3 - 2 = 1$. Tale spazio è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Il sistema equivale a

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_1 = -2x_2. \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere

$$S_0 = \Big\{ (-2\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ \alpha(-2, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Si ha

$$\text{base di } S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(f) Indichiamo con f_6 la trasformazione lineare rappresentata da A_6: f_6 è una trasformazione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$. L'immagine di f_6 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed è generata dalle colonne della matrice A_6. Come sempre la dimensione di $\operatorname{Im} f_6$ coincide con il rango della matrice A_6, che può essere al più 3 (è anche evidentemente almeno 2). Procedendo al calcolo dei minori del terzo ordine, si può verificare che essi sono tutti nulli (lo si faccia). Si arriva più rapidamente al risultato se ci si accorge che c'è una dipendenza tra le righe, in quanto la prima è due volte la seconda meno la terza. Quindi il rango non è 3, ma 2. Si vede facilmente che ad esempio le prime due colonne sono indipendenti (il minore che si ottiene dalla sottomatrice formata con la prima e seconda colonna e prima e seconda riga è diverso da zero). Quindi possiamo dire che $\dim(\operatorname{Im} f_6) = 2$ e che

$$\text{base di } \operatorname{Im} f_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$ [19]

Ora passiamo allo spazio S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A_6. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione $4 - rA_6 = 4 - 2 = 2$. Tale spazio è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ricordando che il rango di A_6 è 2, possiamo ridurre il sistema ad esempio alle prime due equazioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -2x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases} \quad \text{cioè ancora} \quad \begin{cases} x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 = x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere

$$S_0 = \Big\{ (\alpha - 3\beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ \alpha(1, 1, 1, 0) + \beta(-3, -1, 0, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Questo significa che i due vettori $(1, 1, 1, 0)$ e $(-3, -1, 0, 1)$ sono generatori di S_0, ma è immediato capire che sono linearmente indipendenti (la matrice da essi formata ha rango 2) e che quindi essi costituiscono una base di S_0. Pertanto

$$\text{base di } S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

[18] Indicando con c^1, c^2, c^3 le tre colonne di A_5, possiamo dire che sono basi di $\operatorname{Im} f_5$

$$\{c^1, c^2\} \quad , \quad \{c^1, c^3\} \quad , \quad \{c^2, c^3\}.$$

[19] Si verifichi che scegliendo in tutti i modi possibili due delle quattro colonne si ottiene sempre una base di $\operatorname{Im} f_6$.

Esercizio 3.3

(a) Scriviamo le matrici del sistema:
$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$
Si tratta di un sistema quadrato. Calcoliamo il determinante di A. Risulta $\det A = -1 - k$. Allora possiamo dire che, se $k \neq -1$, per il teorema di Cramer il sistema ha una sola soluzione, che poi troveremo. Se invece $k = -1$ allora il rango di A è 1. Il rango di $A|b$ invece è 2. Quindi per il teorema di Rouché–Capelli, se $k = -1$, il sistema non ha soluzioni.

Per tutti i valori di $k \neq -1$ la soluzione è (con la regola di Cramer):
$$x = -\frac{1}{1+k} \det \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1+2k}{1+k}$$
e
$$y = -\frac{1}{1+k} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{1+k}.$$
L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(\frac{1+2k}{1+k}, -\frac{1}{1+k})\}$, per ogni $k \neq -1$.

(b) Scriviamo le matrici del sistema:
$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & k & 3 \end{array}\right).$$
Calcoliamo il determinante di A: risulta $\det A = k - 6$. Allora possiamo dire che, se $k \neq 6$, per il teorema di Cramer il sistema ha una sola soluzione, che poi troveremo. Se invece $k = 6$ allora il rango di A è 1. Anche il rango di $A|b$ è 1. Quindi per il teorema di Rouché–Capelli, se $k = 6$, il sistema ha soluzioni. Possiamo dire che la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1 (dato dalla differenza tra $n = 2$ e $rA = 1$).

Il sistema quindi ha soluzioni per ogni valore del parametro k. Risolviamo ora il sistema. Se $k \neq 6$ la soluzione è (regola di Cramer):
$$x = \frac{1}{k-6} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix} = 1$$
e
$$y = \frac{1}{k-6} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$
L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(1, 0)\}$, per ogni $k \neq 6$.

Se $k = 6$ il sistema si può ridurre ad una sola equazione, ad esempio $x + 2y = 1$, cioè $x = 1 - 2y$. Pertanto l'insieme delle soluzioni si può scrivere come $S = \{(1 - 2y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0) + y(-2, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

(c) Scriviamo le matrici del sistema:
$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$
Qui il sistema non è quadrato. Dobbiamo studiare il rango delle due matrici. Possiamo dire subito che il rango di $A|b$ è 2, dato che la sottomatrice di $A|b$ formata dalle ultime due colonne è non singolare. Ora si tratta di vedere se il rango di A è 2 oppure 1. Si noti che il minore di A che si ottiene dalla seconda e terza colonna è nullo e che quindi dobbiamo considerare un altro minore. Consideriamo quello che si ottiene con le prime due colonne: esso risulta uguale a $k+1$. Possiamo quindi dire che se $k \neq -1$ il rango di A è 2 e quindi per tali valori del parametro il sistema ha soluzioni. Invece per $k = -1$ le due righe di A sono opposte e quindi risulta $rA = 1$ e il sistema è impossibile.

Troviamo allora le soluzioni per $k \neq -1$. La dimensione dello spazio delle soluzioni è 1 ($n = 3$ e $rA = 2$). Il sistema si può riscrivere come
$$\begin{cases} kx - y = -2z \\ x + y = 1 + 2z. \end{cases}$$
Risolto con la regola di Cramer esso fornisce
$$x = \frac{1}{k+1} \det \begin{pmatrix} -2z & -1 \\ 1+2z & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{k+1}$$

e

$$y = \frac{1}{k+1} \det \begin{pmatrix} k & -2z \\ 1 & 1+2z \end{pmatrix} = \frac{2(k+1)z+k}{k+1}.$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(\frac{1}{k+1}, \frac{2(k+1)z+k}{k+1}, z) : z \in \mathbb{R}\}$, per ogni $k \neq -1$.[20]

(d) Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Si tratta di un sistema quadrato. Calcoliamo il determinante di A. Risulta $\det A = 2k-3$. Allora possiamo dire che, se $k \neq \frac{3}{2}$, per il teorema di Cramer il sistema ha una sola soluzione, che poi troveremo. Se invece $k = \frac{3}{2}$ allora il rango di A è 2 (il minore che si ottiene con le prime due righe e le prime due colonne è diverso da zero). Il rango di $A|b$ è pure 2, dato che la colonna dei termini noti (b) è la somma delle prime due. Quindi per il teorema di Rouché–Capelli, se $k = \frac{3}{2}$, il sistema ha soluzioni.

Troviamo ora le soluzioni. Se $k \neq \frac{3}{2}$ la soluzione è (regola di Cramer):

$$x = \frac{1}{2k-3} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$y = \frac{1}{2k-3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

e

$$z = \frac{1}{2k-3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(1,1,0)\}$, per ogni $k \neq \frac{3}{2}$.

Se $k = \frac{3}{2}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n - rA = 3 - 2 = 1$. Il sistema si può ridurre al sistema (prime due equazioni):

$$\begin{cases} x - y = -\frac{3}{2}z \\ x = 1 - z \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 1 + \frac{1}{2}z. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è $S = \{(1-z, 1+\frac{1}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(1,1,0) + z(-1, \frac{1}{2}, 1) : z \in \mathbb{R}\}$.

(e) Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Il sistema non è quadrato ma la matrice $A|b$ è quadrata. Possiamo allora iniziare calcolando il determinante di $A|b$: risulta $\det A|b = 1 - 2k$. Allora possiamo dire che, se $k \neq \frac{1}{2}$, il sistema non può avere soluzioni, dato che il rango di $A|b$ è 3, mentre il rango di A non può essere più di 2, visto che A ha solo due colonne.

Il sistema può avere soluzioni solo per $k = \frac{1}{2}$, ma occorre controllare che sia effettivamente così.[21] Si vede facilmente che, con $k = \frac{1}{2}$, si ha $rA = rA|b = 2$. Il sistema ha quindi soluzioni. La dimensione dello spazio delle soluzioni è data da $n - rA = 2 - 2 = 0$, quindi c'è una sola soluzione. La possiamo trovare riducendo il sistema ad esempio alla prima e terza equazione:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(f) Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} k^2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & k \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

[20] Quindi per ogni valore di $k \neq -1$ abbiamo infinite soluzioni, espresse in funzione del parametro z.

[21] Non siamo infatti sicuri che i due ranghi siano uguali: potrebbe essere che il rango di $A|b$ è 2 mentre il rango di A è 1.

Visto che A è quadrata cominciamo dal determinante di A: risulta (1^a riga) $\det A = k^2\cdot 6+1\cdot 3+1\cdot(-9) = 6(k^2-1)$. Allora possiamo dire che, per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ il sistema ha una sola soluzione, che ora calcoliamo con la regola di Cramer:

$$x = \frac{1}{6(k^2-1)} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \ldots = -\frac{1}{3(k+1)},$$

$$y = \frac{1}{6(k^2-1)} \det \begin{pmatrix} k^2 & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{2k^2-3k-4}{6(k+1)},$$

$$z = \frac{1}{6(k^2-1)} \det \begin{pmatrix} k^2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{4k^2+9k+8}{6(k+1)}.$$

Studiamo ora i casi che restano.

Per $k = 1$ sostituiamo e otteniamo

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Risulta che il rango di A è 2, dato che ad esempio la sottomatrice formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non singolare. Per calcolare il rango di $A|b$ si potrebbe cercare di scoprire una dipendenza tra le righe (o colonne), ma non è così evidente. Calcoliamo allora i minori del terzo ordine. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi il rango non è 3 ed è sicuramente 2 per quanto già osservato su A. Pertanto il sistema ha soluzioni con $k = 1$ e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - 2 = 1$. Le soluzioni si trovano riducendo prima il sistema a (prime due equazioni e parametro z):

$$\begin{cases} x - y = 2 - z \\ 2x + y = 1 - z. \end{cases}$$

Ora con la regola di Cramer:

$$x = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 2-z & -1 \\ 1-z & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3 - 2z)$$

e

$$y = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 1-z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(z - 3).$$

Le soluzioni per $k = 1$ sono quindi date dall'insieme $S = \{(\frac{1}{3}(3 - 2z), \frac{1}{3}(z - 3), z)\}$, con $z \in \mathbb{R}$.

Per $k = -1$ sostituiamo e otteniamo

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Risulta che il rango di A è ancora 2 (A è la stessa di prima). Questa volta però il rango di $A|b$ è 3, dato che la sottomatrice di $A|b$ formata da 1^a, 2^a e 4^a colonna è non singolare (il minore corrispondente vale -6). Quindi per $k = -1$ il sistema non ha soluzioni.

(g) Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{array}\right).$$

La matrice $A|b$ è quadrata e conviene iniziare calcolando il determinante di $A|b$: risulta $\det A|b = k^2 - 1$. Allora possiamo dire che, se $k \neq \pm 1$, il sistema non può avere soluzioni, dato che il rango di $A|b$ è 3, mentre il rango di A non può essere più di 2, visto che A ha solo due colonne.

Il sistema quindi può avere soluzioni solo per $k = 1$ oppure $k = -1$ e occorre controllare che sia effettivamente così.

Con $k = 1$ si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Si vede facilmente che $rA = rA|b = 2$. Il sistema ha quindi soluzioni e la dimensione dello spazio delle soluzioni è data da $2 - 2 = 0$, quindi c'è una sola soluzione. La possiamo trovare riducendo il sistema a:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(1, 0)$.

Con $k = -1$ si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ora il rango di A è 1, dato che le due colonne sono dipendenti. Il rango di $A|b$ invece è 2, dato che ad esempio la seconda e terza colonna sono indipendenti. Quindi il sistema non ha soluzioni per $k = -1$.

(h) Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & k \end{array}\right).$$

La matrice $A|b$ è quadrata e conviene iniziare calcolando il determinante di $A|b$. Sviluppando il calcolo rispetto alla quarta colonna si ottiene

$$\det A|b = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = k(k-1).$$

Allora possiamo dire che, se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, il sistema non può avere soluzioni, dato che il rango di $A|b$ è 4, mentre il rango di A non può essere più di 3, visto che A ha solo tre colonne.

Il sistema quindi può avere soluzioni solo per $k = 0$ oppure $k = 1$ e occorre controllare che sia effettivamente così.

Con $k = 0$ si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Il rango di A è 3, dato che la sua sottomatrice formata dalle prime tre righe è non singolare. Il rango di $A|b$ è quindi anch'esso 3. Il sistema ha dunque soluzioni per $k = 0$. Troviamole. Riduciamo il sistema eliminando la quarta equazione: il sistema diventa

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

La soluzione (unica) si trova facilmente con la regola di Cramer ed è $(-1, 1, 1)$.

Con $k = 1$ si ha

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Per il calcolo del rango di A possiamo osservare che in A la quarta riga è l'opposto della seconda e quindi può essere trascurata. Resta allora da esaminare il minore che deriva dalle prime tre righe, che risulta essere 0. Allora il rango di A è 2. Il rango di $A|b$ invece è 3, dato che ad esempio il minore di ordine 3 che deriva dalle prime tre righe e dalle ultime tre colonne è diverso da zero. Pertanto con $k = 1$ il sistema non ha soluzioni.