IV-1 Funzioni reali di più variabili

Indice

1 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

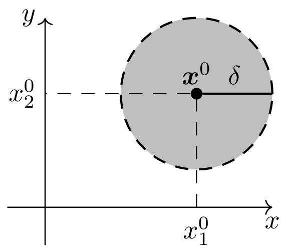
1.1 Distanza e topologia in $\mathbb{R}^n$

In questa parte del corso studieremo alcuni concetti analitici sulle funzioni di più variabili reali.[1] Come le funzioni di una variabile reale sono definite in genere in particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, così le funzioni di due variabili sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, quelle di tre variabili in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, e così via. Nella terza parte del corso abbiamo già parlato estesamente di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., ma l'approccio qui è un po' diverso, diciamo che è più analitico e meno algebrico (per farmi capire: è più simile a quello della parte II piuttosto che a quello della parte III).

Studiando la Geometria analitica (nella parte I) abbiamo già avuto a che fare con curve nel piano e sottoinsiemi di questo. Ora $\mathbb{R}^2$ sarà l'ambiente in cui è definito il dominio delle funzioni. Prima di iniziare a parlare di funzioni vere e proprie, è opportuno fare qualche considerazione su $\mathbb{R}^2$ con la finalità di generalizzare alcuni concetti già incontrati in $\mathbb{R}$.

Iniziamo dal concetto di distanza in $\mathbb{R}^2$. Indicherò gli elementi del piano e in generale di $\mathbb{R}^n$ con il grassetto. Diciamo **distanza** (**euclidea**) di $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ il numero

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$ [2]



Fissato allora un punto $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, si dice intorno circolare di $\boldsymbol{x}^0$ di raggio $\delta > 0$ l'insieme dei punti del piano che hanno da $\boldsymbol{x}^0$ distanza (euclidea) minore di δ. Essi, come è ovvio, riempiono un cerchio di centro $\boldsymbol{x}^0$ e raggio δ (cerchio in realtà privato della circonferenza). È da notare che gli intorni circolari di $\boldsymbol{x}^0$ sono infiniti, tutti contengono il punto $\boldsymbol{x}^0$ e, considerato uno di essi di raggio $\bar{\delta}$, ne esistono infiniti altri di raggio minore, tutti contenuti in esso. È chiaro che tutte queste proprietà valevano anche per gli intorni dei punti in $\mathbb{R}$.

Richiamiamo brevemente in $\mathbb{R}^2$ le nozioni *topologiche*, già viste in $\mathbb{R}$, di punti interni, esterni, isolati, di frontiera e di accumulazione di un insieme.

Definizione Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$, un punto $\boldsymbol{x}^0$ si dice

- *interno* di A se esiste almeno un intorno circolare di $\boldsymbol{x}^0$ tutto contenuto in A;
- *esterno* di A se esiste almeno un intorno circolare di $\boldsymbol{x}^0$ tutto costituito da punti non appartenenti ad A;

[1] Sono gli stessi concetti visti per le funzioni di una variabile (limiti, continuità e derivabilità in particolare) adattati alla presenza di più variabili. Vedremo che per alcuni di questi non è necessario aggiungere molto, essendo l'estensione del tutto immediata, per altri invece le cose non sono altrettanto dirette.

[2] Per indicare le coppie di numeri reali, cioè gli elementi di $\mathbb{R}^2$, possiamo usare due notazioni alternative: o (x, y), come abbiamo fatto fino ad ora, oppure (x_1, x_2). È bene che lo studente si abitui ad utilizzare l'una o l'altra indifferentemente, anche perché nei corsi successivi potrà vederle utilizzate entrambe. La prima è forse più semplice, ma la seconda ha il vantaggio di poter essere estesa ad un qualunque numero di variabili. Tornando al significato della definizione di distanza, non dovrebbe essere difficile capire che sotto questa definizione si nasconde uno dei più famosi teoremi della geometria, il teorema di Pitagora, e dovreste avere tutti una qualche conoscenza in merito.

- *di frontiera* di A se $\boldsymbol{x}^0$ non è né interno né esterno ad A. Significa allora che in qualunque intorno circolare di $\boldsymbol{x}^0$ cadono almeno un punto di A e almeno un punto non appartenente ad A;
- *isolato* se $\boldsymbol{x}^0 \in A$ ed esiste almeno un intorno circolare di $\boldsymbol{x}^0$ che non contiene alcun punto di A eccetto $\boldsymbol{x}^0$;
- *di accumulazione* di A se in qualunque intorno circolare di $\boldsymbol{x}^0$ cadono infiniti punti di A.

È importante inoltre l'ulteriore

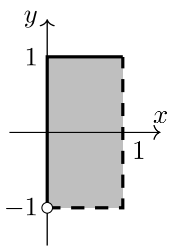
Definizione Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice

- *aperto* se ogni punto di A è interno ad A;
- *chiuso* se il suo insieme complementare[3] è aperto.

Osservazioni ed **esempi**.

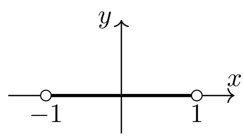
- ▷ Si può osservare che un punto isolato è certamente di frontiera, un punto interno è certamente di accumulazione, punti esterni e punti isolati non possono essere di accumulazione. Inoltre si noti che i punti isolati di un insieme appartengono certamente all'insieme, quelli esterni certamente non appartengono e infine quelli di frontiera, o di accumulazione, possono appartenere oppure no all'insieme. (Tutto questo valeva anche in $\mathbb{R}$.)
- ▷ In generale i punti esterni sono quelli che risultano interni al complementare dell'insieme in questione.
- ▷ Detto in modo poco formale ma efficace, i punti di frontiera di un insieme sono i punti che stanno sul bordo di questo, a prescindere dal fatto che questi facciano parte oppure no dell'insieme stesso.
- ▷ Si può dire che un insieme risulta chiuso se contiene i suoi punti di frontiera, cioè se il bordo fa parte dell'insieme.

Vediamo ora alcuni esempi.



Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ l'insieme $I = [0, 1) \times (-1, 1]$. Si tratta sostanzialmente di un rettangolo, in cui alcune parti del bordo sono comprese ed altre escluse. È un insieme che non è né aperto né chiuso. L'insieme dei suoi punti interni è l'insieme $(0, 1) \times (-1, 1)$, cioè il rettangolo aperto. L'insieme dei suoi punti di frontiera è costituito dai lati del rettangolo.[4] L'insieme dei punti di accumulazione di I è l'intervallo $[0, 1] \times [-1, 1]$, cioè il rettangolo chiuso.

Altro esempio. Consideriamo l'insieme
$$A = (-1, 1) \times \{0\}.$$



L'insieme A è il prodotto cartesiano dell'intervallo $(-1, 1)$ (sulle ascisse) e del punto 0 sulle ordinate, cioè è l'insieme delle coppie che hanno come prima componente un numero scelto tra -1 e 1 e come seconda sempre 0. Ovviamente si tratta di un segmento orizzontale sull'asse x.

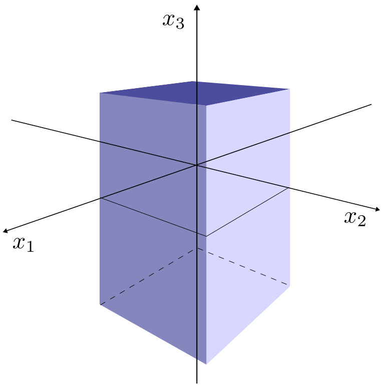
L'insieme A non ha punti interni. Questa è una situazione in qualche modo interessante, dato che l'intervallo $(-1, 1)$ ha punti interni in $\mathbb{R}$. Poi possiamo affermare che tutti i punti di A sono di frontiera e sono di frontiera anche gli estremi del segmento, cioè i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, che pure non fanno parte del segmento. I punti di accumulazione di A sono dati dal segmento con i suoi estremi, cioè dall'insieme $[-1, 1] \times \{0\}$.

Gli studenti si costruiscano altri esempi in proposito.

[3] Ricordo che, dato in generale un insieme X ed $A \subset X$, l'insieme degli elementi di X che non appartengono ad A si dice complementare di A (rispetto ad X). Nel nostro caso abbiamo $A \subset \mathbb{R}^2$ e sottintendo che il complementare sia rispetto a tutto $\mathbb{R}^2$.

[4] Si può darne una scrittura formale, ma non preoccupatevi più di tanto di questo. Si può scrivere che l'insieme dei punti di frontiera di I è l'insieme
$$\big(\{0\} \times [-1, 1]\big) \cup \big(\{1\} \times [-1, 1]\big) \cup \big([0, 1] \times \{-1\}\big) \cup \big([0, 1] \times \{1\}\big).$$

Tutto quanto detto per $\mathbb{R}^2$ può essere esteso in modo del tutto naturale ad $\mathbb{R}^n$, l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali. Da notare che, in tal caso, solo per $n = 3$ si può dare ancora un'immagine geometrica, che sarà ambientata in quello che si può chiamare lo spazio a tre dimensioni nel senso elementare e intuitivo del termine, attrezzato con una terna di assi cartesiani ortogonali.
Si possono chiamare intervalli in $\mathbb{R}^n$ i prodotti cartesiani di n intervalli di $\mathbb{R}$. Un esempio di insieme in $\mathbb{R}^3$ è il prodotto cartesiano di tre intervalli di $\mathbb{R}$, come



$$A = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$$

la cui immagine geometrica è un parallelepipedo con le facce parallele ai piani coordinati. La figura a fianco mostra qualcosa di simile all'insieme A appena indicato.

Si dirà *intorno circolare* di un punto $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ di raggio δ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno distanza euclidea da $\boldsymbol{x}^0$ minore di δ, definendo **distanza euclidea** di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dove $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, il numero

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$ [5]

L'intorno circolare di un punto $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^3$ di raggio δ è rappresentato dalla sfera di centro $\boldsymbol{x}^0$ e raggio δ.

Si estendono ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, in modo del tutto analogo a quanto fatto in $\mathbb{R}^2$, tutte le nozioni topologiche.

Come già in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$, anche in $\mathbb{R}^n$ si dice *aperto* ogni insieme i cui punti siano tutti punti interni. Abbiamo già visto che, ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ un rettangolo privato dei lati è un insieme aperto, e così pure un cerchio privato della circonferenza. In $\mathbb{R}^3$ sono aperti ad esempio un parallelepipedo privato delle facce oppure una sfera privata della superficie sferica.

Si dirà poi *chiuso* un insieme che sia complementare (rispetto a $\mathbb{R}^n$) di un insieme aperto.

1.2 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

Nella seconda parte del corso abbiamo studiato le funzioni reali di variabile reale, cioè le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Qui consideriamo le funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, dette anche funzioni reali di n variabili.[6] Più in generale ci occuperemo di funzioni definite in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$, a valori reali. Scriveremo formalmente

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Come sempre, se vogliamo riferirci alla funzione nel suo complesso, scriviamo semplicemente f; se invece, posto $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, vogliamo indicare il numero reale che è immagine di $\boldsymbol{x}$ attraverso la funzione f, scriveremo $f(\boldsymbol{x})$ oppure $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Si dice come sempre **dominio** (o *campo di esistenza* o *insieme di definizione*) della funzione f l'insieme dei punti per cui esiste il corrispondente secondo la legge f, cioè l'insieme degli $\boldsymbol{x}$ per cui esiste $f(\boldsymbol{x})$.

L'insieme di definizione può essere fornito esplicitamente, unitamente alla legge che definisce la funzione. Oppure, nel caso sia fornita soltanto la legge, può essere chiesto di determinare l'insieme di definizione: in tal caso questo è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in cui è definita l'espressione che fornisce la legge di corrispondenza.

Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il simbolo $f(A)$ indica come sempre l'*immagine* della funzione f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume in corrispondenza degli elementi di A. Chiaramente $f(A) \subset \mathbb{R}$.

Come per le funzioni di una variabile, chiamiamo **grafico** di una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'insieme

$$G_f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in A \Big\} = \Big\{ \big(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)\big) : (x_1, \ldots, x_n) \in A \Big\}.$$

Si tratta di un sottoinsieme dello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi le funzioni di una variabile hanno grafico in $\mathbb{R}^2$ (e nella II parte di questo corso abbiamo imparato a trovare il grafico di tali funzioni), le funzioni di due variabili hanno grafico in $\mathbb{R}^3$. Non è possibile disegnare il grafico di funzioni di più di due variabili, dato che è un sottoinsieme almeno di $\mathbb{R}^4$.

Il grafico di una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una curva nel piano $\mathbb{R}^2$. Il grafico di una $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è generalmente una *superficie* in $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ è un piano nello spazio $\mathbb{R}^3$.

[5]Ricordo che, se $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si definisce *norma euclidea* di $\boldsymbol{x}$ il numero reale non negativo $\|\boldsymbol{x}\| = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2}$. Dati allora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, si può allora ridefinire $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

[6]Nella III parte abbiamo studiato, tra le altre cose, particolari funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, quelle che abbiamo chiamato trasformazioni lineari. Si trattava di funzioni con valori vettoriali: qui torniamo a funzioni con valori reali, come nella II parte.

Esempi

Le seguenti funzioni sono esempi di funzioni definite in opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

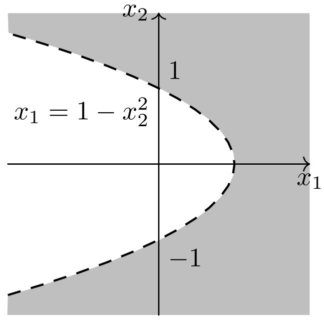
- $f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 + x_1x_2 + 1$
- $f_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- $f_3(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}$
- $f_4(x_1, x_2) = \dfrac{\ln(x_1 + x_2^2 - 1)}{3^{x_2}}$
- $f_5(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$. [7]

In questi casi non è esplicitamente indicato l'insieme di definizione e, come detto, si sottintende quindi che esso sia il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ in cui ha senso l'espressione analitica che definisce la funzione.

Negli esempi proposti il campo di esistenza di f_1, f_2, f_5 è tutto $\mathbb{R}^2$.
Per la f_3 occorre che il denominatore non si annulli, quindi deve essere $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Il campo di esistenza è quindi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, cioè il complementare dell'insieme $\{(0,0)\}$ (tutto il piano ad eccezione dell'origine).
Per la f_4 l'unica condizione è che l'argomento del logaritmo sia positivo, dato che il denominatore è sempre diverso da zero. Quindi deve essere $x_1 + x_2^2 - 1 > 0$, cioè $x_1 > 1 - x_2^2$. Ricordando la geometria analitica della parte I del corso si ha che il campo di esistenza, cioè l'insieme

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 1 - x_2^2\},$$

è la parte di piano evidenziata in grigio qui a fianco. È un insieme aperto.



Vediamo altri esempi di importanti classi di funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

- **Funzioni lineari**. Sia $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

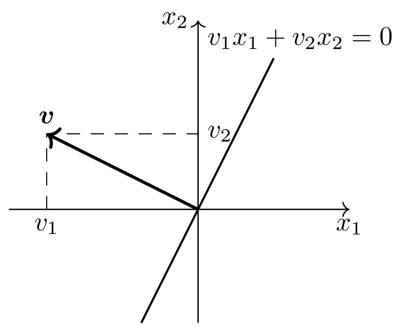
  $$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle \ ^{8} \ = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n$$

  è lineare, come abbiamo già visto nella parte III. Ogni funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ è di questa forma, cioè si può scrivere come prodotto interno di un vettore fissato $\boldsymbol{v}$ per il vettore $\boldsymbol{x}$. Nella terminologia della parte III potremmo dire che $\boldsymbol{v}$ è il vettore di rappresentazione della funzione lineare.

  Se $n = 2$ si ha
  $$f(x_1, x_2) = v_1x_1 + v_2x_2.$$
  Il grafico di questa funzione, qualunque siano i coefficienti, è un piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$. [9] Osserviamo che l'insieme

  $$\Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 0\Big\},$$

  cioè l'insieme delle soluzioni dell'equazione $v_1x_1 + v_2x_2 = 0$, è in $\mathbb{R}^2$ la retta ortogonale (perpendicolare) al vettore $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$.



  Con $n = 3$ le funzioni lineari sono quelle del tipo

  $$f(x_1, x_2, x_3) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$$

  e l'insieme delle soluzioni dell'equazione $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$ è questa volta il piano (in $\mathbb{R}^3$) ortogonale (perpendicolare) al vettore $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

[7] Si tratta della funzione che associa al punto (x_1, x_2) il massimo tra x_1 e x_2.
[8] Ricordo che la scrittura $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, dove $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^n$, indica il prodotto interno dei due: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$.
[9] Le funzioni lineari in una variabile sono le funzioni del tipo $f(x) = vx$, con $v \in \mathbb{R}$. Sono quindi quelle che hanno per grafico una retta per l'origine.

- **Forme quadratiche**. Sia A una matrice $n \times n$. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$$ [10]

si chiama forma quadratica associata ad A. Ad esempio, se $n = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ si ha } f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Nel caso particolare in cui A sia una matrice diagonale di elementi λ_1, λ_2, con $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, si ha

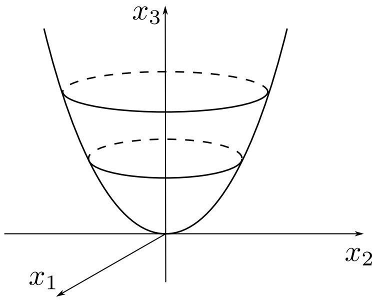
$$f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

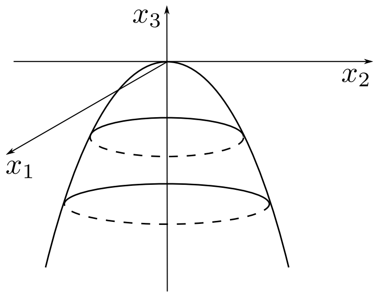
Il grafico di f dipende in modo cruciale dal segno di λ_1 e λ_2. Lasciando allo studente il compito di convincersi di quanto segue, mi limito ad elencare i tre casi possibili, accompagnandoli con un grafico.

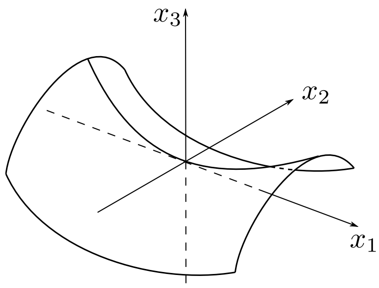
Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, come ad esempio in $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2$, il grafico di f è un *paraboloide*. I valori della funzione sono evidentemente sempre non negativi e quindi il paraboloide sta nel semispazio delle $x_3 \geq 0$ (figura sotto a sinistra). Si può anche scrivere che $f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty)$.

Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ il grafico di f è ancora un paraboloide. I valori della funzione sono evidentemente sempre non positivi e quindi il paraboloide sta nel semispazio delle $x_3 \leq 0$ (figura al centro). Si può anche scrivere che $f(\mathbb{R}^2) = (-\infty, 0]$.

Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ il grafico di f è un *iperboloide* (a una falda). La funzione può assumere sia valori positivi sia valori negativi (figura a destra). In questo caso $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.



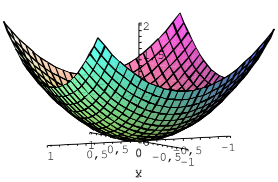
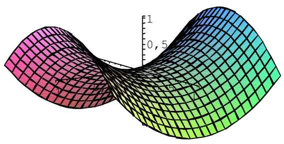
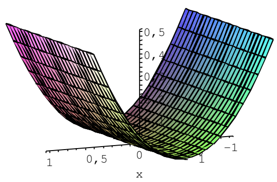




Alle forme quadratiche e in particolare allo studio del segno di queste è dedicata la prossima dispensa.

Osservazione Il caso in cui uno dei due coefficienti λ_1, λ_2 è nullo è meno significativo. Vale comunque la pena osservare che (mettiamo sia $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$) in tal caso si ha $f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2$ e il valore di f dipende dalla sola x_1. Si tratta di un paraboloide degenere e si intuisce facilmente che il grafico si ottiene facendo muovere la parabola $x_3 = \lambda_1 x_1^2$ lungo l'asse x_2.

Qui sotto riporto i grafici di alcune forme quadratiche, ottenuti con un software scientifico. Il grafico a destra è quello di una forma quadratica del tipo $f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2$ con $\lambda_1 > 0$.

- **Polinomi**. Un *monomio* in $\mathbb{R}^n$ è una funzione della forma

$$m(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{z_1} \cdots x_n^{z_n},$$

dove $z_1, \ldots, z_n$ sono interi non negativi. Si chiama **grado** del monomio il numero intero non negativo $z_1 + \ldots + z_n$.

Un *polinomio* è una combinazione lineare di monomi. Il grado di un polinomio è il massimo dei gradi dei monomi di cui è combinazione lineare.

[10] Si tratta del prodotto interno di $A\boldsymbol{x}$, che è un vettore di $\mathbb{R}^n$ dato dal prodotto di A per $\boldsymbol{x}$, per il vettore $\boldsymbol{x}$.

Ad esempio, è un monomio in tre variabili la funzione $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3$; si tratta di un monomio di sesto grado. Un esempio di polinomio è la funzione $p(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^2 x_3^3 - 3x_1^4 x_2^3 x_3^2$: è un polinomio di nono grado.

Il più generale polinomio di secondo grado in $\mathbb{R}^2$ è

$$P(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f,$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e almeno uno dei coefficienti a, b, c diverso da zero (altrimenti è ancora un polinomio ma non è più di secondo grado).

Il più generale polinomio di secondo grado in $\mathbb{R}^3$ è

$$P(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + hx_2 + ix_3 + j,$$

con $a, b, \ldots, j \in \mathbb{R}$ e almeno uno dei coefficienti $a, b, \ldots, f$ diverso da zero. In generale non si tratta ovviamente di una forma quadratica (lo è se e solo se $g = h = i = j = 0$). Volendo lo si può vedere come la somma di una forma quadratica, di una funzione lineare e di una costante.

- *Funzioni radiali.*

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *radiale* se esiste una funzione $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(\boldsymbol{x}) = f_0(\|\boldsymbol{x}\|), \text{ per ogni } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$ [11]

La funzione f_0 si dice il *profilo* di f. Più in generale la funzione profilo può essere definita in un intervallo del tipo $[0, r)$ e la funzione radiale f in un intorno dell'origine di raggio r.

Ad esempio, la funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ è radiale, in quanto

$$x_1^2 + x_2^2 = \|(x_1, x_2)\|^2.$$

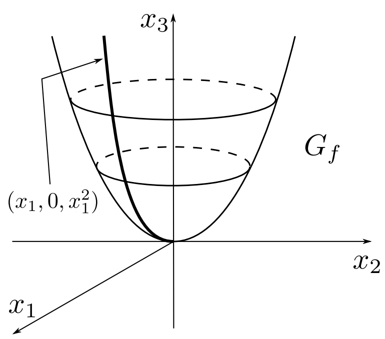
Il profilo è la funzione $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f_0(t) = t^2$.

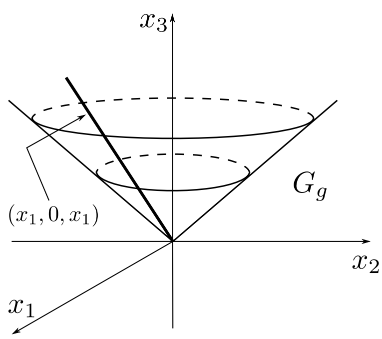
Osservazione Il grafico di una funzione radiale definita in $\mathbb{R}^2$ si ottiene "facendo ruotare il suo profilo" attorno all'asse x_3. Ecco alcuni esempi di funzioni radiali, con i relativi grafici.

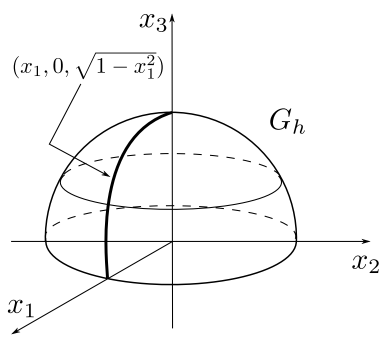
- ▷ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, definita in tutto $\mathbb{R}^2$; come detto ha profilo $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f_0(t) = t^2$.
- ▷ $g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, definita in tutto $\mathbb{R}^2$; ha profilo $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f_0(t) = t$.
- ▷ $h(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, definita nel cerchio unitario

$$B(0, 1) = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\Big\};$$

ha profilo $f_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f_0(t) = \sqrt{1 - t^2}$.







Il grafico di f è il paraboloide già incontrato prima; il grafico di g è una superficie conica con vertice nell'origine; Il grafico di h è una calotta sferica con centro nell'origine.

[11] La definizione può risultare di difficile comprensione. Si noti che f è funzione di n variabili, mentre f_0 e funzione di una variabile, cioè di un numero reale. Infatti l'argomento di f_0 è la norma del vettore $\boldsymbol{x}$, che è appunto un numero reale. In sostanza la definizione dice che il valore che la funzione associa ad $\boldsymbol{x}$ dipende soltanto dalla norma di $\boldsymbol{x}$ o, in altre parole, che a punti alla stessa distanza dall'origine la funzione associa lo stesso valore.

Esercizio 1.1 Si descriva il campo di esistenza delle seguenti funzioni, specificando se si tratta di insiemi aperti, chiusi o né aperti né chiusi:

(a) $f(x,y) = \ln(x - y + 1)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1 + x + y}{1 - 2x + 3y}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2 + 1}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(e) $f(x,y) = \ln(1 - 2x^2 - y^2)$

(f) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

(g) $f(x,y) = \ln(1 - xy)$

(h) $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2}$

Esercizio 1.2 Si determini il campo di esistenza delle seguenti funzioni e lo si rappresenti graficamente.

(a) $f(x,y) = \sqrt{x(y+1)}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x-y}$

(c) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1-y}\right)$

(d) $f(x,y) = \ln y + \ln(x+y)$

(e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-4}{y-1}}$

(f) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{x-y^2+1}\right)$

(g) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{xy+1}{x+y+1}}$

(h) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{(x-1)^2+y^2-4}{4-x^2-(y-1)^2}\right)$

Esercizio 1.3 Si scriva l'espressione analitica del profilo delle seguenti funzioni radiali:

(a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \ln(2 - x^2 - y^2)$

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2$

(f) $f(x,y) = 1 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

1.3 Insiemi di livello e curve di livello

Farsi un'idea del grafico di una funzione di più variabili è piuttosto difficile. Come già detto, anzi, non è nemmeno possibile rappresentare il grafico se il numero di variabili è maggiore di 2. Nel caso di due variabili il grafico è una superficie in $\mathbb{R}^3$ e non ci sono tecniche generali per trovarlo, simili a quelle che abbiamo studiato nella Parte II.

Una valida alternativa al grafico è data dagli insiemi di livello, che nel caso di due variabili sono le *curve di livello*. In generale si ha

Definizione Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si definisce **insieme di livello** k di f l'insieme dei punti di A in cui la funzione ha valore k, cioè formalmente

$$L_k = \big\{\boldsymbol{x} \in A : f(\boldsymbol{x}) = k\big\}.$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme del dominio della funzione.

Nel caso $n = 2$ tali insiemi sono solitamente curve nel piano e prendono quindi il nome di **curve di livello** k. Ovviamente l'insieme (la curva) cambia al variare del valore k. Studiare le curve di livello significa appunto capire come variano le curve al variare del livello.

Esempio Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$. Naturalmente, se pensiamo ad un livello negativo, ad esempio -1, dobbiamo dire che la curva di livello -1 non c'è poiché la funzione non può avere valore negativo. Pertanto la curva di livello -1 è l'insieme vuoto. La curva di livello 0 invece non è vuota, ma si riduce al solo punto origine $(0,0)$.[12]

Se ora fissiamo un livello positivo, ad esempio 1, la curva corrispondente questa volta c'è ed è proprio una curva in senso letterale: si tratta dell'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 = 1$ e quindi, come noto, della circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Al variare del livello k (positivo) abbiamo circonferenze con centro sempre nell'origine e raggio $\sqrt{k}$. Quindi al crescere di k le curve di livello sono circonferenze di raggio crescente.

Esempio Consideriamo la funzione $f(x,y) = xy$. La curva di livello 0 è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $xy = 0$ e cioè i due assi cartesiani.[13] La curva di livello k positivo è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $xy = k$ e

[12] Quindi si noti che la curva può non esserci oppure può essere qualcosa che solitamente non chiameremmo "curva".
[13] La curva di livello 0 è quindi l'insieme dei punti che stanno in almeno uno dei due assi.

cioè i punti di un'iperbole centrata nell'origine e rami nel primo e terzo quadrante. Anche con k negativo si hanno i punti di un'iperbole centrata nell'origine, ma con rami nel secondo e quarto quadrante.

Osservazione Le curve di livello possono essere una valida alternativa al grafico della funzione in quanto, anche se non ci mostrano i valori della funzione, ci dicono però in quali punti la funzione ha valore costante, al variare di questo valore. È la tecnica usata nelle mappe geografiche per indicare la morfologia del terreno (il livello indica la quota sul livello del mare) oppure nelle mappe meteo (il livello indica la pressione al suolo o in quota). Nelle mappe geografiche la presenza di curve di livello molto ravvicinate indica una variazione molto rapida della quota, e quindi una zona di pendenza molto forte, mentre curve di livello molto lontane indicano regioni sostanzialmente piatte.

Vediamo qualche altro esempio.

Esempi

- Le curve di livello k della funzione $f(x,y) = x + y^2 + 1$ si ottengono a partire dall'equazione $x + y^2 + 1 = k$, cioè $x = -y^2 + k - 1$. Si tratta di parabole con asse dato dall'asse x e concave verso sinistra. Al crescere del valore k la parabola si "sposta verso destra".
- Le curve di livello k della funzione $f(x,y) = \ln(x + y)$ si ottengono a partire dall'equazione $\ln(x + y) = k$, cioè $x + y = e^k$, cioè $y = e^k - x$. Si tratta ovviamente di rette di pendenza -1 e ordinata all'origine e^k, quindi certamente positiva.[14] Al crescere di k la retta si "sposta verso l'alto".
- Le curve di livello k della funzione $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ si ottengono a partire dall'equazione $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = k$, cioè $1-x^2-y^2 = k^2$, cioè ancora $x^2+y^2 = 1-k^2$. Se k è negativo non c'è curva di livello, dato che l'equazione iniziale $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = k$ non ha certamente soluzioni. Se $k = 0$ abbiamo la circonferenze di centro l'origine e raggio 1. Se $k > 0$ abbiamo circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{1 - k^2}$: la quantità sotto radice deve però essere positiva, e quindi deve anche essere $k < 1$. Infine per $k = 1$ la curva si riduce alla sola origine. Si riconoscerà la morfologia della calotta sferica rappresentata un paio di pagine fa.

Esercizio 1.4 Si descrivano le curve di livello 1 delle seguenti funzioni.

(a) $f(x,y) = \ln(x - y + 1)$ (b) $f(x,y) = \dfrac{1 + x + y}{1 - 2x + 3y}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2 + 1}$ (d) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(e) $f(x,y) = \ln(1 - 2x^2 - y^2)$ (f) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

(g) $f(x,y) = \ln(1 - xy)$ (h) $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2}$

1.4 Restrizione di una funzione ad una curva

Esaminiamo ora un concetto che, pur essendo presente anche nella trattazione delle funzioni di una variabile, trova però il suo significato più pieno con le funzioni di più variabili. Tale concetto ci sarà utile in seguito, soprattutto quando parleremo di limiti, continuità, derivabilità e ricerca dei punti di massimo e di minimo. Si tratta del concetto di *restrizione* di una funzione ad una curva (del piano). Consideriamo soltanto il caso di una curva definita attraverso un'equazione.

Supponiamo sia data una funzione
$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
e una curva espressa da un'equazione $g(x,y) = 0$. Supponiamo inoltre che nell'equazione si possa algebricamente esplicitare una delle due variabili, cioè che si possa ricavare una delle due variabili in funzione dell'altra. Abbiamo pertanto modo di scrivere l'equazione in una delle due forme equivalenti
$$y = g_1(x) \qquad \text{oppure} \qquad x = g_2(y).$$

Chiamiamo allora *restrizione*[15] *di f alla curva* una delle due funzioni
$$f\big|_{y=g_1(x)} = f(x, g_1(x)) \qquad \text{oppure} \qquad f\big|_{x=g_2(y)} = f(g_2(y), y).$$

Osservazione Si noti che le restrizioni sono funzioni di una sola variabile. Il fatto che consideriamo la funzione soltanto sui punti di una curva fa sì che l'espressione si riduca a dipendere da una variabile sola.

[14] Questo fa sì che la retta stia nell'insieme di esistenza della funzione, che non è tutto $\mathbb{R}^2$.

[15] Il nome restrizione deriva da fatto che in pratica non considero la f su tutto il suo dominio, ma soltanto sui punti della curva.

Esempi

- Data la funzione $f(x,y) = x - y$, la sua restrizione all'asse x è $f\big|_{y=0} = f(x,0) = x$.

  La restrizione della stessa funzione alla bisettrice di equazione $y = x$ è la funzione $f\big|_{y=x} = x - x = 0$, cioè la funzione identicamente nulla.

- Data la funzione $f(x,y) = x + y$, la sua restrizione alla curve di equazione $x^2 + y - 1 = 0$ è la funzione $f\big|_{y=1-x^2} = f(x, 1-x^2) = x + 1 - x^2$.

- La restrizione della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ alla bisettrice di equazione $y = x$ è la funzione $f\big|_{y=x} = \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Si tratta di una funzione costante sulla restrizione.

  Una restrizione della stessa funzione alla retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è $f\big|_{y=1-x} = \frac{x\cdot(1-x)}{x^2+(1-x)^2} = \frac{x-x^2}{2x^2-2x+1}$.

Esercizio 1.5 Si scriva la restrizione della funzione $f(x,y) = x/y$ alla curva di equazione $xy = 1$.

Esercizio 1.6 Si scriva la restrizione della funzione $f(x,y) = x + \ln(x+y)$ alla curva di equazione $xy = 1$, in funzione della variabile y.

Esercizio 1.7 Si scriva la restrizione della funzione $f(x,y) = x + e^{xy^2}$ alla curva di equazione $\ln x - y = 0$.

2 Limite

Rinuncio a formulare una definizione rigorosa del concetto di limite per funzioni di più variabili, come d'altra parte ho già fatto per le funzioni in una variabile.

Si potrebbe dare un significato preciso a scritture come

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \text{ (limite finito)} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \pm\infty$$

e anche come

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \ell \text{ (limite finito)}^{16} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \pm\infty.$$

Osservazioni Il significato concreto è sempre lo stesso: a che valore tende la funzione quando le variabili tendono ad un punto del piano. Mi limito soltanto ad un paio di considerazioni.

La particolarità più rilevante che si presenta passando da una a due variabili è che le modalità con cui le variabili si possono avvicinare ad un punto sono molto più varie. Mentre in una variabile la x tende ad x_0 o da destra o da sinistra, in due variabili (x,y) può tendere a (x_0, y_0) lungo rette (infinite direzioni), lungo parabole, lungo curve di tipo polinomiale, esponenziale, logaritmico, ... Non si potrebbero nemmeno elencare tutte le modalità.

La prima considerazione è ora questa: se il limite esiste, deve chiaramente essere lo stesso lungo tutte le "modalità di avvicinamento". E la seconda (equivalente alla prima) è che se ci sono due modalità lungo le quali i limiti sono diversi, allora possiamo dire che il limite non esiste.

In tutto questo è chiaro che risulta utile il concetto di restrizione, visto nella sezione precedente.

Da ultimo, faccio osservare anche che non si può provare che il limite esiste e calcolarlo operando su tutte le restrizioni possibili, ma si può provare che non esiste trovando due diverse restrizioni lungo le quali troviamo limiti diversi.

A titolo di esempio, si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \text{con } (x,y) \neq (0,0).$$

Si può verificare facilmente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{1}$$

non esiste. Se consideriamo la restrizione lungo l'asse x otteniamo

$$f\big|_{y=0} = f(x,0) = 0.$$

[16] Si osservi che ho scritto $(x,y) \to \infty$ e non $\pm\infty$. Per le funzioni di due variabili la variabile tende ad un "infinito senza segno" (potrebbe essere che la x tenda a $+\infty$ e la y tenda invece a $-\infty$). Quindi si dice che la variabile tende ad ∞, intendendo che (x,y) si allontana infinitamente dall'origine, in tutte le direzioni possibili.

Il limite lungo questa restrizione è

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Anche lungo la restrizione dell'asse y il limite è zero, dato che

$$f\big|_{x=0} = f(0,y) = 0.$$

Ma se consideriamo la restrizione alla bisettrice del primo e terzo quadrante si ha

$$f\big|_{y=x} = f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

e pertanto il limite (1) non esiste.

Un altro esempio:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} e^{x+y} \quad \text{non esiste.}$$

Infatti, se consideriamo la restrizione di $f(x,y) = e^{x+y}$ all'asse x otteniamo la funzione $f|_{y=0} = f(x,0) = e^x$. Questa per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$, mentre per $x \to -\infty$ tende a 0. Quindi il limite non esiste, essendo diverso su due restrizioni che "tendono entrambe all'infinito". Si osservi che otterremmo lo stesso risultato in una variabile con la funzione e^x se definissimo il limite per $x \to \infty$, anziché per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 2.1 Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, si calcolino i limiti di f nell'origine lungo le seguenti restrizioni:

(a) la retta di equazione $y = x$

(b) la parabola di equazione $y = x^2$

(c) la parabola di equazione $x = y^2$

Esercizio 2.2 Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, si calcolino i limiti nell'origine di f lungo le seguenti restrizioni:

(a) la retta di equazione $y = x$

(b) la parabola di equazione $y = x^2$

(c) la parabola di equazione $x = y^2$

(d) la curva di equazione $y = e^x - 1$

3 Continuità

Veniamo ora al concetto di continuità, già trattato nella II parte per le funzioni di una variabile. La definizione è formalmente la stessa che abbiamo già incontrato.

Definizione Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e se $\boldsymbol{x}^0$ è un punto del dominio A, si dice che f è **continua** in $\boldsymbol{x}^0$ se si ha che

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0).$$

Se f è continua in tutti i punti di A si dice che f è continua in A.

Per le funzioni continue valgono in $\mathbb{R}^n$ tutti i risultati già visti in $\mathbb{R}$. In particolare vale ancora che le funzioni elementari sono continue e che somme, prodotti, quozienti di funzioni continue sono funzioni continue. Infine funzioni composte di funzioni continue sono funzioni continue.

Ad esempio possiamo affermare che sono continue, nei rispettivi insiemi di esistenza, le funzioni

- $f(x_1,x_2) = 2x_1^2x_2 + 3x_1x_2^3$
- $g(x_1,x_2,x_3) = \ln(x_1 - x_2 + x_3)$
- $h(x_1,x_2,\dots,x_n) = e^{-\left\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\right\|^2} = e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}$

- Anche la funzione
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$
dove esiste,[17] è continua.

Vale in $\mathbb{R}^n$ un teorema che generalizza il fondamentale *Teorema di Weierstrass*, che lo studente ha visto per funzioni di una variabile.

Teorema (di Weierstrass) Se f è definita e continua in un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, allora valgono le seguenti proprietà:

(i) f è limitata e la sua immagine è un insieme chiuso e limitato;

(ii) f assume quindi un valore massimo e un valore minimo.

4 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) $f(x, y) = \ln(x - y + 1)$. L'unica condizione di esistenza è data dalla disequazione $x - y + 1 > 0$, cioè $y < x + 1$. Il campo di esistenza di f è quindi il semipiano che si trova al di sotto delle retta di equazione $y = x + 1$. La retta non fa parte dell'insieme. Si tratta di un insieme aperto, dato che tutti i suoi punti sono interni all'insieme.

(b) $f(x, y) = \dfrac{1 + x + y}{1 - 2x + 3y}$. La condizione di esistenza è data dal non annullarsi del denominatore, cioè dalla condizione $1 - 2x + 3y \neq 0$, che si può anche scrivere $y \neq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Si tratta quindi dei punti del piano che non stanno sulla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. L'insieme è aperto, dato che tutti i punti sono interni.

(c) $f(x, y) = \sqrt{x + y^2 + 1}$. La condizione di esistenza è data da $x + y^2 + 1 \geq 0$, soddisfatta da tutti i punti del piano che stanno alla destra della parabola di equazione $x = -y^2 - 1$. Si tratta di una parabola con asse coincidente con l'asse x, con la concavità rivolta verso sinistra. Il campo di esistenza di f è un insieme chiuso, dato che i punti sulla parabola fanno parte dell'insieme.

(d) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. La condizione di esistenza è data da $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, cioè $x^2 + y^2 \leq 1$, soddisfatta da tutti i punti del piano appartenenti al cerchio di centro l'origine e raggio 1 (bordo compreso). Il campo di esistenza di f è un insieme chiuso, dato che i punti sulla circonferenza fanno parte dell'insieme.

(e) $f(x, y) = \ln(1 - 2x^2 - y^2)$. La condizione di esistenza è data da $1 - 2x^2 - y^2 > 0$, cioè $2x^2 + y^2 < 1$, soddisfatta da tutti i punti del piano interni all'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = 1$ (bordo escluso). Il campo di esistenza di f è un insieme aperto, dato che i punti sull'ellisse non fanno parte dell'insieme.

(f) $f(x, y) = \sqrt{xy}$. La condizione di esistenza è data da $xy \geq 0$, che è verificata nel primo oppure nel terzo quadrante, bordo compreso. Si tratta di un insieme chiuso.

(g) $f(x, y) = \ln(1 - xy)$. La condizione di esistenza è data da $1 - xy > 0$, cioè $xy < 1$. La disuguaglianza è verificata nella regione di piano compresa tra i due rami dell'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$. I rami dell'iperbole si trovano nel primo e nel terzo quadrante. I punti che stanno sull'iperbole non sono compresi e quindi l'insieme è aperto.

(h) $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$. La condizione di esistenza è data da $1 - y^2 \geq 0$, cioè $y^2 \leq 1$, che è verificata se $-1 \leq y \leq 1$. Quindi il campo di esistenza di f è la regione di piano compresa tra le due rette di equazione $y = -1$ e $y = 1$. L'insieme è chiuso in quanto il bordo è compreso.

[17] Chiaramente la funzione esiste nei punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ in cui si ha $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$.

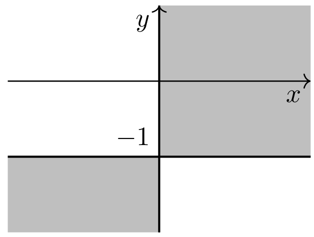
Esercizio 1.2

(a) $f(x,y) = \sqrt{x(y+1)}$.
La condizione di esistenza è $x(y+1) \geq 0$, che si può esprimere attraverso i sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y+1 \leq 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq -1. \end{cases}$$



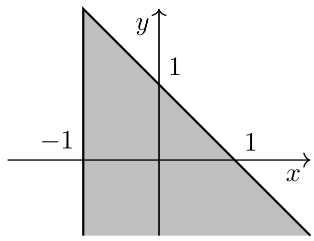
L'insieme è raffigurato a fianco.[18] Il bordo è compreso.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x-y}$.
La condizione di esistenza è espressa dal sistema

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x-y \geq 0. \end{cases}$$

Si noti che, a differenza del caso precedente, qui si vuole che entrambi gli argomenti delle radici siano non negativi. Quindi c'è un unico sistema che esprime le condizioni di esistenza. Il sistema equivale a

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \leq 1-x. \end{cases}$$



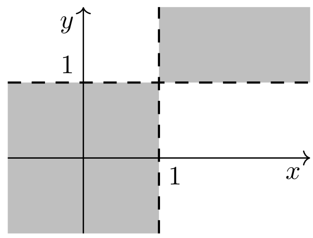
L'insieme è raffigurato a fianco.[19] Il bordo è compreso.

(c) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1-y}\right)$.
La condizione di esistenza è $\frac{1-x}{1-y} > 0$, che si può esprimere attraverso i sistemi

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1-x < 0 \\ 1-y < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 1. \end{cases}$$

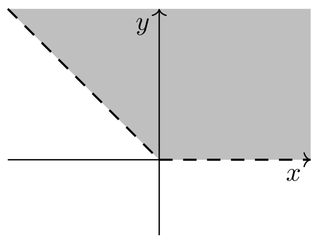


L'insieme è raffigurato a fianco. Il bordo non è compreso.

(d) $f(x,y) = \ln y + \ln(x+y)$.

La condizione di esistenza è espressa dal sistema

$$\begin{cases} y > 0 \\ x+y > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y > 0 \\ y > -x. \end{cases}$$



L'insieme è raffigurato a fianco. Il bordo non è compreso.

[18] L'insieme è l'unione dei due insiemi che sono soluzione dei due sistemi. Si noti che per risolvere ciascuno dei sistemi si effettua un'intersezione: ad esempio nel primo le soluzioni sono l'intersezione del semipiano $x \geq 0$ con il semipiano $y \geq -1$. Per ottenere le soluzioni complessive si devono invece unire quelle trovate in precedenza.

[19] Qui l'insieme è l'intersezione dei due semipiani, in quanto vogliamo che le due condizioni valgano entrambe. Si noti ancora la differenza con l'esercizio precedente: in quello la condizione era che il prodotto dei due fattori fosse maggiore o uguale a zero (cosa che avviene se i due fattori hanno lo stesso segno, e quindi c'erano i due sistemi), mentre in questo vogliamo che i due fattori siano entrambi positivi (e quindi c'è un solo sistema).

(e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-4}{y-1}}$.

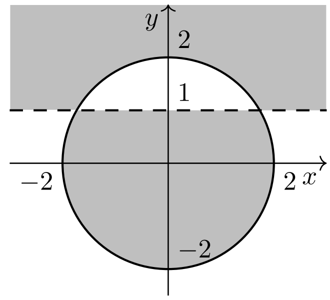
La condizione di esistenza è $\frac{x^2+y^2-4}{y-1} \geq 0$, che si può esprimere attraverso i sistemi

$$\begin{cases} x^2+y^2-4 \geq 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+y^2-4 \leq 0 \\ y-1 < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 4 \\ y > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ y < 1. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato a fianco. Il bordo è solo in parte compreso: i punti che stanno sulla circonferenza sono compresi, quelli sulla retta no.



(f) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{x-y^2+1}\right)$.

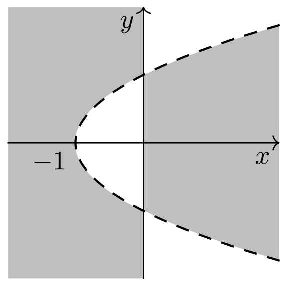
La condizione di esistenza è $\frac{x}{x-y^2+1} > 0$, che si può esprimere attraverso i sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-y^2+1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x-y^2+1 < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > y^2-1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < y^2-1. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato a fianco. Il bordo non è compreso.



(g) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{xy+1}{x+y+1}}$.

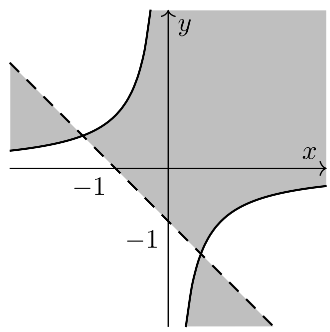
La condizione di esistenza è $\frac{xy+1}{x+y+1} \geq 0$, che si può esprimere attraverso i sistemi

$$\begin{cases} xy+1 \geq 0 \\ x+y+1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} xy+1 \leq 0 \\ x+y+1 < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} xy \geq -1 \\ y > -x-1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} xy \leq -1 \\ y < -x-1. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato a fianco. Il bordo è solo in parte compreso.

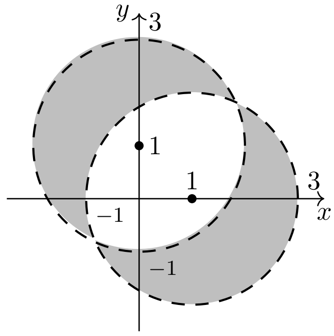


(h) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{(x-1)^2+y^2-4}{4-x^2-(y-1)^2}\right)$.

La condizione di esistenza è $\frac{(x-1)^2+y^2-4}{4-x^2-(y-1)^2} > 0$, che si può esprimere attraverso i sistemi

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2 > 4 \\ x^2+(y-1)^2 < 4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} (x-1)^2+y^2 < 4 \\ x^2+(y-1)^2 > 4. \end{cases}$$

Le corrispondenti equazioni individuano due circonferenze, rispettivamente di centro $(1,0)$ e $(0,1)$, entrambe di raggio 2. L'insieme è raffigurato a fianco. Il bordo non è compreso.



Esercizio 1.3

(a) Il profilo di f è la funzione $f_0 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = e^{-t^2}$.
Infatti risulta: $f(x,y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2}) = e^{-(\sqrt{x^2+y^2})^2} = e^{-x^2-y^2}$.

(b) Il profilo di f è la funzione $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = \sqrt{t^2+1}$.
Infatti risulta: $f(x, y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2}) = \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2+1} = \sqrt{x^2+y^2+1}$.

(c) Il profilo di f è la funzione $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
Infatti risulta: $f(x, y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

(d) Il profilo di f è la funzione $f_0 : [0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = \ln(2 - t^2)$.
Infatti risulta: $f(x, y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln(2 - (\sqrt{x^2+y^2})^2) = \ln(2 - x^2 - y^2)$.

(e) Il profilo di f è la funzione $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = t - t^2$.
Infatti risulta: $f(x, y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2}) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2$.

(f) Il profilo di f è la funzione $f_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = 1 + t^4$.
Infatti risulta: $f(x, y) = 1 + (x^2 + y^2)^2 = f_0(\sqrt{x^2+y^2}) = 1 + (\sqrt{x^2+y^2})^4$.

Esercizio 1.4

(a) La curva di livello 1 ha equazione $\ln(x - y + 1) = 1$, cioè $x - y + 1 = e$. Si tratta di una retta.

(b) La curva di livello 1 ha equazione $\frac{1+x+y}{1-2x+3y} = 1$, cioè $3x - 2y = 0$. Si tratta di una retta per l'origine.

(c) La curva di livello 1 ha equazione $\sqrt{x+y^2+1} = 1$, cioè $x + y^2 = 0$. Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse x.

(d) La curva di livello 1 ha equazione $\sqrt{1-x^2-y^2} = 1$, cioè $x^2 + y^2 = 0$. La curva si riduce ad un punto, l'origine.

(e) La curva di livello 1 ha equazione $\ln(1 - 2x^2 - y^2) = 1$, cioè $1 - 2x^2 - y^2 = e$, cioè $2x^2 + y^2 = 1 - e$. L'equazione non ha soluzioni e quindi la curva è l'insieme vuoto.

(f) La curva di livello 1 ha equazione $\sqrt{xy} = 1$, cioè $xy = 1$. La curva è un'iperbole che sta nel primo e terzo quadrante.

(g) La curva di livello 1 ha equazione $\ln(1 - xy) = 1$, cioè $1 - xy = e$, cioè $xy = 1 - e$. La curva è un'iperbole che sta nel secondo e quarto quadrante.

(h) La curva di livello 1 ha equazione $\sqrt{1-y^2} = 1$, cioè $y^2 = 0$. L'equazione definisce l'asse x.

Esercizio 1.5

Per $x \neq 0$ nell'equazione si può esplicitare la y scrivendo $y = \frac{1}{x}$. La restrizione è, con $x \neq 0$, la funzione $f(x, \frac{1}{x}) = x^2$.

Esercizio 1.6

Per $y \neq 0$ nell'equazione si può esplicitare la x scrivendo $x = \frac{1}{y}$. La restrizione è, con $y \neq 0$, la funzione $f(\frac{1}{y}, y) = \frac{1}{y} + \ln(\frac{1}{y} + y)$.

Esercizio 1.7

La curva è definita solo sulle x positive. Si può esplicitare la y scrivendo $y = \ln x$. La restrizione è, con $x > 0$, la funzione $f(x, \ln x) = x + e^{x \ln^2 x}$.

Esercizio 2.1

(a) Lungo la retta di equazione $y = x$, ad eccezione dell'origine, la funzione f vale zero. Il limite è quindi zero.

(b) Lungo la parabola di equazione $y = x^2$, ad eccezione dei punti $(0, 0)$ e $(-1, 1)$, la restrizione di f è la funzione $f\big|_{y=x^2} = \frac{x-x^2}{x+x^2} = \frac{1-x}{1+x}$. Per $x \to 0$ il limite vale 1.

(c) Lungo la parabola di equazione $x = y^2$, ad eccezione dei punti $(0, 0)$ e $(1, -1)$, la restrizione di f è la funzione $f\big|_{x=y^2} = \frac{y^2-y}{y^2+y} = \frac{y-1}{y+1}$. Per $y \to 0$ il limite vale -1.

Esercizio 2.2

(a) Lungo la retta di equazione $y = x$, la restrizione di f è la funzione $f\big|_{y=x} = \frac{2x^3}{2x^2} = x$, con $x \neq 0$, e quindi il limite è zero.

(b) Lungo la parabola di equazione $y = x^2$, la restrizione di f è la funzione $f\big|_{y=x^2} = \frac{x^3+x^6}{x^2+x^4} = \frac{x+x^4}{1+x^2}$, con $x \neq 0$. Per $x \to 0$ il limite vale 0.

(c) Lungo la parabola di equazione $x = y^2$, la restrizione di f è la funzione $f\big|_{x=y^2} = \frac{y^4+y}{y^2+1}$, per cui il limite per $y \to 0$ vale ancora 0.

(d) Lungo la curva di equazione $y = e^x - 1$, la restrizione di f è la funzione $f\big|_{y=e^x-1} = \frac{x^3+(e^x-1)^3}{x^2+(e^x-1)^2}$, per cui il limite è

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + (e^x - 1)^3}{x^2 + (e^x - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1 + (\frac{e^x-1}{x})^3)}{x^2(1 + (\frac{e^x-1}{x})^2)} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$[20]

In questo caso quindi il limite lungo quattro diverse restrizioni passanti per l'origine è sempre uguale a zero. Ci sono pertanto motivi per credere che il limite possa essere zero. Ribadisco però che i quattro risultati non sono sufficienti per avere la certezza e che anzi non potremmo mai concludere che il limite è zero solo sulla base di altre restrizioni utilizzate.

[20] Si ricordi il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{t} = 1$.