

## IV-2 Forme quadratiche

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Forme quadratiche</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Segno di una forma quadratica</b>	<b>2</b>
2.1	Il metodo dei minori principali . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Soluzioni degli esercizi</b>	<b>7</b>

---

### 1 Forme quadratiche

Si dice **forma quadratica** (scriverò per comodità f.q.) nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un qualunque polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .<sup>1</sup>

Posto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , una f.q. si può scrivere come

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Ad esempio, nel caso  $n = 2$  (due variabili), una f.q. è un polinomio del tipo

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2,$$
<sup>2</sup>

e, con  $n = 3$ , del tipo

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2.$$

Si può verificare facilmente che, usando una scrittura vettoriale/matriciale, possiamo scrivere una f.q. più sinteticamente come

$$Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

dove  $A$  è una matrice  $n \times n$  e il simbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica come sempre il prodotto interno in  $\mathbb{R}^n$ . Quindi l'espressione che definisce la f.q. si ottiene o come prodotto interno del vettore  $A\mathbf{x}$  per il vettore  $\mathbf{x}$ , oppure come prodotto matriciale del vettore riga  $\mathbf{x}$  per la matrice  $A$  per il vettore colonna  $\mathbf{x}$ .

Ad esempio, se prendiamo la f.q. in due variabili  $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$ , abbiamo

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

e analogamente

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1, -3x_1 + 4x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Una f.q. è quindi una particolare funzione  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di  $n$  variabili a valori reali.

Si verifica facilmente che si può sempre scrivere una f.q. usando una matrice *simmetrica*, come illustra il seguente esempio.

**Esempio** Si consideri la f.q.  $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 3x_2^2$ . Chiaramente si può scrivere

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

---

<sup>1</sup>Un polinomio  $P$ , di variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , è omogeneo di secondo grado se risulta  $P(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha^2 P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . In pratica in un tale polinomio compaiono soltanto i termini del tipo  $a_{ij}x_i x_j$ , con  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Detto a parole, è un polinomio di secondo grado e tutti i monomi in esso presenti sono di secondo grado (non ci sono monomi di primo grado o costanti).

<sup>2</sup>Si noti che i termini "misti", cioè in  $x_1x_2$ , sono termini simili, per la proprietà commutativa, e che quindi, sommandoli, si possono scrivere come un unico termine.

ma si può anche scrivere

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

e così la matrice che rappresenta la f.q. è simmetrica. Apparentemente è più complicato, ma ci sono invece enormi vantaggi. Analogamente, con la f.q.  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3$ , si può scrivere  $Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -3/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.^3$$

Attenzione! D'ora in avanti sottintenderò che la matrice di rappresentazione della f.q. sia simmetrica.

**Osservazione** Qualunque f.q. assume il valore 0 in corrispondenza del vettore nullo (in questo le f.q. assomigliano alle trasformazioni lineari).

## 2 Segno di una forma quadratica

È importante il segno di una forma quadratica  $Q(\mathbf{x})$ , cioè il segno che la funzione assume al variare del vettore  $\mathbf{x}$ . Appunto con riguardo al segno di tali valori, si possono classificare le f.q. come segue:

**Definizione** (*classificazione delle forme quadratiche in base al segno*)

(i) Una f.q. si dice **definita positiva** se

$$Q(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \neq \mathbf{0};$$

(ii) una f.q. si dice **definita negativa** se

$$Q(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \neq \mathbf{0};$$

(iii) una f.q. si dice **semidefinita positiva** se

$$Q(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \text{ ed esiste } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ tale che } Q(\mathbf{x}) = 0;$$

(iv) una f.q. si dice **semidefinita negativa** se

$$Q(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \text{ ed esiste } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ tale che } Q(\mathbf{x}) = 0;$$

(v) una f.q. si dice **indefinita** se

$$\text{esistono } \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ tali che } Q(\mathbf{x}) > 0 \text{ e } Q(\mathbf{y}) < 0.$$

**Osservazione** Occorre qualche commento. Per quanto riguarda le f.q. *definite* (casi (i) e (ii)), dobbiamo escludere il vettore nullo poiché come detto in  $\mathbf{0}$  la forma vale 0; nelle forme *semidefinite* (casi (iii) e (iv)) si richiede esplicitamente che mantengano sempre lo stesso segno e che si annullino in modo non banale, cioè in qualche vettore diverso da  $\mathbf{0}$ . Le forme *indefinite* (caso (v)) sono quelle che possono cambiare segno, cioè assumere sia segno positivo sia segno negativo.

**Esempi** Vediamo qualche semplice esempio in cui si può stabilire il segno di una forma quadratica senza troppa fatica.

- Consideriamo la f.q.  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

Non è difficile capire che è un esempio di forma definita positiva. Infatti assume valori sempre non negativi e si annulla solo nell'origine, quindi è positiva in qualunque punto diverso dall'origine.

- Consideriamo la f.q.  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ .

Si tratta questa volta di una forma semidefinita positiva. Infatti la possiamo riscrivere come  $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$  e ora si capisce che assume valori sempre non negativi ma non si annulla soltanto nell'origine, dato che ad esempio si annulla nel punto  $(1, -1)$ .<sup>4</sup>

<sup>3</sup>In generale, per ogni  $i, j$  possiamo scrivere

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}x_ix_j + \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}x_jx_i,$$

e da questa formula deriva la possibilità di rappresentare la forma quadratica con una matrice simmetrica.

<sup>4</sup>La forma si annulla evidentemente in tutti i punti in cui si ha  $x_1 + x_2 = 0$ , cioè sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

- Consideriamo la f.q.  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ .

Si tratta di una forma indefinita. Infatti possiamo osservare facilmente che può assumere sia valori positivi sia valori negativi: ad esempio risulta  $Q(1, 0) = 1$  e  $Q(0, 1) = -1$ .

Non è difficile costruire esempi di forme definite negative o semidefinite negative, modificando in modo ovvio gli esempi appena visti.

In generale non è così semplice stabilire il segno di una forma quadratica (per quelle definite in  $\mathbb{R}^2$  le cose sono abbastanza facili, ma quando abbiamo più di due variabili le cose possono diventare complicate). Per il riconoscimento di una f.q. esistono alcuni metodi operativi. Ne studiamo uno generale, che fa uso del segno di alcuni minori della matrice stessa.<sup>5</sup> Successivamente applichiamo il metodo ai casi particolari di forme quadratiche definite in  $\mathbb{R}^2$  e in  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.1 Il metodo dei minori principali

I criteri che presento per classificare una f.q. prendono in esame il segno di alcuni particolari minori della matrice della forma quadratica. Per la validità di questi criteri ricordo ancora una volta che la matrice *deve essere simmetrica*. Occorrono intanto un paio di definizioni.

**Definizione** Sia  $A$  una matrice simmetrica di ordine  $n$ .

- Si chiamano **minori principali di  $A$  di ordine  $k$**  ( $k \leq n$ ) i minori<sup>6</sup> che si ottengono considerando sottomatrici formate da  $k$  righe e dalle corrispondenti colonne.<sup>7</sup>
- Si chiamano **minori principali di Nord-Ovest (NO) di  $A$  di ordine  $k$**  i minori principali che si ottengono considerando le prime  $k$  righe (e quindi di conseguenza le prime  $k$  colonne).

**Esempio** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di ordine 1 sono gli elementi sulla diagonale (dati dalla 1<sup>a</sup> riga e 1<sup>a</sup> colonna, oppure 2<sup>a</sup> riga e 2<sup>a</sup> colonna, oppure 3<sup>a</sup> riga e 3<sup>a</sup> colonna):

$$1, \quad 4, \quad 6.$$

I minori principali di ordine 2 sono (1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>, oppure 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>, oppure 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> riga, e corrispondenti colonne):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -3, \quad \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -1.$$

Il minore principale di ordine 3 (tutte e tre le righe) è  $\det A = -1$ .

I minori principali di NO sono invece soltanto:

$$1 \text{ (di ordine 1)}, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \text{ (di ordine 2)}, \quad \det A = -1 \text{ (di ordine 3)}.$$

**Osservazione** I minori principali sono alcuni tra i minori della matrice, i minori principali di NO sono a loro volta alcuni dei minori principali. I minori principali (e quindi anche i minori principali di NO) si ottengono a partire da sottomatrici simmetriche rispetto alla diagonale principale.

**Osservazione** A titolo di esempio, in una matrice di ordine 4, vi sono:

- ▷ 4 minori principali di ordine 1,<sup>8</sup>
- ▷ 6 minori principali di ordine 2,<sup>9</sup>

<sup>5</sup>Ricordo che si chiama minore di una matrice il determinante di una sua qualunque sottomatrice quadrata.

<sup>6</sup>Ho già richiamato che cosa vuol dire minore di una matrice. Ricordo inoltre che un minore è di ordine  $k$  se la sottomatrice da cui proviene è di ordine  $k$ , cioè è una sottomatrice  $k \times k$ , cioè quadrata con  $k$  righe e  $k$  colonne.

<sup>7</sup>Per intendersi, se scelgo 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> riga devo scegliere 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> colonna.

<sup>8</sup>Sono gli elementi della diagonale principale della matrice.

<sup>9</sup>Sono i determinanti delle sottomatrici che si ottengono scegliendo in tutti i modi possibili 2 righe su 4 nella matrice: quindi 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>, 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>, 1<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>. Non c'è libertà di scelta sulle colonne, dato che devono essere quelle corrispondenti alle righe. Come noto il numero di scelte possibili di 2 elementi in un insieme di 4 elementi è  $\binom{4}{2} = 6$ .

- ▷ 4 minori principali di ordine 3,<sup>10</sup>
- ▷ 1 minore principale di ordine 4.<sup>11</sup>

Vi sono invece soltanto 4 minori principali di NO, uno per ogni ordine.

**Esercizio** Quanti sono i minori principali di NO di una matrice di ordine  $n$ ? Quanti sono i minori principali? E infine quanti sono i minori?

Qui di seguito fornisco, senza dimostrazione, i criteri per decidere il segno di una forma quadratica in base al segno dei minori principali della sua matrice.

- (i) La f.q.  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  è definita positiva se e solo se tutti i *minori principali di NO* di  $A$  sono positivi.
- (ii) La f.q.  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  è definita negativa se e solo se tutti i *minori principali di NO* di  $A$  di *ordine pari* sono positivi e tutti i *minori principali di NO* di  $A$  di *ordine dispari* sono negativi.
- (iii) La f.q.  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  è semidefinita positiva se e solo se tutti i *minori principali* di  $A$  sono non negativi ( $\geq 0$ ) e  $\det A = 0$ .
- (iv) La f.q.  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  è semidefinita negativa se e solo se tutti i *minori principali* di  $A$  di *ordine pari* sono non negativi ( $\geq 0$ ), tutti i *minori principali* di  $A$  di *ordine dispari* sono non positivi ( $\leq 0$ ) e  $\det A = 0$ .
- (v) la f.q. è indefinita se e solo se non si verifica nessuna delle situazioni precedenti.

**Osservazione** Prestate attenzione al fatto che per caratterizzare le forme definite si considerano i minori principali di NO, mentre per caratterizzare le forme semidefinite si devono considerare i minori principali, che sono in numero maggiore.

Riporto qui per comodità dello studente le regole per il caso particolare con  $n = 2$ , cioè le regole valide per le f.q. in due variabili, quelle del tipo

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{con matrice associata} \quad A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}.$$

- (i) La f.q.  $Q$  è definita positiva se e solo se  $a > 0$  e  $ac - \frac{b^2}{4} > 0$
- (ii) La f.q.  $Q$  è definita negativa se e solo se  $a < 0$  e  $ac - \frac{b^2}{4} > 0$
- (iii) La f.q.  $Q$  è semidefinita positiva se e solo se  $a \geq 0$ ,  $c \geq 0$  e  $ac - \frac{b^2}{4} = 0$
- (iv) La f.q.  $Q$  è semidefinita negativa se e solo se  $a \leq 0$ ,  $c \leq 0$  e  $ac - \frac{b^2}{4} = 0$
- (v) La f.q.  $Q$  è indefinita se e solo se  $ac - \frac{b^2}{4} < 0$ .

**Osservazione** Tutto si giustifica anche osservando che il discriminante dell'equazione  $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ , cioè  $\Delta = b^2 - 4ac$  è uguale a  $-4(ac - \frac{b^2}{4}) = -4 \det A$ . Quindi se  $\det A > 0$  allora  $\Delta < 0$  e pertanto il polinomio non si può scomporre (f.q. definita); se invece  $\det A < 0$  allora  $\Delta > 0$  e pertanto il polinomio si può scomporre e la f. q. risulta indefinita; se infine  $\det A = 0$  allora il polinomio è il quadrato di un binomio e si hanno i casi di f.q. semidefinita.

Vediamo alcuni esempi di studio del segno di una f.q.

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x, y) = 9x^2 + 12xy + 4y^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di  $A$  è nullo e i minori principali di ordine 1 sono positivi: quindi la f.q. è semidefinita positiva.

Lo si può verificare anche in base alla definizione: possiamo scrivere

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2,$$

<sup>10</sup>Sono i determinanti delle sottomatrici che si ottengono scegliendo in tutti i modi possibili 3 righe su 4 nella matrice e quindi  $1^a, 2^a$  e  $3^a$ , oppure  $1^a, 2^a$  e  $4^a$ , oppure  $1^a, 3^a$  e  $4^a$  oppure  $2^a, 3^a$  e  $4^a$ .

<sup>11</sup>È evidentemente il determinante della matrice.

e quindi si ha chiaramente  $Q(x, y) \geq 0$  in tutto  $\mathbb{R}^2$  e  $Q(x, y) = 0$  sui punti della retta  $3x + 2y = 0$  ( $y = -\frac{3}{2}x$ ), ossia sul sottospazio  $\{\alpha(2, -3) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di  $A$  è  $-2$ , negativo. Quindi la f.q. è indefinita. Si noti che ad esempio si ha  $Q(1, 0) = 1$  e  $Q(1, -1) = -1$ .

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 2z^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I tre minori principali di NO sono tutti uguali ad 1, quindi la f.q. è definita positiva.

Lo si può verificare anche in base alla definizione: possiamo scrivere

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 2z^2 = (x - y)^2 + (y + z)^2 + z^2,$$

e si tratta intanto di una quantità sicuramente non negativa.<sup>12</sup> Può essere nulla solo se i tre termini quadratici sono contemporaneamente nulli, cioè se

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

sistema omogeneo che ha come unica soluzione la soluzione nulla (per teorema di Cramer oppure con una semplice sostituzione). Pertanto per definizione la f.q. è definita positiva.

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 + 5x_2x_3 - 2x_3^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il minore principale di NO di ordine 1 è negativo: la f.q. *non* può essere quindi definita o semidefinita positiva. Il minore principale di NO di ordine 2 è 4, positivo: questo non aggiunge alcuna informazione. Il determinante di  $A$  è  $\frac{9}{2}$ , positivo: pertanto la f.q. *non* può essere definita o semidefinita negativa. Allora è necessariamente indefinita.

Possiamo verificare il risultato anche attraverso la definizione, osservando che ad esempio si ha  $Q(1, 0, 0) = -2 < 0$  e invece  $Q(1, 1, 1) = 1 > 0$ . La f.q. quindi cambia segno.

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il minore principale di NO di ordine 1 è positivo: la f.q. *non* può essere quindi definita o semidefinita negativa. Il minore principale di NO di ordine 2 è positivo: questo non aggiunge alcuna informazione. Il determinante di  $A$  è nullo: pertanto la f.q. *non* può essere definita positiva. Controllando tutti i restanti minori principali (di ordine 1 e 2), che sono positivi, si conclude che la f.q. è semidefinita positiva.

Possiamo verificare anche qui il risultato attraverso la definizione: possiamo scrivere

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2.$$

<sup>12</sup>Possiamo dire che è non negativa ma ancora non possiamo dire se è definita o semidefinita, senza studiare dove si annulla.

Quindi la forma è certamente non negativa. Vediamo se si annulla in modo non banale. Risulta  $Q(x_1, x_2, x_3) = 0$  se e solo se

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

che ha per soluzioni i vettori multipli di  $(-4, 2, 1)$ . Quindi la forma si annulla in modo non banale, e questo conferma che è semidefinita positiva.

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è nullo (due righe uguali) e gli altri minori principali sono tutti uguali a 0 oppure a 1. La f.q. è quindi semidefinita positiva. Verifichiamolo anche con la definizione. Dall'espressione iniziale si vede che la forma è certamente non negativa. Si annulla inoltre sul sottospazio<sup>13</sup>

$$\left\{ \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, -1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Esempio** Consideriamo la f.q.

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2.$$

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La f.q. non è definita, dato che il primo minore principale di NO è nullo. Il secondo minore principale di NO è negativo e, essendo di ordine pari, rende la f.q. indefinita.

Con qualche tentativo si può anche provare il risultato attraverso la definizione: ad esempio si ha che

$$Q(-2, 1, 0, 0) = -2 < 0 \quad \text{e} \quad Q(0, 0, 1, 0) = 1 > 0,$$

quindi la forma assume valori di segno opposto.

**Esercizio 2.1** Per ciascuna delle seguenti forme quadratiche, espresse attraverso la forma analitica, si scriva la matrice simmetrica che le rappresenta:

- (a)  $q(x, y) = 3x^2 - 3xy + y^2$
- (b)  $q(x, y, z) = -x^2 + 6xy + 5xz - 2y^2 - 2yz + 3z^2$
- (c)  $q(x, y, z, t) = xz - 2xt - y^2 + z^2 + 4zt.$

**Esercizio 2.2** Per ciascuna delle seguenti matrici si scriva la forma analitica della corrispondente forma quadratica; si classifichi quindi la f.q. col metodo dei minori principali.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.3** Date le seguenti forme quadratiche, si scriva la matrice (simmetrica) che le rappresenta e se ne studi il segno, sia attraverso la definizione sia attraverso il segno dei minori principali.

- (a)  $q_1(x, y, z) = (2x - y)^2 + z^2$
- (b)  $q_2(x, y, z) = x^2 + (x + y)^2 + (y - z)^2$
- (c)  $q_3(x, y, z) = -(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$
- (d)  $q_4(x, y, z) = (x - y)^2 - (y - z)^2$

<sup>13</sup>Per trovarlo bisogna naturalmente risolvere il sistema omogeneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Esercizio 2.4** Date le seguenti forme quadratiche, si scriva la matrice (simmetrica) che le rappresenta e se ne studi il segno col metodo dei minori principali. Si confermi poi il risultato ottenuto attraverso la definizione.

(a)  $q_1(x, y, z, t) = (x - t)^2 + y^2 + z^2$

(b)  $q_2(x, y, z, t) = -(x + y - t)^2 - (x - y + z)^2$

(c)  $q_3(x, y, z, t) = (x + z)^2 + 2y^2 + (y + t)^2 + z^2$

(d)  $q_4(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + (2z - t)^2 - z^2$

**Esercizio 2.5** Si determini il segno della forma quadratica

$$q(x, y, z) = (x - y)^2 + y^2 - z^2$$

e il segno della sua restrizione al sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori  $\mathbf{u}^1 = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{u}^2 = (0, 1, 0)$ .

**Esercizio 2.6** Si determini il segno della forma quadratica

$$q(x, y, z, t) = (x - z)^2 - (y + t)^2$$

e il segno della sua restrizione al sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  e  $(0, -1, 0, 1)$ .

### 3 Soluzioni degli esercizi

**Esercizio 2.1**

(a) La matrice simmetrica è

$$\begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice simmetrica è

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5/2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5/2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice simmetrica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.2**

- La f.q. rappresentata da  $A_1$  è

$$q_1(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2.$$

I minori principali di NO sono 3 e 2. Quindi la forma è definita positiva.

- La f.q. rappresentata da  $A_2$  è

$$q_2(x, y) = 5x^2 + 10xy + 5y^2.$$

I minori principali del primo ordine sono uguali a 5; il minore principale del secondo ordine (il determinante) è nullo. Quindi la forma è semidefinita positiva.

- La f.q. rappresentata da  $A_3$  è

$$q_3(x, y) = -2x^2 + 8xy - 8y^2.$$

I minori principali del primo ordine sono negativi ( $-2$  e  $-8$ ); il determinante è nullo. Pertanto la forma è semidefinita negativa.

- La f.q. rappresentata da  $A_4$  è

$$q_4(x, y) = -x^2 + 2xy - 3y^2.$$

I minori principali del primo ordine sono negativi ( $-1$  e  $-3$ ) e il determinante è positivo. Pertanto la forma è definita negativa.

- La f.q. rappresentata da  $A_5$  è

$$q_5(x, y) = -2x^2 + 6xy - y^2.$$

I minori principali del primo ordine sono negativi ( $-2$  e  $-1$ ), ma il determinante è pure negativo. Pertanto la forma è indefinita.

### Esercizio 2.3

- (a) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_1(x, y, z) = 4x^2 - 4xy + y^2 + z^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_1$  è quindi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservando l'espressione analitica iniziale di  $q_1$  è immediato capire che la forma è semidefinita positiva: infatti chiaramente non è mai negativa e si annulla se e solo se

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{cioè nel sottospazio di } \mathbb{R}^3 \text{ generato dal vettore } (1, 2, 0).$$

Pertanto la f.q. non è mai negativa e si annulla in modo non banale: quindi è semidefinita positiva. Alla stessa conclusione si perviene anche con il calcolo dei minori principali: quelli del primo ordine sono positivi, quelli del secondo ordine sono o positivi o nulli e il determinante è nullo.

- (b) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_2(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_2$  è quindi

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di NO sono 2, 3 e 1, quindi la f.q. è definita positiva. Stessa conclusione osservando l'espressione originaria di  $q_2$ : è somma di quadrati e quindi mai negativa e si annulla se e solo se

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Annullandosi solo nell'origine, la f.q. è appunto definita positiva.

- (c) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_3(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 4yz - 2z^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_3$  è quindi

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Minori principali del primo ordine negativi; minori principali del secondo ordine positivi o nulli; determinante nullo. Quindi la f.q. è semidefinita negativa.



Dall'espressione analitica si ha che la f.q. è certamente non positiva e si annulla se e solo se

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

Attraverso la soluzione del sistema si trova che la f.q. si annulla nel sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dal vettore  $(0, -1, 1)$ , quindi si annulla in modo non banale. Pertanto, anche in base alla definizione, è semidefinita negativa.

(d) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_4(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2yz - z^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_4$  è quindi

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dall'espressione analitica si ha che la f.q. è certamente indefinita, poiché ad esempio  $q_4(1, 0, 0) > 0$  e  $q_4(0, 0, 1) < 0$ . Attraverso l'esame dei minori principali è chiaro che i minori principali del primo ordine cambiano segno e quindi la forma è certamente indefinita.

#### Esercizio 2.4

(a) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_1(x, y, z, t) = x^2 - 2xt + t^2 + y^2 + z^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_1$  è quindi (l'ordine che considero è:  $x, y, z, t$ )

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è chiaramente nullo e quindi la forma non può essere definita. Dobbiamo esaminare i minori principali. Quelli del primo ordine sono tutti positivi; quelli del secondo ordine (sono 6) positivi o nulli; quelli del terzo ordine (sono 4) positivi o nulli e il determinante è nullo (si osservi, anche per il calcolo dei minori del terzo ordine, che la prima e quarta riga sono opposte). Pertanto la f.q. è semidefinita positiva.

Stessa conclusione osservando che la forma è non negativa e si annulla se e solo se

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

e quindi si annulla, in modo non banale, sul sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dal vettore  $(1, 0, 0, 1)$ .

(b) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_2(x, y, z, t) = -2x^2 - 2xz + 2xt - 2y^2 + 2yz + 2yt - z^2 - t^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_2$  è quindi

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è nullo (la terza riga è la somma di prima e quarta) e quindi la forma non può essere definita. C'è la possibilità che sia semidefinita negativa, e dobbiamo esaminare i minori principali. Quelli del primo ordine sono tutti negativi; quelli del secondo ordine sono positivi o nulli; quelli del terzo ordine sono negativi o nulli e il determinante come detto è nullo. Quindi in effetti la f.q. è semidefinita negativa.

Stessa conclusione osservando che la forma è non positiva e si annulla se e solo se

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ x - y + z = 0, \end{cases}$$

e quindi si annulla, in modo non banale, sul sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $(1, 0, -1, 1)$  e  $(0, 1, 1, 1)$ .

(c) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_3(x, y, z, t) = x^2 + 2xz + 3y^2 + 2yt + 2z^2 + t^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_3$  è quindi

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qui si arriva alla conclusione con l'esame dei soli minori principali di NO: infatti sono tutti e quattro positivi (valgono 1, 3, 3 e 2). La f.q è definita positiva. Stessa conclusione osservando che la forma è non negativa e si annulla se e solo se

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione è il vettore nullo e quindi la f.q. si annulla soltanto nell'origine.

(d) Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q_4(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4zt + t^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q_4$  è quindi

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

I primi 3 minori principali di NO sono positivi, ma il determinante è negativo, e quindi la f.q. è indefinita.

Dalla forma analitica si può osservare che ad esempio si ha  $q_4(1, 0, 0, 0) > 0$  e  $q_4(0, 0, 1, 2) < 0$ , che conferma il risultato trovato.

### Esercizio 2.5

Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - z^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q$  è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La forma è certamente indefinita (i minori principali del primo ordine cambiano di segno).<sup>14</sup>

I vettori del sottospazio (chiamiamolo  $S$ ) di  $\mathbb{R}^3$  generato da  $\mathbf{u}^1$  e  $\mathbf{u}^2$  sono le combinazioni lineari di  $\mathbf{u}^1$  e  $\mathbf{u}^2$ , e quindi sono i vettori del tipo

$$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) = (a, b, 0), \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Pertanto la restrizione di  $q$  al sottospazio  $S$  coincide con la f.q.

$$a^2 - 2ab + 2b^2, \quad \text{definita in } \mathbb{R}^2.$$

Tale f.q. è chiaramente definita positiva.<sup>15</sup> Per concludere: la forma quadratica  $q$  è indefinita in  $\mathbb{R}^3$ , ma la sua restrizione ad  $S$  è definita positiva.

<sup>14</sup>Si noti anche che, ad esempio,  $q(1, 0, 0) > 0$  e  $q(0, 0, 1) < 0$ .

<sup>15</sup>Il risultato si può certamente ottenere ad esempio scrivendo la matrice della forma quadratica (matrice  $2 \times 2$ ) e calcolando i minori principali di NO. Si noti ancora che  $q(\mathbf{u}^3) < 0$  e che  $\mathbf{u}^3 \notin S$ .

**Esercizio 2.6**

Sviluppando i quadrati dei binomi nell'espressione analitica si ottiene

$$q(x, y, z, t) = x^2 - 2xz - y^2 - 2yt + z^2 - t^2.$$

La matrice simmetrica che rappresenta  $q$  è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La forma è indefinita (i minori principali del primo ordine cambiano di segno).<sup>16</sup>

I vettori del sottospazio  $S$  di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $\mathbf{u}^1$ ,  $\mathbf{u}^3$  e  $\mathbf{u}^4 - \mathbf{u}^2$ , sono le combinazioni lineari di questi vettori, e quindi sono i vettori del tipo

$$a\mathbf{u}^1 + b\mathbf{u}^3 + c(\mathbf{u}^4 - \mathbf{u}^2) = a\mathbf{u}^1 - c\mathbf{u}^2 + b\mathbf{u}^3 + c\mathbf{u}^4, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere l'espressione analitica della restrizione si può utilizzare la matrice<sup>17</sup> oppure più semplicemente l'espressione analitica di  $q$ , calcolandola nel vettore  $(a, -c, b, c)$ . Si ottiene

$$(a - b)^2 - (-c + c)^2 = (a - b)^2, \quad \text{definita in } \mathbb{R}^3. \quad ^{18}$$

Quindi la restrizione ad  $S$  è semidefinita positiva.

Per concludere: la forma quadratica  $q$  è indefinita in  $\mathbb{R}^4$ , e la sua restrizione ad  $S$  è semidefinita positiva.

<sup>16</sup>Si noti che, ad esempio,  $q(\mathbf{u}^1) > 0$  e  $q(\mathbf{u}^4) < 0$  (sono il primo e il quarto vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^4$ ).

<sup>17</sup>Basta calcolare il prodotto vettore-matrice-vettore  $\mathbf{s}^T A \mathbf{s}$ , dove  $\mathbf{s} = (a, -c, b, c)$ .

<sup>18</sup>Attenzione. La forma è definita in  $\mathbb{R}^3$ , anche se poi dipende esplicitamente da due sole variabili. Questo permette di dire subito che si annulla in modo non banale, in  $(0, 0, 1)$  ad esempio. Ma si annulla comunque in modo non banale anche in  $(1, 1, 0)$ .