IV-3 Derivate delle funzioni di più variabili

Indice

Come abbiamo visto nella II parte del corso, la derivata di una funzione non è altro che un rapporto tra due variazioni, quello del valore della funzione in corrispondenza a quello della variabile. Si ricorderà (spero) che più precisamente con derivata di f in un punto intendiamo il limite del rapporto incrementale di f.[1]

Volendo costruire anche per funzioni di $n > 1$ variabili un rapporto incrementale, cioè un quoziente di variazioni, ci si imbatte in una difficoltà. Vediamolo per semplicità con due variabili: consideriamo il punto (x_0, y_0) e il punto (x, y), in prossimità di (x_0, y_0). Volendo fare quello che si fa in una variabile, la variazione di f è

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

e per ora non cambia molto; la variazione della variabile è invece

$$(x, y) - (x_0, y_0)\ , \text{ che adesso è un vettore.}$$

Ora però non possiamo costruire il rapporto incrementale, dato che il denominatore non è un numero.[2]

Possiamo ancora cercare di definire una derivata nel modo tradizionale, cioè come limite di un rapporto incrementale, ma dobbiamo fare in modo che quel denominatore torni ad essere un numero reale.

1 Derivate parziali

Sempre considerando il caso di due sole variabili, se in prossimità di (x_0, y_0) prendiamo un punto facendo variare solo la prima componente, cioè consideriamo un punto (x, y_0), possiamo costruire il rapporto incrementale

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Si noti che, dato che solo la x varia, la variazione che sta a denominatore è data dalla variazione della sola x, e quindi il denominatore torna ad essere un numero.

Allora possiamo definire una derivata, che sarà ovviamente una derivata *rispetto alla* x.

Definizione Se (x_0, y_0) è un punto interno al dominio di f, chiamiamo **derivata parziale di f rispetto ad x nel punto** (x_0, y_0) il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad , \text{ se questo è finito.}$$

Analogamente, possiamo costruire un altro rapporto incrementale se in prossimità di (x_0, y_0) prendiamo un punto facendo variare solo la seconda componente, cioè consideriamo un punto (x_0, y). Avremo allora la derivata *rispetto alla* y.

[1] Ricordo la definizione formale: la derivata di una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in un punto x_0 interno ad A è il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{(quando questo è un numero).}$$

[2] Si noti che, tra le tante operazioni che abbiamo definito in questo corso, molte delle quali definite tra vettori (vedi parte III), non ce n'è nessuna che preveda il quoziente tra un numero e un vettore.

Definizione Chiamiamo **derivata parziale di f rispetto ad y nel punto** (x_0, y_0) il

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \quad \text{, se questo è finito.}$$

La derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) si indica con i simboli $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ oppure $f'_x(x_0,y_0)$. Se questa esiste, diciamo anche che f *è derivabile parzialmente rispetto ad x nel punto* (x_0, y_0).

Analogamente la derivata parziale di f rispetto ad y nel punto (x_0, y_0) si indica con i simboli $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ oppure $f'_y(x_0,y_0)$ e, se questa esiste, diciamo che f *è derivabile parzialmente rispetto ad y nel punto* (x_0, y_0).

Dicendo semplicemente che una funzione f di due variabili è derivabile in (x_0, y_0) si intende che essa è derivabile parzialmente in (x_0, y_0) sia rispetto ad x sia rispetto ad y.

In tal caso si chiama **gradiente di f in** (x_0, y_0) il vettore delle sue derivate parziali. Si scrive

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \left(f'_x(x_0,y_0)\ ,\ f'_y(x_0,y_0)\right).$$

In generale, per una funzione di n variabili, avremo n possibili derivate parziali.

A partire dal punto $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ possiamo dare una variazione ad *una sola* delle n variabili, diciamo la x_i, passando per questa dal valore x_i^0 al valore x_i. Consideriamo poi il

$$\lim_{x_i\to x_i^0} \frac{f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)}{x_i-x_i^0}.$$

Se esso esiste finito, lo chiamiamo **derivata parziale di f rispetto a x_i nel punto $\boldsymbol{x}^0$**, e diciamo che f *è derivabile parzialmente rispetto a x_i nel punto $\boldsymbol{x}^0$*. Per indicare tale derivata si usano i simboli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)$ oppure $f'_{x_i}(\boldsymbol{x}^0)$.

Se nel punto $\boldsymbol{x}^0$ la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a tutte le sue n variabili, si dirà brevemente che è derivabile nel punto $\boldsymbol{x}^0$.

Se f è una funzione derivabile nel punto $\boldsymbol{x}^0$, il gradiente di f in $\boldsymbol{x}^0$ è il vettore

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0)\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)\right) = \left(f'_{x_1}(\boldsymbol{x}^0)\ ,\ \ldots\ ,\ f'_{x_n}(\boldsymbol{x}^0)\right).$$

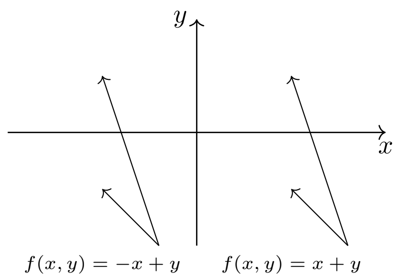
Esempi

- Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = x + e^y,$$
definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Consideriamo poi il punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$, in cui la funzione vale 2.
Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1-2}{x-1} = 1.$$
Si ha poi
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(1,y)-f(1,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1+e^y-2}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1. \text{ [3]}$$
Quindi f è derivabile nel punto $(1, 0)$ e $\nabla f(1, 0) = (1, 1)$.
- Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = x \ln y,$$
definita sul semipiano $y > 0$. Consideriamo poi il punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$, in cui la funzione vale 0.
La funzione vale 0 lungo la retta $y = 1$ e quindi la derivata parziale rispetto ad x è nulla. Si ha poi
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(2,y)-f(2,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{2\ln y}{y-1} = 2. \text{ [4]}$$
Quindi f è derivabile nel punto $(2, 1)$ e $\nabla f(2, 1) = (0, 2)$.

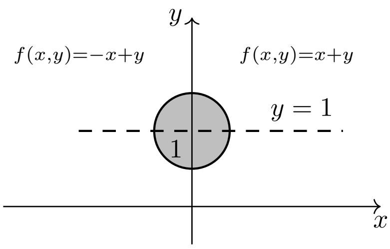
[3] È uno dei limiti notevoli.
[4] Cambio di variabile $y - 1 = t$ e poi si trova ancora uno dei limiti notevoli.

- Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = x^2\sqrt{y},$$
definita nel semipiano $y \geq 0$. Consideriamo il punto $(x_0, y_0) = (1,4)$, interno al dominio, in cui la funzione vale 2. Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,4) - f(1,4)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4.$$
Si ha poi
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = \lim_{y\to 4} \frac{f(1,y) - f(1,4)}{y-4} = \lim_{y\to 4} \frac{\sqrt{y}-2}{y-4} = \lim_{y\to 4} \frac{\sqrt{y}-2}{(\sqrt{y}-2)(\sqrt{y}+2)} = \frac{1}{4}.$$
Quindi f è derivabile nel punto $(1,4)$ e $\nabla f(1,4) = (4, \frac{1}{4})$.

- Si consideri infine la funzione
$$f(x,y) = |x| + y,$$
definita in tutto $\mathbb{R}^2$.
Per facilitare la comprensione dei calcoli che seguono, possiamo riscrivere la f come
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x \geq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ -x+y & \text{se } x < 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

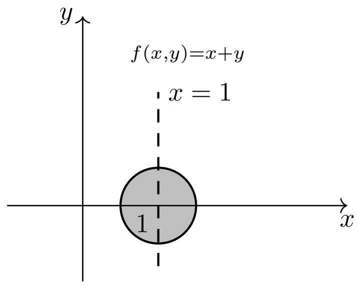


e rappresentiamo quanto scritto nella figura a fianco (nel primo e quarto quadrante la funzione è $x+y$, mentre nel secondo e terzo quadrante la funzione è $-x+y$).
Consideriamo ora il punto $(x_0, y_0) = (0,1)$, in cui si ha $f(x_0, y_0) = 1$. Dare una variazione solo ad x vuol dire muoversi lungo una retta passante per $(0,1)$ e parallela all'asse x (tale retta ha equazione $y = 1$). Su di essa, a destra di $(0,1)$, la funzione vale $x+y$, mentre a sinistra vale $-x+y$.
Si ha perciò
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,1) - f(0,1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1-1}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x,1) - f(0,1)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x+1-1}{x} = -1,$$



e pertanto questa funzione non ammette derivata parziale rispetto ad x nel punto $(0,1)$. Ciò è sufficiente per dire che in quel punto non è derivabile.
C'è invece in $(0,1)$ derivabilità parziale rispetto ad y, dato che
$$\lim_{y\to 1} \frac{f(0,y) - f(0,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-1} = 1.$$
Si noti che il calcolo della derivata parziale rispetto a x richiede di distinguere i due casi $x > 0$ e $x < 0$, mentre il calcolo della derivata parziale rispetto a y non lo richiede.

Si consideri ora il punto $(x_0, y_0) = (1,0)$. Facendo variare solo la x e percorrendo quindi l'asse x (con $y = 0$) si trova che sia a destra sia a sinistra, in un intorno sufficientemente piccolo di $(1,0)$, la funzione vale $x+y$. Si ha quindi
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$
e quindi la funzione è derivabile parzialmente rispetto a x in $(1,0)$.

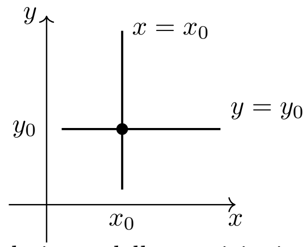


Percorrendo invece una parallela all'asse y (con $x = 1$) si trova ancora che sia al di sopra sia al di sotto di $(1,0)$ la funzione vale $x+y$. Si ha quindi
$$\lim_{y\to 0} \frac{1+y-1}{y} = 1,$$
e quindi la funzione in $(1,0)$ è derivabile parzialmente anche rispetto ad y ed è pertanto derivabile. Si ha $\nabla f(1,0) = (1,1)$.

Osservazione Non è difficile intuire e capire che studiare la derivabilità parziale rispetto ad x di una funzione f in un punto (x_0, y_0) equivale a studiare la derivabilità in $x = x_0$ della restrizione di f alla retta di equazione $y = y_0$.

Analogamente, studiare la derivabilità parziale rispetto ad y in (x_0, y_0) equivale a studiare la derivabilità in $y = y_0$ della restrizione di f alla retta di equazione $x = x_0$.

La figura a fianco raffigura un punto (x_0, y_0) e le due rette parallele agli assi cartesiani e passanti per il punto stesso, cioè le rette di equazione $y = y_0$ e $x = x_0$. Si può dimostrare facilmente che, se c'è derivabilità parziale nel punto fissato, allora risulta



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D\Big(f\big|_{y=y_0}\Big)(x_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D\Big(f\big|_{x=x_0}\Big)(y_0).$$

I termini a destra dell'uguale nelle due scritture qui sopra stanno ad indicare la derivata delle restrizioni nei punti indicati. Per chiarire quanto appena detto si consideri che

$$f\big|_{y=y_0} = f(x, y_0), \text{ e quindi la derivata di questa in } x_0 \text{ è il}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \text{ cioè appunto la derivata parziale di } f \text{ rispetto ad } x.$$

Analogamente, per quanto riguarda la derivata rispetto ad y, si ha

$$f\big|_{x=x_0} = f(x_0, y), \text{ e quindi la derivata di questa in } y_0 \text{ è il}$$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \text{ cioè appunto la derivata parziale di } f \text{ rispetto ad } y.$$

Possiamo verificare il tutto su qualche esempio.

- Riprendendo la prima funzione degli esempi precedenti, cioè la

  $$f(x, y) = x + e^y, \quad \text{nel punto } (1, 0),$$

  per la derivata parziale rispetto ad x consideriamo la restrizione alla retta di equazione $y = 0$:

  $$f\big|_{y=0} = f(x, 0) = x + 1.$$

  Tale funzione è derivabile in $x = 1$ con derivata uguale ad 1. Quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1$.

  Per la derivata parziale rispetto ad y consideriamo invece la restrizione alla retta di equazione $x = 1$:

  $$f\big|_{x=1} = f(1, y) = 1 + e^y,$$

  che è derivabile in $y = 0$ con derivata uguale ad 1. Quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$.

- Per la seconda funzione, cioè

  $$f(x, y) = x \ln y, \quad \text{nel punto } (2, 1),$$

  per la derivata parziale rispetto ad x consideriamo la restrizione alla retta di equazione $y = 1$:

  $$f\big|_{y=1} = f(x, 1) = x \cdot 0 = 0,$$

  da cui $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 0$. Per la derivata parziale rispetto ad y consideriamo la restrizione alla retta di equazione $x = 2$:

  $$f\big|_{x=2} = f(2, y) = 2 \ln y.$$

  La derivata è $\frac{2}{y}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2$.

- Infine, per la terza funzione, cioè

  $$f(x, y) = |x| + y, \quad \text{nel punto } (0, 1),$$

  si ha

  $$f\big|_{y=1} = f(x, 1) = |x| + 1,$$

  che non è derivabile in $x = 0$. Quindi f non è derivabile parzialmente rispetto ad x.

  Rispetto ad y invece c'è derivata parziale, dato che la restrizione alla retta di equazione $x = 0$ è

  $$f\big|_{x=0} = f(0, y) = |0| + y = y,$$

  e questa è derivabile in 1 con derivata 1. Quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1$.

- Ancora un esempio. Per la funzione

$$f(x,y) = |x + y^2|, \quad \text{nel punto } (0,0),$$

l'esame della derivabilità parziale rispetto ad x porta a considerare la restrizione

$$f\Big|_{y=0} = f(x,0) = |x|,$$

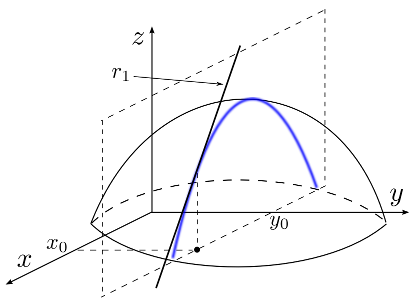
che non è derivabile in $x = 0$. L'esame della derivabilità parziale rispetto ad y porta invece a considerare la restrizione

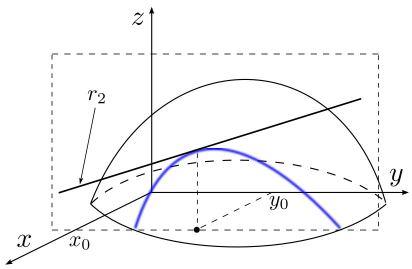
$$f\Big|_{x=0} = f(0,y) = |y^2| = y^2,$$

che è derivabile in $y = 0$, con derivata nulla. Pertanto si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, mentre la $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste.

Spendiamo ora due parole sull'interpretazione geometrica delle derivate parziali. Tenendo conto di quanto esposto nell'ultima osservazione, che cioè le derivate parziali coincidono con le derivate (monodimensionali) lungo opportune restrizioni, si intuisce facilmente che, se la f è derivabile rispetto ad x nel punto (x_0, y_0), allora nel piano di equazione $y = y_0$ [5] vi è una (ed una sola) retta tangente al grafico di f (vedi figura sotto a sinistra). La derivata parziale di f rispetto ad x è la pendenza (coefficiente angolare) di tale retta, indicata con r_1 in figura.

Analogamente, se f è derivabile rispetto ad y in (x_0, y_0), allora nel piano di equazione $x = x_0$ vi è una (ed una sola) retta tangente al grafico di f (figura sotto a destra). La derivata parziale di f rispetto ad y è la pendenza di questa retta, indicata con r_2 in figura.





$\boxed{\textbf{Esercizio 1.1}}$ Si calcolino le derivate parziali delle seguenti funzioni attraverso la definizione, cioè con il limite del rapporto incrementale parziale.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$ nel punto $(1, 1)$

(b) $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$ nel punto $(2, 1)$

(c) $f(x_1, x_2) = \dfrac{\ln x_2}{x_1}$ nel punto $(e, 1)$

(d) $f(x, y) = x\sqrt{x + y}$ nel punto $(-1, 2)$

2 Regole di derivazione

Per quanto riguarda il calcolo delle derivate, come avviene per le funzioni di una sola variabile, la definizione (cioè il limite del rapporto incrementale) si utilizza solamente in casi particolari, come ad esempio le funzioni definite a tratti, o perché espressamente richiesta.[6] Per il calcolo ci sono metodi più comodi per procedere, quelli che vengono comunemente detti *regole di derivazione*. Si ottengono comode regole di derivazione parziale semplicemente tenendo conto del fatto che nella derivazione rispetto alla variabile x_i tutte le altre variabili sono da mantenersi costanti: quindi le regole di calcolo sono le consuete regole di derivazione delle funzioni di una sola variabile.[7]

[5] Si tratta di un piano "verticale" parallelo al piano x, z e che contiene il punto (x_0, y_0).

[6] Solitamente per capire se lo studente ha studiato bene anche la teoria.

[7] Sarebbe come derivare una funzione di una variabile che dipende anche da alcuni parametri, i quali però sono da ritenersi costanti al momento della derivazione. Ad esempio, se consideriamo la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ e intendiamo che a, b, c sono costanti, si ha $f'(x) = 2ax + b$.

Esempi

- Calcoliamo le derivate parziali della funzione $f(x,y) = x^2y^3$. Derivando rispetto ad x, quindi con y costante, si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3.$$
Derivando rispetto ad y, quindi con x costante, si ha
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2.$$
- Con la funzione $f(x,y) = \frac{x}{y}$, derivando rispetto ad x si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}.$$
Derivando rispetto ad y si ha invece
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}.$$
- Le derivate parziali della funzione $f(x,y) = x^2ye^{xy^2}$ sono:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xye^{xy^2} + x^2ye^{xy^2} \cdot y^2 = 2xye^{xy^2} + x^2y^3e^{xy^2}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^{xy^2} + x^2ye^{xy^2} \cdot 2xy = x^2e^{xy^2} + 2x^3y^2e^{xy^2}.$$
- Con la funzione $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{\ln y}\right)$ abbiamo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln y}{x} \cdot \frac{1}{\ln y} = \frac{1}{x}.$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{\ln^2 y}\right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y\ln y}.$$
- Con la funzione $f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}}$, si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}}$$
e infine
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_3}}.$$

Osservazione Faccio esplicitamente notare una cosa, che risulta peraltro evidente dagli esempi appena visti. Se f è una funzione di due variabili, allora in genere le sue derivate parziali sono anch'esse funzioni di due variabili e, in generale, funzioni di n variabili hanno derivate parziali che sono anch'esse funzioni di n variabili.

Esercizio 2.1 Si calcolino le derivate parziali delle seguenti funzioni con le regole di derivazione.

(a) $f(x,y) = (x+2y)e^{3x-4y}$

(b) $f(x_1,x_2) = x_2\ln(x_1^2 + x_2)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$

(d) $f(x,y) = x + \sqrt{x^2 + y^3}$

(e) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}e^{y/x}$

(g) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y^2}$

(h) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 + \ln x_2}{x_2 + \ln x_1}$

3 Derivabilità e continuità

È da mettere in evidenza il seguente fatto: lo studente ricorderà che con le funzioni di una variabile la derivabilità in un punto implica la continuità nello stesso punto. Questo risultato *non vale più* con funzioni di più variabili: ora la derivabilità di una funzione nel punto $\boldsymbol{x}^0$ non garantisce la continuità della funzione in $\boldsymbol{x}^0$. In altre parole ci sono esempi di funzioni derivabili in un punto ma non continue in quel punto.

Un esempio in merito è fornito dalla funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

La funzione vale 1 sugli assi cartesiani e vale 0 in tutti gli altri punti del piano. Le restrizioni agli assi x e y della funzione f sono funzioni costanti, con valore 1, quindi la funzione f è derivabile parzialmente in $(x_0, y_0) = (0,0)$ con derivate parziali entrambe nulle. Non c'è però continuità in $(0,0)$, dato che il limite nell'origine non esiste: infatti le restrizioni lungo gli assi cartesiani hanno limite 1, mentre la restrizione ad una qualunque altra retta per l'origine ha limite 0.

Il motivo del fatto che in più variabili la derivabilità parziale in un punto $\boldsymbol{x}^0$ non implica la continuità in $\boldsymbol{x}^0$ è facilmente intuibile: l'esistenza delle derivate parziali dipende dal comportamento della funzione soltanto lungo le direzioni parallele agli assi cartesiani, mentre la continuità coinvolge i valori in tutto un intorno del punto $\boldsymbol{x}^0$. Quindi la derivabilità lungo le direzioni fondamentali non dà sufficienti garanzie sul comportamento della funzione lungo altre possibili direzioni.

Osservazione Sorge spontanea a questo punto una domanda: se la derivabilità parziale non è sufficiente a garantire la continuità, quali proprietà possono esserlo? Qui mi limito a citare soltanto questo risultato: se una funzione f ha derivate parziali in un insieme A e queste derivate parziali sono funzioni continue in A, allora f è continua in A. Le funzioni che hanno derivate parziali continue sono le cosiddette funzioni *di classe* $\mathscr{C}^1$, come in $\mathbb{R}$ erano di classe $\mathscr{C}^1$ le funzioni con derivata (prima) continua.

4 Differenziabilità

Nell'osservazione che chiude la sezione precedente ho citato una proprietà che garantisce la continuità. Un'altra proprietà di questo tipo, molto importante anche nelle applicazioni, è la *differenziabilità*. Non ne abbiamo parlato in precedenza, cioè per le funzioni di una sola variabile, in quanto il concetto, in una sola variabile appunto, non si discosta molto da quello di derivabilità. In più variabili invece la differenziabilità acquista un significato diverso da quello di derivabilità (parziale) e sicuramente importante, sia da un punto di vista teorico, sia applicativo.

Presento prima la definizione con riferimento a funzioni di due variabili e successivamente ne do la generalizzazione ad n variabili.

Per introdurre il concetto, in modo che la definizione formale non risulti di non immediata comprensione, si può dire che una funzione è differenziabile in un punto se la variazione dei suoi valori, in prossimità di questo punto, è in buona approssimazione una funzione lineare della variazione delle variabili indipendenti.

Definizione Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia (x_1^0, x_2^0) un punto interno ad A. Diciamo che f è **differenziabile in** (x_1^0, x_2^0) se c'è una funzione lineare del tipo $c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0)$ tale che la differenza

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) - \Big[c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0)\Big]$$

sia trascurabile.[8]

Osservazione Si noti che dire che la variazione di f è sostanzialmente lineare equivale a dire che la differenza tra tale variazione e una funzione lineare è trascurabile. Quindi differenziabile in un punto vuol dire che in prossimità di questo punto la variazione della funzione è praticamente lineare rispetto alle variazioni delle variabili (cioè proporzionale a queste). Si dovrebbe intuire che la novità rispetto alla derivazione parziale è che ora non opero nessuna restrizione della funzione ma considero tutti i punti in prossimità di (x_1^0, x_2^0). E forse si intuisce anche che quindi la differenziabilità mi può garantire un maggior numero di proprietà della funzione f rispetto a quanto possono fare le derivate parziali.

La funzione lineare $(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0) \mapsto c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0)$ si chiama il **differenziale di** f **in** (x_1^0, x_2^0) e si indica con $\mathrm{d}f(x_1^0, x_2^0)$. Si tratta della funzione lineare delle variazioni di x_1 e x_2. A volte si scrive anche $\mathrm{d}f = c_1\,\mathrm{d}x_1 + c_2\,\mathrm{d}x_2$.

[8] In realtà dovrei direi, più rigorosamente, trascurabile rispetto a che cosa. La differenza deve essere trascurabile rispetto alla distanza di (x_1, x_2) da (x_1^0, x_2^0). E ricordo che il significato di ciò è che, al tendere di (x_1, x_2) a (x_1^0, x_2^0), cioè al tendere a zero della loro distanza, il rapporto tra la differenza $f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) - \Big[c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0)\Big]$ e tale distanza tende a zero.

Il differenziale, quando la funzione è differenziabile, fornisce una buona approssimazione della variazione di f in prossimità di un punto che stiamo considerando.

Osservazione Si può dimostrare che, se una funzione f è differenziabile nel punto (x_1^0, x_2^0), allora le due costanti c_1 e c_2 del differenziale non sono altro che le due derivate parziali di f in (x_1^0, x_2^0), e che quindi possiamo scrivere $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2$ (le derivate parziali sono calcolate nel punto (x_1^0, x_2^0)).

Esempio Scriviamo il differenziale della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Ci servono intanto le due derivate parziali. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

Pertanto il differenziale di f in $(1, 2)$ è $\mathrm{d}f(1, 2) = 2(x - x_0) + 4(y - y_0) = 2(x - 1) + 4(y - 2) = 2\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y$.

Osservazione Si potrebbe provare che l'interpretazione geometrica della differenziabilità per le funzioni di due variabili è l'esistenza del piano tangente al grafico della funzione nel punto che viene considerato. Ricordando che l'interpretazione geometrica della derivata in una variabile era l'esistenza della retta tangente, si potrebbe dire che il concetto che generalizza la derivata in due variabili è la differenziabilità e non la derivabilità parziale.

Per fornire ora la definizione di differenziabilità in n variabili conviene forse formalizzare in modo leggermente diverso la scrittura della funzione lineare (cioè del differenziale). Possiamo dire che una funzione lineare in n variabili è il risultato del prodotto interno di un vettore costante per il vettore delle variabili.[9]

Detto questo, possiamo quindi dare la seguente

Definizione Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\boldsymbol{x}^0$ un punto interno ad A. Diciamo che f è **differenziabile in $\boldsymbol{x}^0$** se c'è un vettore $\boldsymbol{c}$ per cui la differenza

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) - \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \rangle \quad \text{sia trascurabile.}$$[10]

La funzione lineare $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \rangle$ si chiama il **differenziale di f in $\boldsymbol{x}^0$** e si indica con $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}^0)$.

Vale in generale il risultato che, se una funzione è differenziabile in un punto $\boldsymbol{x}^0$, le costanti c_i che compaiono nel suo differenziale sono le derivate parziali di f nel punto $\boldsymbol{x}^0$. Possiamo anche sintetizzare questo scrivendo che

$$\boldsymbol{c} = \nabla f(\boldsymbol{x}^0),$$

ossia che

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}^0) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \rangle = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}^0), \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)\,\mathrm{d}x_i.$$

Osservazione Ricordo, a conclusione della sezione, che se una funzione è differenziabile in un punto, allora essa in questo punto è continua e derivabile parzialmente rispetto a tutte le sue variabili.

Esercizio 4.1 Si scriva il differenziale delle seguenti funzioni, nel punto indicato.

(a) $f(x, y) = x^2 y^3$ in $(-1, 2)$ (b) $f(x, y) = x \ln(x + y)$ in $(1, 0)$

5 Derivate seconde e teorema di Schwarz

Come avviene per le funzioni di una variabile, per le quali, dopo la derivata prima, possono essere definite la derivata seconda e tutte le altre, così analogamente può avvenire per le funzioni di più variabili.

Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e se f è derivabile parzialmente in A, come già osservato ogni derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è una funzione definita in A a valori in $\mathbb{R}$, che associa ad ogni $\boldsymbol{x}$ appartenente ad A il numero reale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$. Tali funzioni possono quindi a loro volta essere derivabili parzialmente rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$.[11]

[9] In due variabili possiamo scrivere cioè

$$c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0) = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \rangle,$$

se poniamo $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ e $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$.

[10] Una scrittura "estesa" di $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) - \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \rangle$ potrebbe essere

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) - \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_i^0).$$

[11] Se ad esempio f è funzione di due variabili x, y, la derivata parziale di f rispetto ad x è in generale ancora una funzione di x, y e può quindi essere a sua volta derivata rispetto ad x o rispetto ad y, e lo stesso per la derivata parziale di f rispetto ad y.

Ciascuna $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ può avere dunque n *derivate parziali*; la derivata parziale di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ rispetto ad x_j viene indicata con il simbolo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

e viene detta **derivata parziale seconda di f rispetto ad x_i e rispetto a x_j**. Per una funzione di n variabili vi sono dunque nel complesso n^2 derivate parziali seconde. Vi sono quelle ottenute derivando due volte rispetto alla stessa variabile, che si indicano con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

e quelle ottenute invece derivando rispetto a variabili diverse, e cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{con } i,j = 1,\dots,n \text{ e } i \neq j.$$

Queste ultime si chiamano *derivate seconde miste*.

Esempi

- La funzione $f(x,y) = x^2 + y^3$ ha derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2$$

e derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.$$

- La funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ ha derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

e derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3}.$$

- La funzione $f(x_1,x_2) = \ln(x_1 + \ln x_2)$ ha derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1 + \ln x_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1 + \ln x_2} \cdot \frac{1}{x_2}$$

e derivate parziali seconde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{(x_1 + \ln x_2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{(x_1 + \ln x_2)^2} \cdot \frac{1}{x_2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{(x_1 + \ln x_2)^2} \cdot \frac{1}{x_2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{(x_1 + \ln x_2)^2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 + \ln x_2} \cdot \left(-\frac{1}{x_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Lo studente forse avrà notato che in tutte le funzioni degli esempi proposti le derivate seconde miste sono uguali. Vale infatti in proposito il seguente importante risultato.

Teorema (di Schwarz) Data la funzione f, definita nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e qui derivabile parzialmente due volte, se le derivate seconde miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sono continue in A, allora esse sono uguali.

Osservazione Le funzioni di uso comune, cioè in pratica le funzioni che si ottengono dalle funzioni elementari con operazioni elementari, hanno derivate (di ogni ordine) continue. Vale quindi per queste il teorema di Schwarz. Abbiamo già detto che le funzioni con derivate prime continue si dicono di classe $\mathscr{C}^1$. Analogamente, quelle con derivate seconde continue si dicono di classe $\mathscr{C}^2$, e così via. Quelle che hanno derivate di ogni ordine continue si dicono di classe $\mathscr{C}^\infty$. Le funzioni elementari e quelle che si ottengono da queste con operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione sono quindi, nei punti interni dei rispettivi domini, funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$.

Osservazione Le derivate seconde di una funzione definita in $\mathbb{R}^n$ solitamente si scrivono in una matrice $n \times n$, detta **gradiente secondo** o **matrice Hessiana**. Si scrive

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Nel caso di una funzione $f(x, y)$ di due variabili il gradiente secondo è la matrice 2×2

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Osservazione Se la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Schwarz, e quindi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, la sua matrice Hessiana è una matrice *simmetrica*.

Vedremo nella prossima dispensa del corso come le derivate parziali prime di una funzione (cioè il gradiente) possano essere utili nella ricerca dei punti stazionari e come invece le derivate parziali seconde (cioè la matrice Hessiana) siano importanti per studiare la natura dei punti stazionari, cioè per capire se essi sono punti di massimo o di minimo. Il gradiente secondo è utile anche nello studio della convessità e della concavità della funzione (esattamente come la derivata seconda per le funzioni di una variabile).

Esercizio 5.1 Calcolare il gradiente secondo (ossia la matrice Hessiana) delle seguenti funzioni.

(a) $f(x, y) = x^2y^3 + xy^2$

(b) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{x_1}$

(c) $f(x, y) = xye^{x+y}$

(d) $f(x, y) = xe^{1/y}$

(e) $f(x, y, z) = xyz$

(f) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 x_2}{x_3}$

6 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) Si ha $f(1, 1) = e$. La derivata parziale rispetto ad x_1 è

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{x_1 \cdot e - e}{x_1 - 1} = \lim_{x_1 \to 1} \frac{e(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = e.$$

La derivata parziale rispetto ad x_2 è

$$\lim_{x_2 \to 1} \frac{e^{x_2} - e}{x_2 - 1} = \lim_{x_2 \to 1} \frac{e(e^{x_2 - 1} - 1)}{x_2 - 1} = \lim_{h \to 0} e \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e.$$ [12]

(b) Si ha $f(2, 1) = 3e$. Uso la "forma in h" del limite. La derivata parziale rispetto ad x è

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h, 1) - f(2, 1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h + 1)e^{2+h-1} - 3e}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)e^{1+h} - 3e}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3e(e^h - 1) + he^{1+h}}{h} = 4e. \end{aligned}$$

[12] Si ricordi il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

La derivata parziale rispetto ad y è

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(2+1+h)e^{2-1-h}-3e}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)e^{1-h}-3e}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3e(e^{-h}-1)+he^{1-h}}{h}=-2e.\end{aligned}$$

(c) Si ha $f(e,1)=0$. Uso ancora la "forma in h". La derivata parziale rispetto ad x_1 è

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h,1)-f(e,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

La derivata parziale rispetto ad x_2 è

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e,1+h)-f(e,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1+h)}{e}}{h}=\frac{1}{e}\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\frac{1}{e}.$$ [13]

(d) Si ha $f(-1,2)=-1$. Uso ancora la "forma in h". La derivata parziale rispetto ad x è

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h,2)-f(-1,2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)\sqrt{-1+h+2}+1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(h-1)\sqrt{h+1}+1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\sqrt{h+1}-\sqrt{h+1}+1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{h+1}}{h}+\sqrt{h+1}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ [14]

La derivata parziale rispetto ad y è

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1,2+h)-f(-1,2)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{-\sqrt{-1+2+h}+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt{h+1}}{h}=-\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.1

(a) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{3x-4y}+(x+2y)e^{3x-4y}\cdot 3$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2e^{3x-4y}+(x+2y)e^{3x-4y}\cdot(-4).$$

(b) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2\cdot\frac{1}{x_1^2+x_2}\cdot 2x_1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\ln(x_1^2+x_2)+x_2\cdot\frac{1}{x_1^2+x_2}.$$

(c) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y^2}{x^2}\qquad\text{e}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x}.$$

[13] Si ricordi il limite notevole $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

[14] Si ricordi il limite notevole $\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^b-1}{t}=b$. Quindi $\lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt{h+1}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{1/2}-1}{h}=-1/2$.

(d) Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 2x$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 3y^2.$$

(e) Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_2 - (x_1 + x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = -\frac{2x_2}{(x_1 - x_2)^2}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1 - x_2 + x_1 + x_2}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{2x_1}{(x_1 - x_2)^2}.$$

(f) Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{y/x} + \frac{x}{y} e^{y/x} \cdot \Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = \frac{1}{xy} e^{y/x}(x-y)$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{y/x} + \frac{x}{y} e^{y/x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2} e^{y/x}(y-x).$$

(g) Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{(x+y^2)^2}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x + y^2 - y \cdot 2y}{(x+y^2)^2} = \frac{x - y^2}{(x+y^2)^2}.$$

(h) Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2 + \ln x_1 - (x_1 + \ln x_2) \cdot \frac{1}{x_1}}{(x_2 + \ln x_1)^2}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\frac{1}{x_2}(x_2 + \ln x_1) - (x_1 + \ln x_2)}{(x_2 + \ln x_1)^2}.$$

Esercizio 4.1

(a) Le due derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$ e quindi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -16 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 12.$$
Quindi il differenziale è $\mathrm{d}f(-1,2) = -16(x+1) + 12(y-2) = -16\,\mathrm{d}x + 12\,\mathrm{d}y$.

(b) Le due derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x+y}$ e quindi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1.$$
Quindi il differenziale è $\mathrm{d}f(1,0) = x - 1 + y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$.

Esercizio 5.1

(a) $f(x,y) = x^2y^3 + xy^2$. Il gradiente di f è
$$\nabla f = \Big(2xy^3 + y^2, 3x^2y^2 + 2xy\Big).$$
Il gradiente secondo è
$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 + 2y \\ 6xy^2 + 2y & 6x^2y + 2x \end{pmatrix}.$$

(b) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_2}{x_1}$. Il gradiente di f è

$$\nabla f = \Big(-\frac{x_2}{x_1^2}, \frac{1}{x_1}\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{2x_2}{x_1^3} & -\frac{1}{x_1^2} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $f(x,y) = xye^{x+y}$. Il gradiente di f è

$$\nabla f = e^{x+y}\Big((1+x)y, x(1+y)\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f = e^{x+y}\begin{pmatrix} (2+x)y & 1+x+y+xy \\ 1+x+y+xy & x(2+y) \end{pmatrix}.$$

(d) $f(x,y) = xe^{1/y}$. Il gradiente di f è

$$\nabla f = e^{1/y}\Big(1, -\frac{x}{y^2}\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f = \frac{e^{1/y}}{y^4}\begin{pmatrix} 0 & -y^2 \\ -y^2 & x(1+2y) \end{pmatrix}.$$

(e) $f(x,y,z) = xyz$. Il gradiente di f è

$$\nabla f = \Big(yz, xz, xy\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1x_2}{x_3}$. Il gradiente di f è

$$\nabla f = \Big(\frac{x_2}{x_3}, \frac{x_1}{x_3}, -\frac{x_1x_2}{x_3^2}\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3^2} \\ \frac{1}{x_3} & 0 & -\frac{x_1}{x_3^2} \\ -\frac{x_2}{x_3^2} & -\frac{x_1}{x_3^2} & \frac{2x_1x_2}{x_3^3} \end{pmatrix}.$$