

Esercitazioni X – 02-06/12/2024

A. Sistemi lineari

► Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi di equazioni lineari. Scrivere le soluzioni nella forma “soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo associato”, indicando infine la dimensione dello spazio delle soluzioni e una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$1. \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x - y - z = 4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -y - z = 2 \\ x - z = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

B. Esercizi aggiuntivi (sistemi lineari omogenei)

► Si risolvano i sistemi lineari omogenei associati alle trasformazioni lineari della **sezione E dell'esercitazione IX**.

Quindi, detta A la matrice della trasformazione, si risolva il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. Per ciascuno si indichi la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

C. Funzioni di 2 variabili – Insiemi di esistenza

► Si rappresentino nel piano cartesiano gli insiemi di esistenza delle seguenti funzioni:

$$1. f(x, y) = \ln(x - y + 1)$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$$

$$3. f(x, y) = \ln(x + y^2 - 1)$$

$$4. f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2 - 4}$$

$$5. f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 - 1)$$

$$6. f(x, y) = \ln(y^2 - x^2 - 1) + \sqrt{2y - x}$$

$$7. f(x, y) = \sqrt{\frac{x + 1}{y^2 - 1}}$$

$$8. f(x, y) = \ln(x^2y + x)$$

$$9. f(x, y) = \ln\left(\frac{x + y - 1}{1 - x^2 - y^2}\right)$$

$$10. f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{x}{2} + y - 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)}$$

D. Curve di livello

► Per ciascuna delle seguenti funzioni si disegnino le curve di livello indicate.

1. con $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$ la curva di livello 2

2. con $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ le curve di livello 0, 1 e 2
3. con $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ le curve di livello 0, 1 e 2
4. con $f(x, y) = \sqrt{\frac{x + 1}{y^2 - 1}}$ le curve di livello 0 e 1

E. Restrizioni di una funzione ad una curva

► Per ciascuna delle seguenti funzioni si scriva l'espressione della restrizione alla curva indicata.

1. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2$ alla curva di equazione $x + y - 1 = 0$
2. $f(x, y) = \ln(x - y + 1)$ alla curva di equazione $x - y = 0$
3. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ alla curva di equazione $x + y = 0$
4. $f(x, y) = \ln(x + y^2 - 1)$ alla curva di equazione $(x - 2)^2 - y = 0$
5. $f(x, y) = \sqrt{xy + 1}$ alla curva di equazione $x + y^2 - 1 = 0$
6. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ all'asse x , all'asse y e alle rette di equazione $y = mx$

► 7. Data la funzione $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ si scrivano le espressioni delle restrizioni di f alle curve indicate e si calcolino poi i limiti nell'origine e all'infinito lungo queste curve.

- (a) la retta di equazione $y = x$ (b) in generale tutte le altre rette per l'origine
(c) la parabola di equazione $y = x^2$ (d) la parabola di equazione $x = y^2$.

► 8. Data la funzione $f(x, y) = \sqrt{x + y + x^2}$ si determini il dominio di f , si provi che la retta r di equazione $x + y = 0$ è interamente contenuta nel dominio di f e si scriva infine la restrizione di f alla retta r .

► 9. Data la funzione $f(x, y) = \ln(1 - x^2) \ln(2y - y^2 - x)$ si determini il dominio e si disegni la curva di livello 0 di f .