

Esercitazioni X – 04-08/12/2023

- 1. Si considerino le due trasformazioni lineari $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite da

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Si costruisca l'espressione delle trasformazioni composte $T_2(T_1)$ e $T_1(T_2)$ e si verifichi che la matrice di rappresentazione di queste è il prodotto delle matrici di rappresentazione delle due trasformazioni.

- 2. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

- 3. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

- 4. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

- 5. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

A. Determinante

- Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

B. Matrice inversa

► Si dica per quali valori del parametro a sono invertibili le matrici

1. $\begin{pmatrix} 4 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

► Si provi che le seguenti matrici sono invertibili e se ne calcolino le matrici inverse:

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

C. Rango

► Si determini il rango delle seguenti matrici:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$