

Esercitazioni XII – 18-22/12/2023**A. Funzioni di 2 variabili – Insiemi di esistenza**

► Si rappresentino nel piano cartesiano gli insiemi di esistenza delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \ln(x - y + 1)$
2. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$
3. $f(x, y) = \ln(x + y^2 - 1)$
4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2 - 4}$
5. $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 - 1)$
6. $f(x, y) = \ln(y^2 - x^2 - 1) + \sqrt{2y - x}$
7. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x + 1}{y^2 - 1}}$
8. $f(x, y) = \ln(x^2y + x)$
9. $f(x, y) = \ln\left(\frac{x + y - 1}{1 - x^2 - y^2}\right)$
10. $f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{x}{2} + y - 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)}$

B. Curve di livello

► Per ciascuna delle seguenti funzioni si disegnino le curve di livello indicate.

1. con $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$ la curva di livello 2
2. con $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ le curve di livello 0, 1 e 2
3. con $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ le curve di livello 0, 1 e 2
4. con $f(x, y) = \sqrt{\frac{x + 1}{y^2 - 1}}$ le curve di livello 0 e 1

C. Restrizioni di una funzione ad una curva

► Per ciascuna delle seguenti funzioni si scriva l'espressione della restrizione alla curva indicata.

1. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2$ alla curva di equazione $x + y - 1 = 0$
2. $f(x, y) = \ln(x - y + 1)$ alla curva di equazione $x - y = 0$
3. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ alla curva di equazione $x + y = 0$
4. $f(x, y) = \ln(x + y^2 - 1)$ alla curva di equazione $(x - 2)^2 - y = 0$
5. $f(x, y) = \sqrt{xy + 1}$ alla curva di equazione $x + y^2 - 1 = 0$
6. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ all'asse x , all'asse y e alle rette di equazione $y = mx$

► 7. Data la funzione $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ si scrivano le espressioni delle restrizioni di f alle curve indicate e si calcolino poi i limiti nell'origine e all'infinito lungo queste curve.

- (a) la retta di equazione $y = x$ (b) in generale tutte le altre rette per l'origine
(c) la parabola di equazione $y = x^2$ (d) la parabola di equazione $x = y^2$.

► 8. Data la funzione $f(x, y) = \sqrt{x + y + x^2}$ si determini il dominio di f , si provi che la retta r di equazione $x + y = 0$ è interamente contenuta nel dominio di f e si scriva infine la restrizione di f alla retta r .

► 9. Data la funzione $f(x, y) = \ln(1 - x^2) \ln(2y - y^2 - x)$ si determini il dominio e si disegni la curva di livello 0 di f .

D. Forme quadratiche

► Si studi il segno delle seguenti forme quadratiche in \mathbb{R}^2 , attraverso il segno dei minori:

1. $q(x, y) = -x^2 - 4xy - 4y^2$
2. $q(x, y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$
3. $q(x, y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2$
4. $q(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2$

► Si studi il segno delle seguenti forme quadratiche in \mathbb{R}^3 , attraverso il segno dei minori:

5. $q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4yz + 2z^2$
6. $q(x, y, z) = -x^2 - 2xy - 2xz - 2y^2 + 2yz - 5z^2$

E. Segno di una funzione

► Si determini in quale regione del piano le seguenti funzioni sono positive (assumono valore positivo).

1. $f(x, y) = x^2y - y^2$
2. $f(x, y) = (x^2 - y)(y^2 - x)$
3. $f(x, y) = x^3 - xy^2$
4. $f(x, y) = x^2y + xy^3$

F. Derivate parziali

► Si calcolino, con la definizione, le derivate parziali delle seguenti funzioni, nei punti indicati:

1. $f(x, y) = xy^2$ nel punto $(1, -1)$
2. $f(x, y) = y + e^x$ nel punto $(0, 1)$
3. $f(x, y) = x^2 \ln y$ nel punto $(2, 1)$
4. $f(x, y) = \frac{y}{x}$ nel punto $(1, 2)$

► Si calcolino, con le regole di derivazione, le derivate parziali delle seguenti funzioni:

5. $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$
6. $f(x, y) = (x^2 + y) \ln x$
7. $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$
8. $f(x, y) = \sqrt{y + \sqrt{x}}$
9. $f(x, y) = xe^{x/y}$
10. $f(x, y) = \frac{x}{y} e^{y/x}$
11. $f(x, y) = \frac{x + \ln y}{y + \ln x}$
12. $f(x, y) = y(x + \ln y)^2$
13. $f(x, y) = \frac{y}{x + e^y}$
14. $f(x, y) = \frac{y}{1 + e^{xy}}$
15. $f(x, y) = \frac{1}{x + e^{x^2+y}}$
16. $f(x, y) = \sqrt{x \ln y + y \ln x}$
17. $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$
18. $f(x, y) = \sqrt{x^\alpha + y^\beta}$