

Esercitazioni IV – 14-18/10/2024**A. Insiemi limitati, estremo superiore/inferiore**

► 1. Per ciascuno dei seguenti insiemi (considerati come sottoinsiemi di \mathbb{R}), si dica se l'insieme è superiormente/inferiormente limitato, si indichino, se esistono, una limitazione superiore e una limitazione inferiore, si indichino l'estremo superiore e l'estremo inferiore e infine si indichino, se esistono, il massimo e il minimo.

(a) $(-\infty, 0] \cup \{1, 2\}$

(b) $(-1, 1) \cup [2, +\infty)$

(c) $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ è pari}\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} < 100\}$

(e) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ è primo}\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 < 4\}$

B. Topologia

► 1. Si determini il seguente insieme, precisando la natura topologica dei suoi punti (cioè dire quali sono i punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati)

$$A = B \cap C \quad \text{dove} \quad B = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \quad \text{e} \quad C = [-1, e).$$

► 2. Si determini il seguente insieme, precisando la natura topologica dei suoi punti

$$A = B \cup C \quad \text{dove} \quad B = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{e} \quad C = [1, 2).$$

C. Funzioni elementari. Immagine, controimmagine

► 1. Data la funzione $f(x) = 2^x$, determinare

$$f(-\infty, 1] \quad ; \quad f^{-1}(-\infty, 1]$$

Indicare anche gli estremi, inferiore e superiore, di questi insiemi

► 2. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, determinare

$$f\left[0, \frac{9}{4}\right] \quad ; \quad f^{-1}[-1, 2]$$

Indicare anche gli estremi, inferiore e superiore, di questi insiemi

► 3. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, determinare

$$f(-1, 0) \quad ; \quad f(0, 2] \quad ; \quad f^{-1}[0, 1]$$

Indicare anche gli estremi, inferiore e superiore, di questi insiemi

► 4. Data la funzione $f(x) = \log_2 x$, determinare

$$f(0, 1) \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}, 8\right] \quad ; \quad f^{-1}(-2, +\infty) \quad ; \quad f^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

D. Funzioni elementari. Funzione inversa

► Trovare l'espressione della funzione inversa di

1. $f(x) = 1 - x^3$
2. $f(x) = 2 + 3e^x$
3. $f(x) = 3 - 2 \ln x$
4. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x+1}$
5. $f(x) = 1 - e^{1-x}$
6. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{\ln x - 1}$

E. Grafici di funzioni definite a tratti

► Disegnare i grafici delle seguenti funzioni definite a tratti

1. $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 2^x & x < 0 \\ 1 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ x^2 + x & |x| > 1 \end{cases}$

F. Grafici con la geometria analitica

► Servendosi della geometria analitica, disegnare il grafico delle seguenti funzioni. Determinare poi l'immagine della funzione, gli estremi (superiore e inferiore) e, se esistono, il massimo e il minimo.

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$
2. $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
5. $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$
6. $f(x) = -\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}}$