Esercitazioni VI – 28/10–01/11/2024

A. Definizione di derivata

▶ 1. Si scriva il limite del rapporto incrementale, nella forma in x e nella forma in h, della funzione $f(x) = x + e^x$ nel punto $x_0 = 0$

▶ 2. Si scriva il limite del rapporto incrementale, nella forma in x e nella forma in h, della funzione $f(x) = \ln^2 x$ nel punto $x_0 = 1$

▶ 3. Si calcoli, con la definizione, la derivata della funzione
$f(x) = \sqrt{x}$ nel punto $x_0 = 1$

▶ Dopo aver disegnato il grafico delle funzioni indicate, si ricavi dal grafico in quali punti le funzioni non sono derivabili.

4. $f(x) = \ln(1 + |x|)$
5. $f(x) = \sqrt{|x-1|}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

B. Regole di derivazione

▶ Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni, usando le regole di derivazione:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$
2. $f(x) = x^2 e^x$
3. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
5. $f(x) = \ln^3 x$
6. $f(x) = \ln(x^3)$
7. $f(x) = e^{1-x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{\ln x}$
9. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
11. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$
12. $f(x) = e^{1/x}$
13. $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$
14. $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}$
15. $f(x) = x^2 e^{-1/x}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$

C. Retta tangente

▶ Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico delle funzioni indicate, nel punto indicato:

1. $f(x) = e^{-x}$ in $x_0 = 0$
2. $f(x) = \ln(x^2+1)$ in $x_0 = 1$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in $x_0 = \frac{1}{2}$

D. Derivabilità di funzioni definite a tratti

▶ Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili in tutti i punti del loro dominio:

1. $f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & -2 < x \le 0 \\ \ln 2 - x^2 & x > 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x < 0 \\ e^{-2x} & x \ge 0 \end{cases}$

E. Teoremi di Lagrange e Rolle

▶ 1. Dopo averne disegnato un grafico, si dica se è applicabile il Teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}x(x-1) & 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Si verifichi poi comunque la tesi del teorema.

▶ 2. Dopo averne disegnato un grafico, si dica se è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2-1) & -1 \le x \le 1 \\ \ln x & 1 < x \le e. \end{cases}$$

Si verifichi poi comunque la tesi del teorema.

F. Calcolo di limiti con il teorema di De l'Hopital

▶ Si calcolino i seguenti limiti, utilizzando il teorema di De l'Hôpital:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^2 \ln x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1+x-e^x}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{e^{1/x}}{x}$