Esercitazioni VIII – 18-22/11/2024

A. Vettori

▶ 1. Si trovi per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori sono ortogonali

$$v^1 = (k+1, 1, 2k) \qquad , \qquad v^2 = (1, k-1, k)$$

▶ 2. Si calcoli la norma euclidea del vettore $v = (-3, 1, -\sqrt{2}, 2)$

▶ 3. Quali sono in $\mathbb{R}^2$ i vettori (punti) di norma euclidea uguale a 1?

▶ 4. Si calcoli, in $\mathbb{R}^3$, la distanza dei due punti $P_1 = (-1, 2, 3)$ e $P_2 = (-3, 1, -2)$

B. Trasformazioni lineari e matrici

▶ Si scriva la matrice di rappresentazione delle seguenti trasformazioni lineari:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$

3. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 \\ -x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$

Per ciascuna si calcoli anche il trasformato del vettore a componenti unitarie (cioè il vettore con componenti tutte uguali a 1).

▶ 4. Si scriva l'espressione della trasformazione rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

precisando tra quali spazi opera la trasformazione stessa.

▶ 5. Si scriva l'espressione della trasformazione rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

precisando tra quali spazi opera la trasformazione stessa.

▶ 6. Indicare dei vettori che generano l'immagine della trasformazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Dire se tali generatori sono una base dell'immagine di T.

▶ 7. Determinare dei generatori dell'immagine della trasformazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dire se tali generatori sono una base dell'immagine di T.

▶ 8. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

determinare una base dell'immagine di T.

C. Calcoli con matrici

▶ Si svolgano i seguenti calcoli con matrici:

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

▶ 7. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

▶ 8. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

▶ 9. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.

▶ 10. Data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

si dica se T è invertibile, determinando se è iniettiva e suriettiva.