Esercitazioni IX – 25–29/11/2024

A. Determinante

▶ Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

B. Matrice inversa

▶ Si dica per quali valori del parametro a sono invertibili le matrici

1. $\begin{pmatrix} 4 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

▶ Si provi che le seguenti matrici sono invertibili e se ne calcolino le matrici inverse:

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

C. Rango

▶ Si determini il rango delle seguenti matrici:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. Dipendenza, indipendenza lineare, generatori, basi

▶ 1. Si dica se i vettori

$$v^1 = (1, -2) \qquad , \qquad v^2 = (-2, 4) \qquad \text{e} \qquad v^3 = (0, 3)$$

sono generatori di $\mathbb{R}^2$. Sono una base di $\mathbb{R}^2$? Nel caso non siano una base, si dica quali tra loro formano una base di $\mathbb{R}^2$.

▶ 2. Si dica se i vettori

$$(1, 0, 1) \qquad \text{e} \qquad (0, 1, 1)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti e se sono una base di $\mathbb{R}^3$. Si dica inoltre qual è la dimensione dello spazio da essi generato.

▶ 3. Si dica se i vettori

$$(2,1,-1) \qquad , \qquad (1,1,1) \qquad \text{e} \qquad (1,0,-2)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti e se sono una base di $\mathbb{R}^3$. Si dica in ogni caso quale è la dimensione dello spazio da essi generato.

▶ 4. Si dica se i vettori

$$(1,0,1) \qquad , \qquad (-1,1,0) \qquad \text{e} \qquad (0,1,-1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$

▶ 5. Si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$(1,-1,1) \qquad \text{e} \qquad (-1,1,-1)$$

e se ne indichi una base

▶ 6. Si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$(1,2,-1) \qquad , \qquad (-2,-4,2) \qquad \text{e} \qquad (0,1,0)$$

e se ne indichi una base

▶ 7. Si dica se il vettore $u = (1,2,3)$ appartiene al sottospazio generato da

$$v = (1,3,2) \qquad \text{e} \qquad w = (0,-1,1).$$

▶ 8. Si dica se il vettore $u = (1,1,1)$ appartiene al sottospazio generato da

$$v = (1,-1,1) \qquad \text{e} \qquad w = (-2,2,-2).$$

E. Immagine di una trasformazione lineare

▶ Per le seguenti trasformazioni lineari si determinino la dimensione e una base dell'immagine:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$