Soluzioni delle Esercitazioni XII – 18-22/12/2023

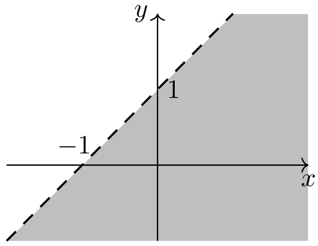
A. Funzioni di 2 variabili – Insiemi di esistenza

► Si tratta di porre le condizioni per cui risulta definita la funzione f.

1. La funzione è $f(x,y) = \ln(x-y+1)$. L'unica condizione di esistenza della funzione f è che si abbia

$$x - y + 1 > 0 \qquad \text{e cioè} \qquad y < x + 1.$$

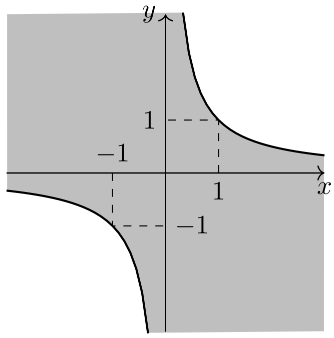
Si tratta del semipiano che sta al di sotto della retta di equazione $y = x + 1$ (retta esclusa).
L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.



2. La funzione è $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$. L'unica condizione di esistenza della funzione f è che si abbia

$$1 - xy \geq 0 \qquad \text{e cioè} \qquad xy \leq 1.$$

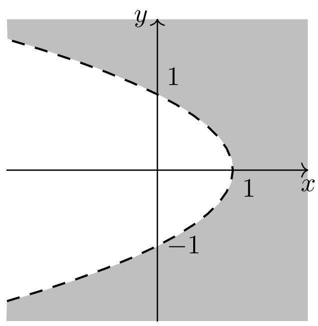
Ricordando che l'equazione corrispondente definisce un'iperbole con rami nel primo e terzo quadrante, si ha che le soluzioni sono i punti della regione che sta tra i rami dell'iperbole, cioè quella che contiene l'origine.[1] I punti sull'iperbole fanno parte del dominio di f.
L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.



3. La funzione è $f(x,y) = \ln(x + y^2 - 1)$. La condizione di esistenza di f è che sia

$$x + y^2 - 1 > 0 \qquad \text{e cioè} \qquad x > 1 - y^2.$$

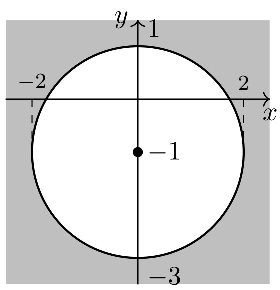
Ricordando che l'equazione corrispondente definisce una parabola con asse coincidente con l'asse x, vertice in $(1,0)$ e concavità rivolta verso sinistra, si ha che le soluzioni sono i punti della regione che sta alla destra della parabola, parabola esclusa.
L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.



4. La funzione è $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 - 4}$. La condizione di esistenza di f è che sia

$$x^2 + (y+1)^2 - 4 \geq 0 \qquad \text{e cioè} \qquad x^2 + (y+1)^2 \geq 4.$$

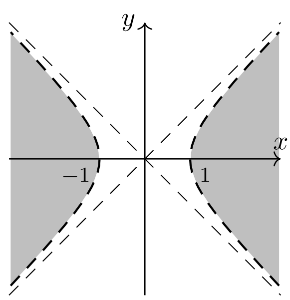
Ricordando che l'equazione corrispondente definisce una circonferenza di centro $(0,-1)$ e raggio 2, si ha che le soluzioni sono i punti della regione che sta al di fuori del cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 2, circonferenza compresa.
L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.



5. La funzione è $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2 - 1)$. La condizione di esistenza di f è che sia

$$x^2 - y^2 - 1 > 0 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 - y^2 > 1.$$

Ricordando che l'equazione corrispondente definisce un'iperbole di centro l'origine con rami che stanno a sinistra e a destra dell'origine, si ha che le soluzioni sono i punti della regione che non contiene l'origine stessa (i punti sull'iperbole non fanno parte dell'insieme).
L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.

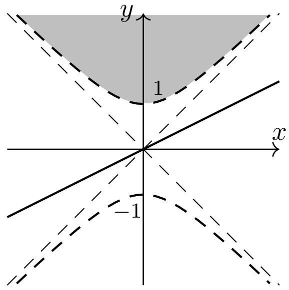


[1] Ricordo che per decidere quale regione soddisfa la disequazione un metodo molto comodo è quello di considerare un punto particolare, ad esempio l'origine, e vedere se soddisfa la disequazione (nel nostro caso $0 \leq 1$). Se la disequazione risulta verificata la regione è quella in cui si trova l'origine, altrimenti è l'altra.

6. La funzione è $f(x,y) = \ln(y^2 - x^2 - 1) + \sqrt{2y - x}$. Le condizioni di esistenza di f sono date dal sistema

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - 1 > 0 \\ 2y - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y^2 - x^2 > 1 \\ y \geq \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Ricordo che l'equazione $y^2 - x^2 = 1$ definisce un'iperbole di centro l'origine con rami che stanno al di sopra e al di sotto dell'origine, mentre l'equazione $y = \frac{x}{2}$ definisce la retta che passa per l'origine e di pendenza $\frac{1}{2}$. Il sistema delle due disequazioni è verificato nei punti che soddisfano entrambe, e cioè nei punti che si trovano contemporaneamente al di sopra della retta e al di sopra o al di sotto dei rami dell'iperbole: si tratta quindi dei punti che stanno al di sopra del ramo superiore dell'iperbole (i punti che stanno su tale ramo di iperbole non sono compresi). L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.



7. La funzione è $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+1}{y^2 - 1}}$. La condizione di esistenza di f è

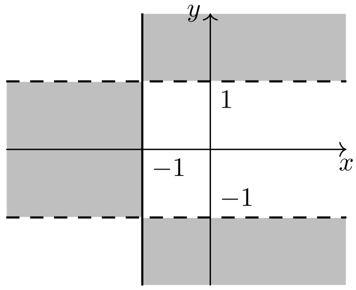
$$\frac{x+1}{y^2-1} \geq 0 \qquad \text{oltre al denominatore} \qquad y^2 - 1 \neq 0.$$

Qui possiamo seguire due strade per risolvere la disequazione e le riporto entrambe.

Possiamo dire che la disequazione equivale all'unione dei due sistemi[2]

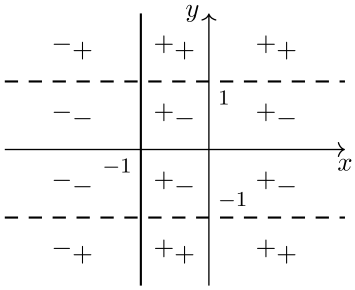
$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ y^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ y^2 - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ y^2 > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y^2 < 1. \end{cases}$$

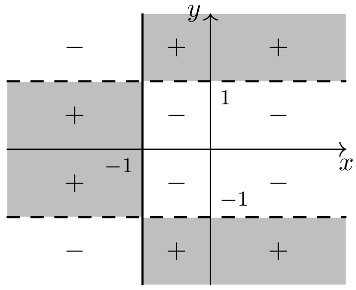
Detto a parole l'insieme di esistenza di f è formato dai punti che stanno alla destra della retta (verticale) di equazione $x = -1$ e contemporaneamente all'esterno delle due rette (orizzontali) di equazione $y = -1$ e $y = 1$, oppure dai punti che stanno alla sinistra della retta (verticale) di equazione $x = -1$ e contemporaneamente tra le due rette (orizzontali) di equazione $y = -1$ e $y = 1$. I punti della retta verticale sono compresi nell'insieme, quelli delle rette orizzontali no.
L'insieme, cioè il dominio di f, è raffigurato a fianco in grigio.



Si poteva anche usare una tecnica diversa, che consiste nello studiare il segno dei due fattori (numeratore e denominatore della frazione), riportando poi nel piano tali segni nelle varie regioni. Così facendo si ottiene la figura sotto a sinistra. Si faccia attenzione che non è bene "distribuire segni inutilmente" (soprattutto segni −): anzi è bene che in ogni regione che viene definita dalle equazioni rilevanti vi siano esattamente tanti segni quanti sono i fattori in gioco. Nel caso che stiamo esaminando i fattori sono 2 e alla fine di questa fase ci devono essere esattamente 2 segni in ogni regione. Infine ribadisco che le regioni sono quelle individuate dalle equazioni legate ai fattori: nel nostro caso quindi gli assi non devono contribuire a creare nuove regioni, in quanto gli assi non sono rilevanti (per questo motivo li ho tratteggiati).

A questo punto si osserva che il segno del quoziente in ogni regione è dato dal prodotto dei segni. Le regioni che formano il dominio di f sono quelle in cui risulta un segno + (figura sotto a destra).





[2]Faccio notare, ma non dovrebbe essere necessario poiché la stessa cosa avviene anche con una sola variabile, la differenza che c'è tra la soluzioni di questo esercizio e quello che precede: nel precedente ci sono due condizioni di esistenza, che devono valere contemporaneamente e quindi vi è un solo sistema con queste due condizioni. In questo caso invece la condizione di esistenza è la positività del quoziente e questa non equivale alla positività di entrambi i fattori, ma deve prevedere anche la negatività di entrambi. Ecco perché qui i sistemi sono due.

8. La funzione è $f(x,y) = \ln\big(x^2y + x\big)$. La condizione di esistenza di f è

$$x^2y + x > 0 \qquad \text{cioè} \qquad x(xy+1) > 0.$$

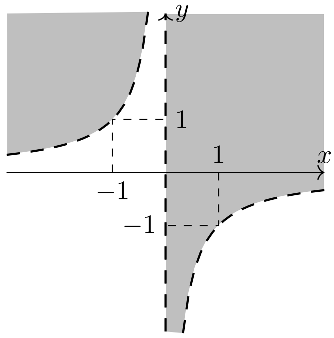
Possiamo anche qui procedere in due modi diversi: o studiare i segni dei due fattori oppure utilizzare due sistemi. Facciamo in questo secondo modo.

La disequazione equivale all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ xy + 1 < 0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > -1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ xy < -1. \end{cases}$$



Si tratta quindi dei punti che stanno a destra dell'asse x e contemporaneamente al di sopra del ramo destro dell'iperbole oppure a sinistra dell'asse x e contemporaneamente al di sopra del ramo sinistro dell'iperbole. I punti sull'asse y o sull'iperbole non sono compresi.

9. La funzione è $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+y-1}{1-x^2-y^2}\right)$. La condizione di esistenza di f è

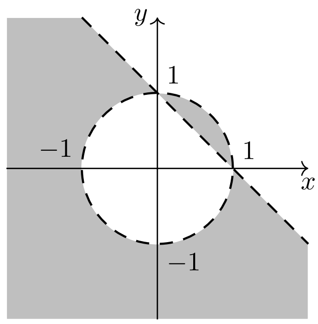
$$\frac{x+y-1}{1-x^2-y^2} > 0 \qquad \text{, con denominatore diverso da zero.}$$

Qui abbiamo sempre le due strade possibili (due sistemi o studio a parte del segno dei due fattori). Seguo la prima strada. Possiamo dire che la disequazione equivale all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 1 - x^2 - y^2 < 0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} y > 1 - x \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y < 1 - x \\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$



Le equazioni corrispondenti individuano una retta (di equazione $y = 1 - x$) e la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Il dominio di f è formato dai punti che stanno al di sopra della retta e contemporaneamente all'interno della circonferenza oppure quelli che stanno al di sotto della retta e contemporaneamente all'esterno della circonferenza. I punti del bordo non sono compresi.

10. La funzione è $f(x,y) = \sqrt{\left(\frac{x}{2} + y - 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)}$. La condizione di esistenza di f è

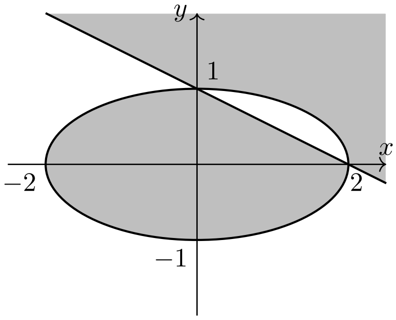
$$\left(\frac{x}{2} + y - 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right) \geq 0.$$

Per certi versi molto simile al precedente, possiamo dire che la disequazione equivale all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y - 1 \geq 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + y - 1 \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} y \geq 1 - \frac{x}{2} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y \leq 1 - \frac{x}{2} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1. \end{cases}$$



Le equazioni corrispondenti individuano una retta (di equazione $y = 1-\frac{x}{2}$) e l'ellisse di centro l'origine e semiassi 2 e 1 (rispettivamente sulle x e sulle y). Si noti che la retta passa per i punti $(2,0)$ e $(0,1)$, che sono punti dove l'ellisse interseca gli assi. Il dominio di f è formato dai punti che stanno al di sopra della retta e contemporaneamente all'esterno dell'ellisse oppure quelli che stanno al di sotto della retta e contemporaneamente all'interno dell'ellisse. I punti del bordo sono compresi.

B. Curve di livello

► Ricordo che le curve di livello sono le curve del piano in cui la funzione ha un certo valore (livello) prefissato.

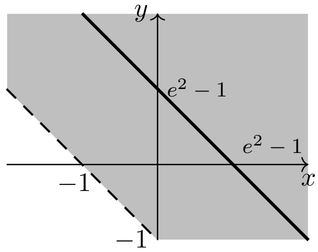
1. La curva di livello 2 della funzione $f(x,y) = \ln(x+y+1)$ si ottiene ponendo

$$f(x,y) = 2 \qquad \text{e cioè} \qquad \ln(x+y+1) = 2.$$

Si ricava allora

$$x+y+1 = e^2 \qquad \text{e cioè} \qquad y = e^2 - 1 - x.$$

Si tratta di una retta di pendenza -1 e di altezza all'origine $e^2 - 1$.
Il grafico è a fianco (in grigio è indicato il dominio di f).



2. La curva di livello 0 di $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ è la curva di equazione

$$\frac{x-y}{x+y} = 0 \quad \text{cioè} \quad x = y.$$

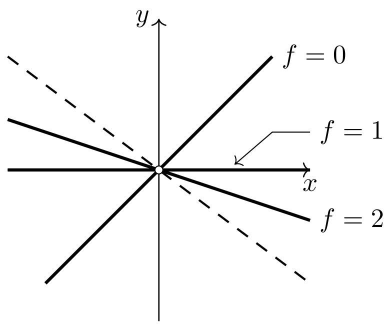
Si tratta della retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Si faccia attenzione che in realtà non si tratta di tutta la retta, dato che la funzione non è definita sulla retta di equazione $y = -x$. Quindi l'origine è da escludere dalla curva di livello 0.
La curva di livello 1 di f è la curva di equazione

$$\frac{x-y}{x+y} = 1 \quad \text{cioè} \quad x - y = x + y \quad \text{cioè} \quad y = 0.$$

Si tratta quindi della retta di equazione $y = 0$, cioè l'asse x, sempre con l'esclusione dell'origine. La curva di livello 2 di f è la curva di equazione

$$\frac{x-y}{x+y} = 2 \quad \text{cioè} \quad x - y = 2x + 2y \quad \text{cioè} \quad y = -\frac{1}{3}x.$$

Si tratta quindi della retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x$, con l'esclusione dell'origine.



3. La curva di livello 0 della funzione $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$ si ottiene ponendo

$$f(x,y) = 0 \quad \text{cioè} \quad \sqrt{1-xy} = 0 \quad \text{cioè} \quad xy = 1.$$

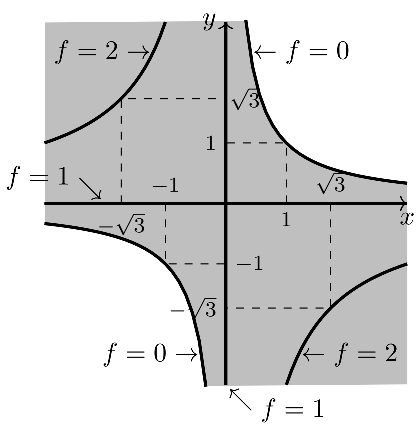
Si tratta di un'iperbole equilatera.
La curva di livello 1 della funzione f si trova ponendo

$$f(x,y) = 1 \quad \text{cioè} \quad \sqrt{1-xy} = 1 \quad \text{cioè} \quad 1 - xy = 1 \quad \text{cioè} \quad xy = 0.$$

Si tratta dei due assi cartesiani, di equazione $x = 0$ oppure $y = 0$.
Infine la curva di livello 2 della funzione f si trova ponendo

$$f(x,y) = 2 \quad \text{cioè} \quad \sqrt{1-xy} = 2 \quad \text{cioè} \quad xy = -3.$$

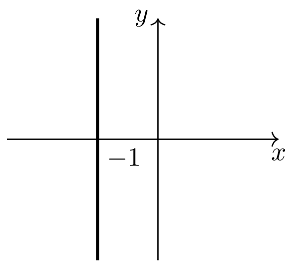
Si tratta ancora di un'iperbole equilatera. La figura a fianco illustra le tre curve di livello (in grigio è indicato il dominio della funzione, già trovato in precedenza) Si osservi che la curva di livello 0 è il bordo del dominio.



4. La curva di livello 0 di $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+1}{y^2-1}}$ è la curva di equazione

$$\sqrt{\frac{x+1}{y^2-1}} = 0 \quad \text{cioè} \quad x = -1.$$

Si tratta di una retta verticale.

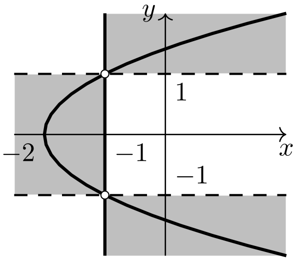


La curva di livello 1 di f è la curva di equazione

$$\sqrt{\frac{x+1}{y^2-1}} = 1.$$

Si ricava in sequenza

$$\frac{x+1}{y^2-1} = 1 \quad , \quad x+1 = y^2-1 \quad , \quad x = y^2-2.$$



Si tratta di una parabola con asse orizzontale.
Volendo essere rigorosi sarebbe bene osservare che non tutti i punti delle due curve di livello (la retta e la parabola) sono accettabili. Infatti, ricordando qual è il dominio della funzione (già trovato in precedenza), possiamo notare che le curve trovate non sono tutte contenute nel dominio. La figura a fianco illustra la situazione, rappresentando in grigio il dominio. Si può vedere che dalle curve di livello sono da escludere i punti $(-1,1)$ e $(-1,-1)$, che non fanno parte del dominio di f.

C. Restrizioni di una funzione ad una curva

► Ricordo che fare la restrizione di una funzione ad una curva indicata significa determinare l'espressione della funzione sui punti di quella curva.

1. La funzione è una forma quadratica. La curva di equazione $x+y-1=0$ è una retta e si può esplicitare la y scrivendo $y = 1-x$. Pertanto la restrizione di f alla retta si può esprimere come una funzione della sola x che è

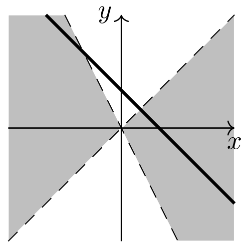
$$f(x,y)\Big|_{y=1-x} = g(x) = 2x^2 - x(1-x) - (1-x)^2 = 2x^2 + x - 1.$$

Si può ora fare questa semplice verifica. Dato che la forma quadratica si può scomporre in

$$f(x,y) = (x-y)(2x+y)$$

il segno di questa è positivo se

$$\begin{cases} x-y>0 \\ 2x+y>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-y<0 \\ 2x+y<0 \end{cases} \quad \text{cioè nella regione in grigio}$$



La retta su cui abbiamo considerato la restrizione è quella più marcata: dal grafico si vede che la retta attraversa regioni in cui f è positiva e regioni in cui f è negativa. A conferma di questo possiamo osservare che il polinomio $g(x) = 2x^2 + x - 1$ ha due radici distinte e quindi cambia segno.

2. Il dominio della funzione $f(x,y) = \ln(x-y+1)$ è un semipiano (il semipiano che sta al di sotto della retta di equazione $y = x+1$). Si può osservare che la curva di equazione $x-y=0$, cioè $y=x$, è interamente contenuta nel dominio (lo studente lo verifichi). La restrizione della funzione f a tale retta si può ottenere sostituendo $y=x$ nell'espressione di f. Si ottiene la funzione

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = g(x) = \ln(x-x+1) = 0.$$

Si tratta quindi della funzione identicamente nulla (la funzione f quindi vale 0 lungo la retta).

3. Il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$ è già stato trovato in un esercizio precedente. Lo studente verifichi che la curva di equazione $x+y=0$, cioè $y=-x$, è interamente contenuta nel dominio. Possiamo ottenere la restrizione di f alla curva sostituendo $y=-x$ nell'espressione di f. Si ottiene la funzione

$$f(x,y)\Big|_{y=-x} = g(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

4. Il dominio della funzione $f(x,y) = \ln(x+y^2-1)$ è la parte di piano che sta alla sinistra della parabola di equazione $x = 1-y^2$. La curva di equazione $(x-2)^2 - y = 0$, cioè la parabola di equazione $y = (x-2)^2$, è interamente contenuta nel dominio (lo studente lo verifichi). La restrizione di f alla curva si può ottenere sostituendo $y = (x-2)^2$ nell'espressione di f. Si ottiene la funzione

$$f(x,y)\Big|_{y=(x-2)^2} = g(x) = \ln\left(x + (x-2)^4 - 1\right).$$

5. Lascio per esercizio disegnare il dominio di $f(x,y) = \sqrt{xy+1}$ e verificare che la curva di equazione $x + y^2 - 1 = 0$, che si può scrivere come $x = 1 - y^2$, non è interamente contenuta nel dominio. La restrizione di f alla curva si può ottenere (dove esiste) sostituendo $x = 1 - y^2$ nell'espressione di f. Si ottiene la funzione (questa volta funzione di y)

$$f(x,y)\Big|_{x=1-y^2} = g(y) = \sqrt{(1-y^2)y+1} = \sqrt{y - y^3 + 1}.$$

Si noti che ci si accorge che la curva non sta tutta nel dominio di f in quanto il polinomio $y - y^3 + 1$ può diventare negativo per alcuni valori di y.[3]

Si noti che sarebbe stato possibile anche esprimere y in funzione di x, ma la cosa era più complicata, dato che sarebbe stato necessario distinguere due casi.

6. Dopo aver osservato che la funzione è definita in tutti i punti ad eccezione dell'origine, la restrizione della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ all'asse x si ottiene ponendo $y = 0$. Si ha

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = g(x) = 0.$$

La restrizione di f all'asse y si ottiene ponendo $x = 0$ e si ha

$$f(x,y)\Big|_{x=0} = h(x) = 0.$$

Infine la restrizione di f alle rette di equazione $y = mx$ si ottengono ponendo appunto $y = mx$. Si ha

$$f(x,y)\Big|_{y=mx} = k(x) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}.\ ^4$$

Da notare che lungo tutte queste rette la funzione è costante e che questa costante dipende dalla pendenza della retta.

► 7. Per ciascuna delle curve scriviamo la restrizione di f.

(a) La restrizione alla retta di equazione $y = x$ è data da

$$f\Big|_{y=x} = f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Il limite nell'origine e all'infinito della restrizione è ovviamente $\frac{1}{2}$, dato che la funzione è costante lungo la bisettrice.

(b) La restrizione in generale alle rette per l'origine va fatta considerando che le rette di equazione $y = mx$ sono tutte queste rette ad eccezione della retta verticale, che ha equazione $x = 0$. Quindi sulle rette di equazione $y = mx$ abbiamo

$$f\Big|_{y=mx} = f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

mentre sull'asse y abbiamo

$$f\Big|_{x=0} = f(0,y) = 0.$$

La funzione è dunque costante lungo le rette per l'origine e il valore della costante dipende dalla pendenza della retta. Anche qui il limite nell'origine e all'infinito della restrizione è ovviamente il valore della costante $\frac{1}{1+m^2}$ oppure 0 lungo l'asse y.

(c) La restrizione sulla parabola di equazione $y = x^2$ è data da

$$f\Big|_{y=x^2} = f(x,x^2) = \frac{x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il limite nell'origine di tale restrizione è

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1,$$

mentre all'infinito, cioè per $x \to \pm\infty$, è

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

[3] Basta osservare che il limite per $y \to +\infty$ di $y - y^3 + 1$ è $-\infty$.

[4] Si noti che la semplificazione finale (dividere sopra e sotto per x^2) si può fare se $x \neq 0$, ma questo è certamente vero perché nessuna delle rette di equazione $y = mx$ coincide con l'asse y.

(d) La restrizione sulla parabola di equazione $x = y^2$ è data da

$$f\Big|_{x=y^2} = f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^2} = \frac{y^2}{1 + y^2}.$$

Il limite nell'origine di tale restrizione è

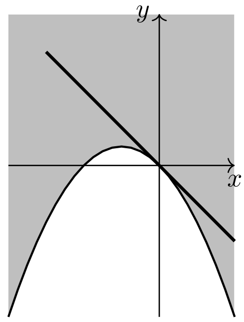
$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1 + y^2} = 0,$$

mentre all'infinito è

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{y^2}{1 + y^2} = 1.$$

▶ 8. La condizione di esistenza della funzione f è che sia

$$x + y + x^2 \geq 0 \qquad \text{e cioè} \qquad y \geq -x(x + 1),$$



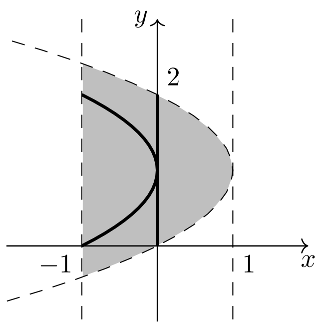
e si tratta quindi della regione del piano che sta al di sopra della parabola di equazione $y = -x(x + 1)$, inclusi i punti che stanno sulla parabola. Il dominio è raffigurato qui a fianco in grigio.
Nella figura è indicata con un tratto grosso la retta r di equazione $x + y = 0$, cioè $y = -x$, la bisettrice del secondo e quarto quadrante. Per dimostrare che la retta è completamente contenuta nel dominio possiamo provare che la retta è tangente alla parabola. Dato che la pendenza della retta è -1, è sufficiente verificare che la derivata della funzione $y(x) = -x(x+1)$ nell'origine valga -1. Si ha $y'(x) = -2x-1$ e quindi in effetti $y'(0) = -1$.
L'ultima domanda chiede di scrivere la restrizione di f alle retta r. Si ha

$$f\Big|_r = f\Big|_{y=-x} = f(x, -x) = \sqrt{x - x + x^2} = \sqrt{x^2}.$$

Che la retta sia interamente contenuta nel dominio di f è confermato dal fatto che l'espressione ottenuta della restrizione è definita per ogni valore di x.

▶ 9. Entrambi gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi e quindi le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ 2y - y^2 - x > 0 \end{cases} \qquad \text{equivalente a} \qquad \begin{cases} x^2 < 1 \\ x < 2y - y^2. \end{cases}$$



La prima disequazione definisce la regione aperta di piano compresa tra le due rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$. La seconda definisce la regione aperta di piano a sinistra della parabola di equazione $x < -y(y - 2)$. L'intersezione delle due regioni porta alla regione aperta indicata in grigio nella figura qui a fianco.

La curva di livello 0 di f si trova ponendo la funzione uguale a 0. La funzione si annulla se e solo se almeno uno dei due fattori si annulla e cioè se e solo se

$$\ln\big(1 - x^2\big) = 0 \quad \text{oppure} \quad \ln\big(2y - y^2 - x\big) = 0.$$

Queste equivalgono a

$$1 - x^2 = 1 \quad \text{oppure} \quad 2y - y^2 - x = 1 \qquad \text{ossia} \qquad x^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad x = 2y - y^2 - 1.$$

La prima definisce la parte dell'asse y contenuta nel dominio di f e la seconda la parte della parabola di equazione $x = 2y - y^2 - 1$ ugualmente contenuta nel dominio. Questa parabola si ottiene traslando a sinistra di 1 la parabola che definisce la frontiera del dominio. L'insieme di questi punti è indicato con tratto grosso nella figura.

D. Forme quadratiche

► 1. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y) = -x^2 - 4xy - 4y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è nullo, quindi la forma non può essere definita. I due minori principali del primo ordine sono negativi, quindi la f.q. (e la matrice) è *semidefinita negativa*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$-x^2 - 4xy - 4y^2 = -(x + 2y)^2$$

e quindi la forma è sempre minore o uguale a zero e si annulla in modo non banale, sulla retta di equazione $x + 2y = 0$.

2. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è negativo, e questo basta per dire che la forma è *indefinita*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$q(1, 0) = 2 \qquad \text{e} \qquad q(1, 1) = -1.$$

3. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A vale 1 e il primo minore principale di NO è negativo, quindi la forma è *definita negativa*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$\begin{aligned} -2x^2 + 6xy - 5y^2 &= -2\left(x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2\right) && (1) \\ \text{(completamento del quadrato)} \quad &= -2\left(x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{5}{2}y^2\right) && (2) \\ &= -2\left[\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{1}{4}y^2\right]. && (3) \end{aligned}$$

Da qui si vede che la forma è sempre negativa e si annulla solo in modo banale.[5]

4. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A vale 2 e il primo minore principale di NO è positivo, quindi la forma è *definita positiva*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 2y^2 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{2}{3}y^2\right) && (4) \\ \text{(completamento del quadrato)} \quad &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{4}{9}y^2 - \frac{4}{9}y^2 + \frac{2}{3}y^2\right) && (5) \\ &= 3\left[\left(x + \frac{2}{3}y\right)^2 + \frac{2}{9}y^2\right]. && (6) \end{aligned}$$

[5] Per annullare la somma dei due quadrati y deve essere zero, e quindi, nel primo quadrato, anche x deve essere zero.

Da qui si vede che la forma è sempre positiva e si annulla solo in modo banale.[6]

▶ 5. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4yz + 2z^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di NO sono 2 (di ordine 1), 4 (di ordine 2), ma il determinante di A è zero. Quindi la forma non è definita positiva. Per verificare che sia semidefinita positiva occorre controllare i minori principali (non di NO). Quelli di ordine 1 (elementi sulla diagonale) sono positivi. Quelli di ordine 2 sono quello ottenuto con le righe prima e terza, che vale 4 e quello con le righe seconda e terza, che vale ugualmente 4. Pertanto il determinante è nullo e tutti i minori principali sono maggiori o uguali a zero. La forma è quindi semidefinita positiva.

6. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y, z) = -x^2 - 2xy - 2xz - 2y^2 + 2yz - 5z^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di NO sono -1 (di ordine 1), 1 (di ordine 2), ma il determinante di A è zero. Quindi la forma non è definita. Potrebbe essere semidefinita negativa e quindi occorre controllare i minori principali (non di NO). Quelli di ordine 1 (elementi sulla diagonale) sono negativi. Quelli di ordine 2 sono quello ottenuto con le righe prima e terza, che vale 4 e quello con le righe seconda e terza, che vale 9. Pertanto il determinante è nullo, i minori principali di ordine dispari sono minori o uguali a zero e quelli ordine pari sono maggiori o uguali a zero. La forma è quindi semidefinita negativa.

E. Segno di una funzione

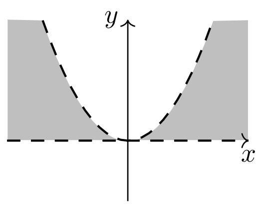
▶ 1. Studiamo il segno della funzione $f(x, y) = x^2y - y^2$ ponendo

$$x^2y - y^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad y(x^2 - y) > 0.$$

Questa equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} y > 0 \\ x^2 - y > 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y < 0 \\ x^2 - y < 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} y > 0 \\ y < x^2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y < 0 \\ y > x^2. \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni, date dai punti che stanno al di sopra dell'asse y e nello stesso tempo al di sotto della parabola di equazione $y = x^2$. Il secondo sistema non ha soluzioni. La regione è rappresentata qui sotto.



2. Studiamo il segno della funzione $f(x, y) = (x^2 - y)(y^2 - x)$ ponendo

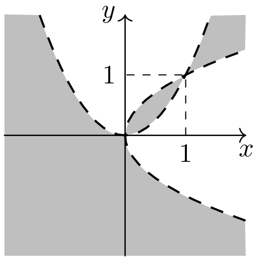
$$(x^2 - y)(y^2 - x) > 0.$$

Questa equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - y > 0 \\ y^2 - x > 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y^2 - x < 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} y < x^2 \\ x < y^2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y > x^2 \\ x > y^2. \end{cases}$$

Entrambi i sistemi hanno soluzioni. La regione è rappresentata qui sotto.

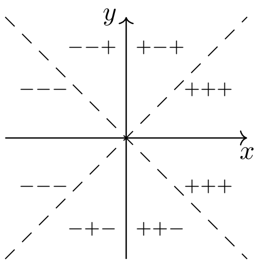
[6] Per annullare la somma dei due quadrati y deve essere zero, e quindi, nel primo quadrato, anche x deve essere zero.

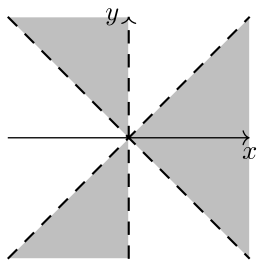


3. Studiamo il segno della funzione $f(x,y) = x^3 - xy^2$ ponendo

$$x^3 - xy^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad x(x-y)(x+y) > 0.$$

Trattandosi di tre fattori possiamo studiare separatamente il segno di ciascuno, riportare i segni in un grafico e poi operare il prodotto dei segni. Si tenga conto che il primo fattore è positivo nel primo e quarto quadrante, il secondo è positivo al di sotto della retta di equazione $y = x$ ed il terzo è positivo al di sopra della retta di equazione $y = -x$. Si ottiene qualcosa di simile alla figura qui sotto a sinistra, dove le terne di segni forniscono nell'ordine il segno di primo, secondo e terzo fattore.



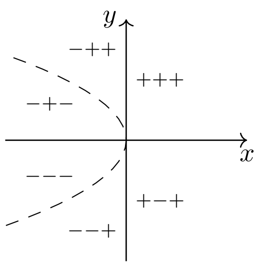


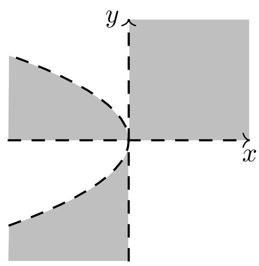
Nella figura a destra sono invece evidenziate in grigio le regioni in cui la funzione risulta positiva. Notare che i punti sull'asse y non fanno parte dell'insieme.

4. Studiamo il segno della funzione $f(x,y) = x^2y + xy^3$ ponendo

$$x^2y + xy^3 > 0 \quad \text{cioè} \quad xy(x+y^2) > 0.$$

Studiamo anche in questo caso separatamente il segno dei tre fattori. Il primo fattore è positivo nel primo e quarto quadrante, il secondo è positivo nel primo e secondo quadrante ed il terzo è positivo alla destra della parabola di equazione $x = -y^2$. Si ottiene qualcosa di simile alla figura qui sotto a sinistra.





Nella figura a destra sono marcate in grigio le regioni in cui la funzione risulta positiva. Notare che i punti sugli assi non fanno parte dell'insieme.

F. Derivate parziali

► In questi esercizi si tratta di calcolare le derivate parziali in un punto, usando la definizione, cioè il limite del rapporto incrementale (parziale). Si può utilizzare indifferentemente una delle due forme possibili (quella con variabile x (o y) o quella con variabile h).

1. Il valore della funzione $f(x,y) = xy^2$ nel punto $(1,-1)$ è $f(1,-1) = 1$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,-1) - f(1,-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \lim_{y\to -1} \frac{f(1,y) - f(1,-1)}{y+1} = \lim_{y\to -1} \frac{y^2-1}{y+1} = \lim_{y\to -1}(y-1) = -2.$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,-1) - f(1,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,-1+h) - f(1,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(-2+h) = -2.$$

2. Il valore della funzione $f(x,y) = y + e^x$ nel punto $(0,1)$ è $f(0,1) = 2$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1) - f(0,1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+e^x-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{(limite notevole)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(0,y) - f(0,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y+1-2}{y-1} = 1.$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+e^h-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h+1-2}{h} = 1.$$

In questi esercizi si tratta di calcolare le derivate parziali in un punto, usando la definizione, cioè il limite del rapporto incrementale (parziale). Si può utilizzare indifferentemente una delle due forme possibili (quella con variabile x (o y) o quella con variabile h).

3. Il valore della funzione $f(x,y) = x^2 \ln y$ nel punto $(2,1)$ è $f(2,1) = 0$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x,1) - f(2,1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{0}{x-2} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(2,y) - f(2,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{4\ln y}{y-1} = 4.$$ [7]

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2\cdot 0 - 0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,1+h) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4\ln(1+h) - 0}{h} = 4.$$ [8]

4. Il valore della funzione $f(x,y) = \frac{y}{x}$ nel punto $(1,2)$ è $f(1,2) = 2$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,2) - f(1,2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(1-x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x} = -2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{y\to 2} \frac{f(1,y) - f(1,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{y-2}{y-2} = 1.$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2-2h}{h(1+h)} = -2$$

[7] Ci si può ricondurre ad un limite notevole, ponendo $y-1=t$ (da cui $y = 1+t$):

$$\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

[8] Come si vede, nella forma con variabile h in questo caso si ha direttamente il limite notevole, mentre nella forma con variabile y per arrivare al limite notevole occorreva un cambio di variabile.

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h} = 1.$$

► In questi esercizi si tratta di calcolare le derivate parziali usando le regole di derivazione.

5. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

6. Con la funzione $f(x,y) = (x^2+y)\ln x$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln x + (x^2+y)\cdot\frac{1}{x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x.$$

7. Con la funzione $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}.$$

8. Con la funzione $f(x,y) = \sqrt{y+\sqrt{x}}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y+\sqrt{x}}}.$$

9. Con la funzione $f(x,y) = xe^{x/y}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x/y} + xe^{x/y}\cdot\frac{1}{y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

10. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y}e^{y/x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}e^{y/x} + \frac{x}{y}e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{y}e^{y/x} - \frac{1}{x}e^{y/x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}e^{y/x} + \frac{x}{y}e^{y/x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{x}{y^2}e^{y/x} + \frac{1}{y}e^{y/x}.$$

11. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{x+\ln y}{y+\ln x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1\cdot(y+\ln x)-(x+\ln y)\cdot\frac{1}{x}}{(y+\ln x)^2}$$

e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}\cdot(y+\ln x)-(x+\ln y)\cdot 1}{(y+\ln x)^2}.$$

12. Con la funzione $f(x,y) = y(x+\ln y)^2$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cdot 2(x+\ln y)$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+\ln y)^2 + y\cdot 2(x+\ln y)\cdot\frac{1}{y}.$$

13. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{y}{x+e^y}$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(x+e^y)^2}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+e^y-ye^y}{(x+e^y)^2}.$$

14. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{y}{1+e^{xy}}$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(1+e^{xy})^2}\cdot e^{xy}\cdot y$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1+e^{xy}-y\cdot e^{xy}\cdot x}{(1+e^{xy})^2}.$$

15. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x+e^{x^2+y}}$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{(x+e^{x^2+y})^2}\cdot\Big(1+e^{x^2+y}\cdot 2x\Big)$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{(x+e^{x^2+y})^2}\cdot e^{x^2+y}\cdot 1.$$

16. Con la funzione $f(x,y) = \sqrt{x\ln y + y\ln x}$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x\ln y + y\ln x}}\left(\ln y + \frac{y}{x}\right)$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x\ln y + y\ln x}}\left(\frac{x}{y} + \ln x\right).$$

17. Con la funzione $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1}.$$

18. Con la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^\alpha + y^\beta}$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^\alpha + y^\beta}}\cdot\alpha x^{\alpha-1}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^\alpha + y^\beta}}\cdot\beta y^{\beta-1}.$$