Soluzioni delle Esercitazioni XIII – 08-12/01/2024

A. Gradiente e gradiente secondo

▶ 1. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x \ln y$ è

$$\nabla f(x,y) = \Big(\ln y, \frac{x}{y}\Big).$$

Il gradiente secondo (o matrice Hessiana) è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}.$$

2. Il gradiente della funzione $f(x,y,z) = xyz$ è

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(yz, xz, xy\Big).$$

Il gradiente secondo (o matrice Hessiana) è

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Il gradiente della funzione $f(x,y,z) = xye^z$ è

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(ye^z, xe^z, xye^z\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & e^z & ye^z \\ e^z & 0 & xe^z \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{pmatrix}.$$

4. Il gradiente della funzione $f(x,y) = xe^{xy}$ è

$$\nabla f(x,y) = \Big(e^{xy} + xe^{xy}y, xe^{xy}x\Big) = \Big(e^{xy}(1+xy), x^2e^{xy}\Big).$$

Il gradiente secondo è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy}y(1+xy) + e^{xy}y & e^{xy}x(1+xy) + e^{xy}x \\ 2xe^{xy} + x^2e^{xy}y & x^2e^{xy}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy}(2+xy) & xe^{xy}(2+xy) \\ xe^{xy}(2+xy) & x^3e^{xy} \end{pmatrix}.$$

B. Massimi e minimi liberi

▶ 1. La funzione $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ è una forma quadratica. Calcoliamo il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 4y).$$

Poniamolo uguale al vettore nullo e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 4y = 0. \end{cases}$$

È un sistema lineare e si vede facilmente che esso ha la sola soluzione banale (per il teorema di Cramer). Quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$.

Proviamo a studiare la natura di questo punto con le condizioni del secondo ordine. Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il gradiente secondo è una matrice definita positiva e quindi il punto $(0,0)$ è di minimo locale (in realtà si potrebbe dire che è il punto di minimo globale).

2. Il gradiente di $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - x + y$ è

$$\nabla f(x,y) = (4x - 3y - 1, -3x + 1).$$

Ponendolo uguale al vettore nullo otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ -3x + 1 = 0. \end{cases}$$

Si può ricavare dalla seconda equazione x e sostituire nella prima. Si ottiene la (unica) soluzione $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$. Quindi questo è l'unico punto stazionario.

Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che il determinante di questa matrice è negativo, il gradiente secondo è indefinito e quindi il punto stazionario non è né di massimo né di minimo (punto di sella).

3. Il gradiente di $f(x,y) = x^2 - xy - y^2 + x - y$ è

$$\nabla f(x,y) = (2x - y + 1, -x - 2y - 1).$$

Ponendolo uguale al vettore nullo otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x - 2y = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha una sola soluzione in base al teorema di Cramer (il determinante della matrice del sistema è diverso da zero). Può essere risolto con la regola di Cramer e si ha

$$x = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}.$$

Quindi l'unico punto stazionario è il punto $(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$.

Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è negativo e quindi il gradiente secondo è indefinito. Pertanto il punto stazionario non è né di massimo né di minimo (punto di sella).

4. Il gradiente di $f(x,y) = 2x + 3y + x^2 - y^3$ è

$$\nabla f(x,y) = (2 + 2x, 3 - 3y^2).$$

Ponendolo uguale al vettore nullo otteniamo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} 2 + 2x = 0 \\ 3 - 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Vi sono quindi due punti stazionari: $(-1,-1)$ e $(-1,1)$.

Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}.$$

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(-1,-1)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

che è definito positivo. Quindi il punto $(-1,-1)$ è punto di minimo locale.

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(-1,1)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

che è indefinito. Quindi il punto $(-1,1)$ non è né di massimo né di minimo.

5. Il gradiente di $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$ è

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2y, -2x + 2y).$$

Ponendolo uguale al vettore nullo otteniamo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = x \\ 3x^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = x \\ x(3x-2) = 0. \end{cases}$$

Ci sono due possibili soluzioni: $(0,0)$ e $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. La funzione ha quindi questi due punti stazionari.

Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(0,0)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

che è indefinito. Quindi l'origine non è né di massimo né di minimo.

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ si ottiene

$$\nabla^2 f(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definito positivo. Quindi $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ è punto di minimo locale.

6. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x^3 - xy^2$ è

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - y^2, -2xy).$$

Poniamolo uguale al vettore nullo e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ -2xy = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione richiede che sia o $x = 0$ oppure $y = 0$ e usando la prima equazione si vede subito che l'unica soluzione è il punto $(0,0)$.

Il gradiente secondo di f è

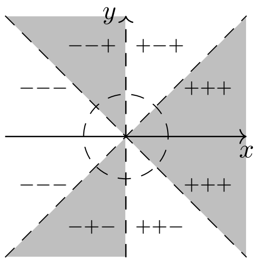
$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(0,0)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita.[1] Non possiamo quindi concludere nulla con le condizioni del secondo ordine.

[1] In realtà è contemporaneamente semidefinita positiva e negativa, ma l'importante è che sia semidefinita.



Osserviamo che il valore della funzione f nell'origine è zero. In questi casi a volte si può stabilire la natura del punto stazionario studiando il segno della funzione in prossimità di esso.[2] La funzione è la stessa di un esercizio considerato in precedenza nella sezione *Studio del segno di una funzione*. Riprendendo il risultato ottenuto in quell'occasione, abbiamo che la funzione $x^3 - xy^2 = x(x-y)(x+y)$ è positiva nelle regioni evidenziate in grigio. Si vede quindi che in prossimità dell'origine (cioè *in ogni intorno* di essa) la funzione cambia segno e quindi l'origine non è né di massimo né di minimo.
Si noti che se il valore della funzione nel punto stazionario non fosse zero, e fosse diciamo 1, allora occorrerebbe studiare dove la funzione è maggiore di 1.

7. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x^2y + xy^3$ è

$$\nabla f(x,y) = (2xy + y^3, x^2 + 3xy^2).$$

Poniamolo uguale al vettore nullo e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2xy + y^3 = 0 \\ x^2 + 3xy^2 = 0 \end{cases} \quad \text{che possiamo anche scrivere} \quad \begin{cases} y(2x + y^2) = 0 \\ x(x + 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Ora, dalla prima equazione, se $y = 0$ abbiamo immediatamente anche $x = 0$ dalla seconda (quindi il punto $(0,0)$ è una soluzione). Oppure, dalla prima può essere $2x + y^2 = 0$ e quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y^2 = 0 \\ x(x + 3y^2) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y^2 = -2x \\ x(x - 6x) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y^2 = -2x \\ -5x^2 = 0. \end{cases}$$

Si vede allora che così si ritrova la soluzione già trovata prima. Quindi $(0,0)$ è l'unico punto stazionario.

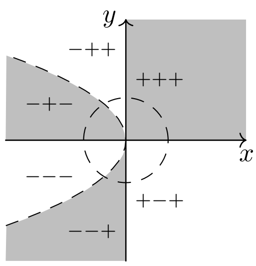
Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 3y^2 \\ 2x + 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}.$$

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(0,0)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita. Anche in questo caso non possiamo concludere nulla con le condizioni del secondo ordine.



Osserviamo che il valore della funzione f nell'origine è zero. Anche qui, come nel precedente esercizio, possiamo studiare il segno della funzione in prossimità del punto stazionario. La funzione è la stessa di un altro esercizio considerato in precedenza nella sezione *Studio del segno di una funzione*. Riprendendo il risultato ottenuto in quell'occasione, abbiamo che la funzione $x^2y + xy^3 = xy(x+y^2)$ è positiva nelle regioni evidenziate in grigio. Si vede quindi che in prossimità dell'origine (cioè *in ogni intorno* di essa) la funzione cambia segno e quindi l'origine non è né di massimo né di minimo.

8. Il gradiente della funzione $f(x,y) = (1-x^2)y + x^2$ è

$$\nabla f(x,y) = (-2xy + 2x, 1 - x^2).$$

Poniamolo uguale al vettore nullo e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} -2xy + 2x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{che possiamo anche scrivere} \quad \begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ x^2 = 1. \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata con $x = 1$ oppure con $x = -1$. Si ottengono i due punti stazionari $(1,1)$ e $(-1,1)$.

Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y + 2 & -2x \\ -2x & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] Il motivo è che se, studiando il segno, dovessimo trovare che la funzione è positiva (negativa) in un intorno del punto stazionario, allora possiamo dire che senz'altro si tratta di un punto di minimo (massimo). Se invece troviamo che in un intorno la funzione cambia segno, cioè assume sia valori positivi sia valori negativi, allora possiamo dire che il punto stazionario non è né di massimo né di minimo.

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(1,1)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice indefinita. Quindi il punto $(1,1)$ non è né di massimo né di minimo.

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(-1,1)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice indefinita. Anche il punto $(-1,1)$ non è né di massimo né di minimo.

9. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ è

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x).$$

Poniamolo uguale al vettore nullo e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha per soluzioni $x = 0$, $x = 1$ oppure $x = -1$. Sostituendo nella prima si ottengono i tre punti stazionari $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Il gradiente secondo di f è

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il gradiente secondo nel punto $(0,0)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice indefinita e quindi $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo. Calcolando il gradiente secondo nel punto $(1,1)$ si ottiene

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva e quindi $(1,1)$ è punto di minimo locale. Infine calcolando il gradiente secondo nel punto $(-1,-1)$ si ottiene ancora

$$\nabla^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva e quindi anche $(-1,-1)$ è punto di minimo locale.[3]

10. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x^2 \ln^2 y$ è

$$\nabla f(x,y) = \left(2x \ln^2 y, \frac{2x^2 \ln y}{y}\right).$$

Osserviamo intanto che la funzione è definta per $y > 0$, cioè nel primo e secondo quadrante. Per trovare i punti stazionari scriviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x \ln^2 y = 0 \\ \dfrac{2x^2 \ln y}{y} = 0. \end{cases}$$

Dalla prima, se $x = 0$ anche la seconda è soddisfatta, e quindi sono soluzioni tutti i punti del tipo $(0,y)$, con $y > 0$. Poi, sempre dalla prima, se $y = 1$ anche la seconda è soddisfatta e pertanto sono soluzioni anche tutti i punti del

[3] Non c'è da meravigliarsi di questa "simmetria", dato che la funzione f è pari rispetto all'origine: infatti

$$f(-x,-y) = (-x)^4 + (-y)^4 - 4(-x)(-y) = x^4 + y^4 - 4xy = f(x,y).$$

tipo $(x, 1)$, con x qualunque. Allora i punti stazionari sono quelli del semiasse positivo delle y e quelli della retta di equazione $y = 1$. Per stabilire la natura dei punti stazionari calcoliamo il gradiente secondo

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\ln^2 y & 4x\ln y \cdot \frac{1}{y} \\ 4x\ln y \cdot \frac{1}{y} & 2x^2 \cdot \frac{1-\ln y}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Nei punti del tipo $(0, y)$ il gradiente secondo vale

$$\nabla^2 f(0, y) = \begin{pmatrix} 2\ln^2 y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{che è semidefinita positiva.}$$

Nei punti del tipo $(x, 1)$ il gradiente secondo vale

$$\nabla^2 f(x, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{che è ancora semidefinita positiva.}$$

Le condizioni del secondo ordine non consentono di concludere in nessun caso. Lo studio del segno della funzione, che è nulla sui punti stazionari e per il resto positiva, porta a dire che tutti i punti stazionari sono di minimo (globale).

C. Massimi e minimi vincolati

► 1. La funzione è una forma quadratica definita positiva, come si trova subito con le regole sui minori principali. Il vincolo è una retta. Possiamo ricavare y dall'equazione del vincolo e otteniamo $y = -x - 1$. La restrizione di f sul vincolo è

$$f(x, y)\Big|_{y=-x-1} = x^2 + x(-x - 1) + 2(-x - 1)^2 = 2x^2 + 3x + 2.$$

Per trovare i punti stazionari vincolati calcoliamo la derivata della restrizione e la poniamo uguale a zero:

$$D(2x^2 + 3x + 1) = 4x + 3 = 0.$$

Si trova l'unica soluzione $x = -\frac{3}{4}$. Questa è ovviamente l'ascissa del punto stazionario vincolato. L'ordinata si trova attraverso l'equazione del vincolo. Da

$$y = -x - 1 \qquad \text{si trova} \qquad y = -\frac{1}{4}.$$

Il punto stazionario vincolato è quindi $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$. Considerando l'espressione che fornisce i valori della restrizione di f al vincolo,[4] si può concludere facilmente che tale punto è di minimo (globale) vincolato.

2. La funzione è una forma quadratica indefinita, come si trova subito con le regole sui minori principali. Il vincolo è una retta. Possiamo ricavare y dall'equazione del vincolo e otteniamo $y = 1 - x$. La restrizione di f sul vincolo è

$$f(x, y)\Big|_{y=1-x} = -2x^2 + 5x(1 - x) - 2(1 - x)^2 = -9x^2 + 9x - 2.$$

Calcoliamo la derivata della restrizione e poniamola uguale a zero:

$$D(-9x^2 + 9x - 2) = -18x + 9 = 0.$$

Si trova l'unica soluzione $x = \frac{1}{2}$. Questa è l'ascissa del punto stazionario vincolato. L'ordinata si trova attraverso l'equazione del vincolo. Da

$$y = 1 - x \qquad \text{si trova} \qquad y = \frac{1}{2}.$$

Il punto stazionario vincolato è quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La funzione f sul vincolo si comporta come un polinomio di secondo grado, con coefficiente di x^2 negativo. Quindi chiaramente il punto stazionario è di massimo (globale) vincolato.

3. Il vincolo è una parabola (asse verticale e concavità verso il basso). Possiamo ricavare y dall'equazione del vincolo e otteniamo $y = -x^2 - 1$. La restrizione di f sul vincolo è

$$f(x, y)\Big|_{y=-x^2-1} = x^2 + x + 1.$$

[4] La funzione f sul vincolo si comporta come un polinomio di secondo grado, con coefficiente di x^2 positivo. Quindi chiaramente il punto stazionario è di minimo.

Calcoliamo la derivata della restrizione e poniamola uguale a zero:

$$D(x^2 + x + 1) = 2x + 1 = 0.$$

Si trova l'unica soluzione $x = -\frac{1}{2}$. L'ordinata si trova attraverso l'equazione del vincolo. Da

$$y = -x^2 - 1 \qquad \text{si trova} \qquad y = -\frac{5}{4}.$$

Il punto stazionario vincolato è quindi $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$. La funzione f sul vincolo si comporta come un polinomio di secondo grado, con coefficiente di x^2 positivo e quindi il punto stazionario è di minimo (globale) vincolato.

4. Il vincolo è una parabola (asse orizzontale e concavità verso destra). Possiamo ricavare x dall'equazione del vincolo e otteniamo $x = y^2$. La restrizione di f sul vincolo è quindi

$$f(x,y)\Big|_{x=y^2} = y^2 - 6y + y^4.$$

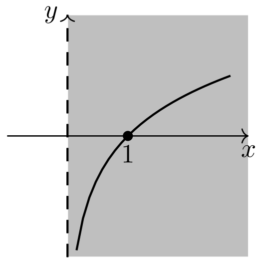
Calcoliamo la derivata della restrizione e poniamola uguale a zero:

$$D(y^4 + y^2 - 6y) = 4y^3 + 2y - 6 = (y-1)(4y^2 + 4y + 6).$$

La derivata si annulla solo con $y = 1$ (il polinomio di secondo grado non si annulla mai) e quindi c'è l'unico punto stazionario $(1,1)$. Con lo studio del segno della derivata (osservare che il polinomio di secondo grado è sempre positivo) si trova subito che si tratta di un punto di minimo (globale) vincolato.

► 5. Osserviamo intanto che la funzione è definita per $x > 0$ e quindi sul primo o quarto quadrante. Possiamo ricavare y dall'equazione del vincolo e otteniamo $y = \ln x$. Il vincolo è quindi il grafico della funzione logaritmica, che sta appunto nel primo e quarto quadrante.
La restrizione di f sul vincolo è

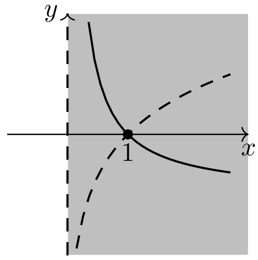
$$f(x,y)\Big|_{y=\ln x} = \ln^2 x.$$



Calcoliamo la derivata della restrizione e poniamola uguale a zero:

$$D(\ln^2 x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Si trova l'unica soluzione $x = 1$ e quindi c'è l'unico punto stazionario vincolato $(1,0)$. Si tratta di un punto di minimo vincolato, come si vede facilmente considerando l'espressione della restrizione di f al vincolo (sempre non negativa e nulla nel punto stazionario).



Passiamo ora al vincolo di equazione $\frac{1}{x} - y - 1 = 0$, cioè $y = \frac{1}{x} - 1$. Tale vincolo (cioè la curva definita da questa equazione) passa per il punto $(1,0)$ e si disegna facilmente ricordando le trasformazioni sui grafici elementari (grafico di $y = \frac{1}{x}$ traslato in basso di 1). Si ottiene la figura a fianco.
La restrizione di f su questo nuovo vincolo è

$$f(x,y)\Big|_{y=\frac{1}{x}-1} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln x.$$

La derivata della restrizione è

$$D\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln x\right) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

Si trova facilmente che tale derivata si annulla per $x = 1$ e quindi il punto $(1,0)$ è stazionario anche su questo nuovo vincolo. Non si tratta di una coincidenza, dato che il punto $(1,0)$ è stazionario per la funzione f, dato che il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (\frac{y}{x}, \ln x)$ e questo si annulla in $(1,0)$. È naturale che un punto stazionario sia stazionario lungo un qualunque vincolo passante per il punto stesso.

► 6. La funzione è $f(x,y) = xy$ e il vincolo è dato dall'equazione $g(x,y) = 2x - y + 1 = 0$.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange consiste nel considerare un sistema di condizioni che dicono sostanzialmente che nel punto di massimo/minimo vincolato, oltre al vincolo, deve valere una condizione di proporzionalità tra i gradienti della funzione f e della funzione g. Segnalo che il tutto equivale a scrivere una particolare e importante funzione, detta *funzione Lagrangiana* del problema in questione, che in generale è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y)).$$

Fatto questo, le condizioni di Lagrange per un punto stazionario si ottengono uguagliando a zero il gradiente della funzione Lagrangiana, rispetto alle sue tre variabili (quindi moltiplicatore λ compreso). Infatti, così facendo,

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} f'_x = \lambda g'x \\ f'_y = \lambda g'y \\ g = 0 \end{cases}$$

che sono appunto le condizioni di Lagrange.

Nel nostro problema abbiamo allora

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2x - y + 1)$$

e le condizioni sono

$$\begin{cases} y - 2\lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ 2x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Il sistema equivale a

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = -\lambda \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = -\lambda \\ -2\lambda - 2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Il punto stazionario vincolato è quindi $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

7. Abbiamo $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ e il vincolo è dato dall'equazione $g(x, y) = x - y^2 = 0$.

La funzione Lagrangiana del nostro problema è allora

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x^2 - y^2 - \lambda(x - y^2)$$

e le condizioni sono date dal sistema

$$\begin{cases} 4x - \lambda = 0 \\ -2y + 2\lambda y = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} 4x = \lambda \\ 2y(\lambda - 1) = 0 \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta se $\lambda = 1$ oppure se $y = 0$.

Se $\lambda = 1$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = \frac{1}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{e quindi i punti} \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

Se invece $y = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi il punto} \quad (0, 0).$$

8. Abbiamo $f(x, y) = x^2$ e il vincolo è dato dall'equazione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

La funzione Lagrangiana del nostro problema è allora

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

e le condizioni sono date dal sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = 0 \\ \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta se $x = 0$ oppure se $\lambda = 1$.

Se $x = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi i punti} \quad (0, 1) \quad \text{oppure} \quad (0, -1).$$

Se invece $\lambda = 1$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{e quindi i punti} \quad (1, 0) \quad \text{oppure} \quad (-1, 0).$$