Soluzioni delle Esercitazioni IV – 14-18/10/2024

A. Insiemi limitati, estremo superiore/inferiore

▶ 1. In alcuni casi l'insieme è dato esplicitamente, in altri occorre prima determinare l'insieme.

(a) L'insieme $(-\infty, 0] \cup \{1, 2\}$ è limitato superiormente ma non limitato inferiormente. Una limitazione superiore è ad esempio 3 (ma anche 2), non esistono limitazioni inferiori. L'estremo superiore è 2, l'estremo inferiore possiamo dire che è $-\infty$, il massimo esiste ed è 2.

(b) L'insieme $(-1, 1) \cup [2, +\infty)$ è limitato inferiormente ma non limitato superiormente. Una limitazione inferiore è ad esempio -1, non esistono limitazioni superiori. L'estremo superiore è $+\infty$, l'estremo inferiore è -1, il minimo non esiste.

(c) L'insieme $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ è pari}\}$, cioè l'insieme dei numeri naturali pari, è l'insieme $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. È limitato inferiormente ma non limitato superiormente. L'estremo inferiore, che è anche minimo, è 2, l'estremo superiore è $+\infty$.

(d) L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} < 100\}$ è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 10^4\}$, cioè l'intervallo $[0, 10^4)$. È limitato sia inferiormente sia superiormente. L'estremo inferiore, che è anche minimo, è 0, l'estremo superiore è 10^4. L'insieme non ha massimo.

(e) L'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ è primo}\}$, cioè l'insieme dei numeri primi,[1] è limitato inferiormente ma non limitato superiormente.[2] L'estremo inferiore, che è anche minimo, è 2, l'estremo superiore è $+\infty$.

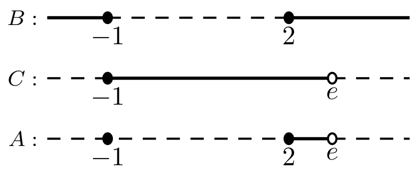
(f) L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x^4 < 4\}$ è chiaramente l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^4 < 4$, che coincidono con le soluzioni di $x^2 < 2$ e che sono quindi le x comprese tra $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$. Possiamo pertanto scrivere

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 < 4\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Allora l'insieme è limitato sia inferiormente sia superiormente, ha per estremo inferiore $-\sqrt{2}$ e per estremo superiore $\sqrt{2}$. Non ha né massimo né minimo.

B. Topologia

▶ 1. Aiutiamoci con un grafico.



L'intersezione è
$A = B \cap C = \{-1\} \cup [2, e)$.

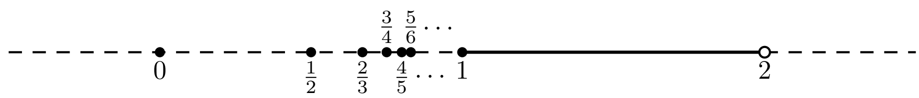
I punti interni di A sono dati dall'intervallo $(2, e)$.

L'insieme dei punti di frontiera è $\{-1, 2, e\}$; l'insieme dei punti di accumulazione è l'intervallo $[2, e]$.

Il punto -1 è un punto isolato per l'insieme A.

I punti esterni di A sono dati dall'insieme $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (e, +\infty)$.

▶ 2. Calcoliamo i primi elementi dell'insieme B: con $n = 1$ si ottiene 0, con $n = 2$ si ottiene $\frac{1}{2}$, con $n = 3$ si ha $\frac{2}{3}$, con $n = 4$ si ha $\frac{3}{4}$, e così via; si ottengono frazioni, del tipo $\frac{n-1}{n}$, sempre più vicine ad 1. Una rappresentazione dell'insieme A può quindi essere la seguente.



I punti interni sono dati dall'intervallo $(1, 2)$.

Tutti i punti del tipo $\frac{n-1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$ sono punti isolati nell'insieme A.

[1] Un numero naturale si dice *primo* se è maggiore di uno ed è divisibile solo per 1 e per il numero stesso.

[2] Il fatto che i numeri primi siano infiniti è un risultato noto da molti secoli. La prima dimostrazione che si conosce è di Euclide ed è una celebre e bella *dimostrazione per assurdo*. Chi è interessato può trovare questa dimostrazione ad esempio su WikipediA (`http://it.wikipedia.org`).

I punti di frontiera sono 1,2 e tutti i punti isolati.

I punti di accumulazione sono quelli dell'intervallo $[1, 2]$.

I punti esterni sono quelli che appartengono al complementare di A, ad eccezione di 2.

C. Funzioni elementari. Immagine, controimmagine

▶ Nelle rappresentazioni grafiche che seguono indico con un tratto marcato nero quello che è un dato dell'esercizio, mentre indico con tratto marcato rosso il risultato. Così ad esempio, se dobbiamo trovare l'immagine di un certo intervallo I, tale intervallo I viene indicato in nero e la sua immagine in rosso. Lo stesso per la controimmagine: l'intervallo in nero e la controimmagine in rosso.

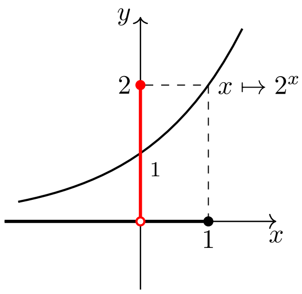
1. Può essere utile disegnare il grafico della funzione $x \mapsto 2^x$ (definita in tutto $\mathbb{R}$).

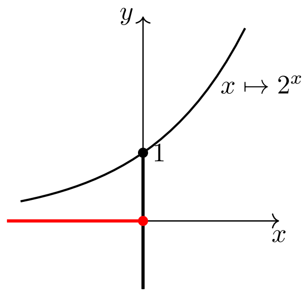
- L'immagine dell'intervallo $(-\infty, 1]$ (vedi figura sotto a sinistra) è l'intervallo $(0, 2]$.[3] Possiamo quindi dire che

$$\sup(0, 2] = \max(0, 2] = 2 \qquad \text{e che} \qquad \inf(0, 2] = 0.$$

- La controimmagine dell'intervallo $(-\infty, 1]$ (figura sotto a destra) è l'intervallo $(-\infty, 0]$ e si ha

$$\sup(-\infty, 0] = \max(-\infty, 0] = 0 \qquad \text{e} \qquad \inf(-\infty, 0] = -\infty.$$



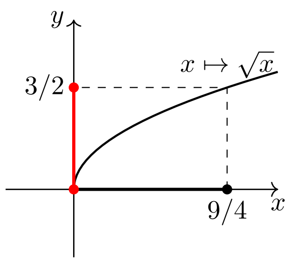


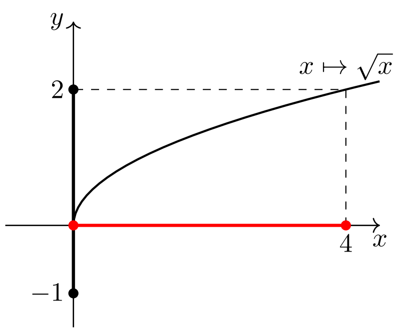
▶ 2. La funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ è definita in $[0, +\infty)$. Può essere utile disegnare il grafico.

- L'immagine dell'intervallo $[0, \frac{9}{4}]$ (figura sotto a sinistra) è l'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$. Possiamo quindi dire che

$$\sup\left[0, \frac{3}{2}\right] = \max\left[0, \frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2} \qquad \text{e che} \qquad \inf\left[0, \frac{3}{2}\right] = \min\left[0, \frac{3}{2}\right] = 0.$$

- La controimmagine dell'intervallo $[-1, 2]$ (figura sotto a destra) è l'intervallo $[0, 4]$, e si ha $\min[0, 4] = 0$ e $\max[0, 4] = 4$.



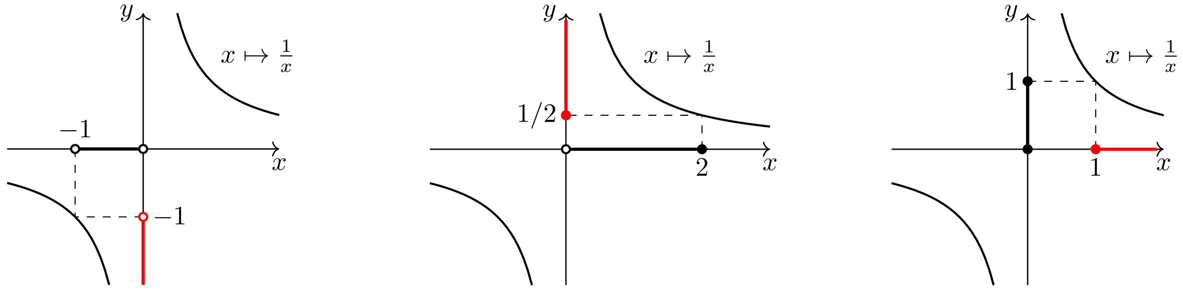


▶ 3. La funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Anche qui è utile disegnare il grafico.

- L'immagine dell'intervallo $(-1, 0)$ è l'intervallo $(-\infty, -1)$ (figura sotto a sinistra).

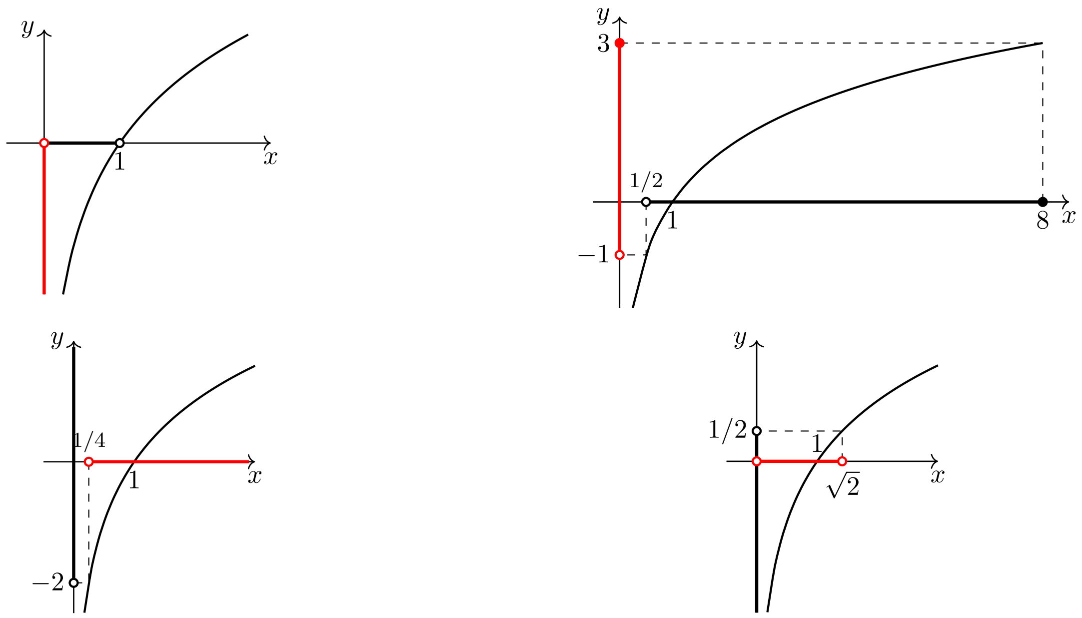
[3] Attenzione che 0 non fa parte dell'intervallo, dato che per nessun valore di x la funzione vale 0.

- L'immagine dell'intervallo $(0,2]$ è l'intervallo $[\frac{1}{2},+\infty)$ (figura sotto al centro).
- La controimmagine dell'intervallo $[0,1]$ è l'intervallo $[1,+\infty)$ (figura sotto a destra).



► 4. Le rappresentazioni grafiche riportate sotto giustificano, nell'ordine, questi risultati.

- L'immagine dell'intervallo $(0,1)$ è l'intervallo $(-\infty,0)$
- L'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{2},8]$ è l'intervallo $(-1,3]$
- La controimmagine dell'intervallo $(-2,+\infty)$ è l'intervallo $(\frac{1}{4},+\infty)$
- La controimmagine dell'intervallo $(-\infty,\frac{1}{2})$ è l'intervallo $(0,\sqrt{2})$.



D. Funzioni elementari. Funzione inversa

► 1. Per trovare l'espressione della funzione inversa scriviamo anzitutto la funzione nella forma $y = 1 - x^3$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$x^3 = 1 - y \quad \text{da cui} \quad x = \sqrt[3]{1-y}.$$

Quindi possiamo scrivere che l'espressione della funzione inversa di f è

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{1-y}.$$ [4]

Funzione f e funzione inversa sono definite entrambe in tutto $\mathbb{R}$.

[4] Esattamente come per una funzione di variabile x scriviamo $y = f(x)$, l'espressione della funzione inversa può essere data indifferentemente con

$$x = \sqrt[3]{1-y} \quad \text{oppure, come è stato fatto, con} \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{1-y}.$$

2. Scriviamo anzitutto la funzione nella forma $y = 2 + 3e^x$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$e^x = \frac{y-2}{3} \quad \text{da cui} \quad x = \ln\left(\frac{y-2}{3}\right).$$

A differenza della funzione f, che è definita in tutto $\mathbb{R}$, la sua funzione inversa è definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che coincide con l'immagine di f (cioè l'intervallo $(2, +\infty)$).

3. Scriviamo anzitutto la funzione nella forma $y = 3 - 2\ln x$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$\ln x = \frac{3-y}{2} \quad \text{da cui} \quad x = e^{(3-y)/2}.$$

Qui possiamo osservare che la funzione f è definita soltanto nell'intervallo $(0, +\infty)$, e invece la sua funzione inversa è definita in tutto $\mathbb{R}$, che è l'immagine di f.

4. Scriviamo anzitutto la funzione nella forma $y = 1 - \sqrt[3]{x+1}$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$\sqrt[3]{x+1} = 1 - y \quad \text{da cui} \quad x + 1 = (1-y)^3 \quad \text{da cui infine} \quad x = (1-y)^3 - 1.$$

Quindi possiamo scrivere che l'espressione della funzione inversa di f è

$$f^{-1}(y) = (1-y)^3 - 1.$$

Funzione f e funzione inversa sono definite entrambe in tutto $\mathbb{R}$.

5. Scriviamo anzitutto la funzione nella forma $y = 1 - e^{1-x}$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$e^{1-x} = 1 - y \quad \text{da cui} \quad 1 - x = \ln(1-y) \quad \text{da cui infine} \quad x = 1 - \ln(1-y).$$

Quindi possiamo scrivere che l'espressione della funzione inversa di f è

$$f^{-1}(y) = 1 - \ln(1-y).$$

La funzione f è definita in tutto $\mathbb{R}$, mentre la sua funzione inversa è definita nell'intervallo $(-\infty, 1)$, che è l'immagine di f.

6. Scriviamo $y = 1 + \sqrt[3]{\ln x - 1}$. Poi ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$\sqrt[3]{\ln x - 1} = y - 1 \quad \text{da cui} \quad \ln x - 1 = (y-1)^3 \quad \text{da cui} \quad \ln x = 1 + (y-1)^3 \quad \text{da cui infine} \quad x = e^{1+(y-1)^3}.$$

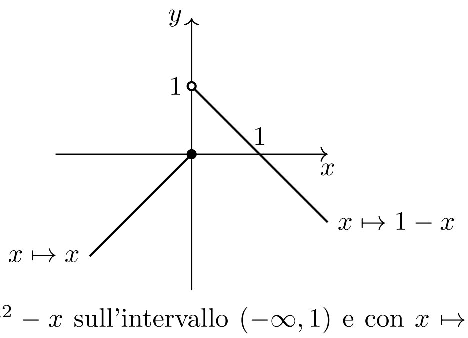
Quindi l'espressione della funzione inversa di f è

$$f^{-1}(y) = e^{1+(y-1)^3}.$$

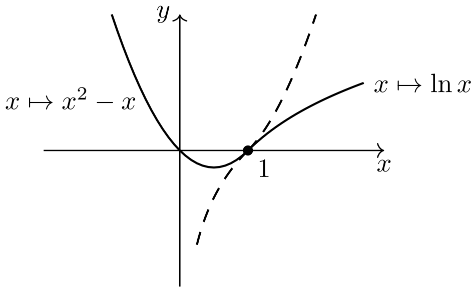
La funzione f è definita in $(0, +\infty)$ e la funzione inversa è definita in tutto $\mathbb{R}$.

E. Grafici di funzioni definite a tratti

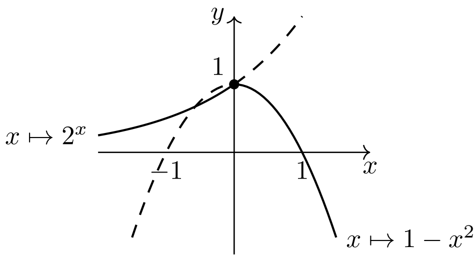
► 1. La funzione f coincide con $x \mapsto x$ sulle $x \leq 0$ e con $x \mapsto 1 - x$ sulle $x > 0$. Quindi il grafico di f è il seguente



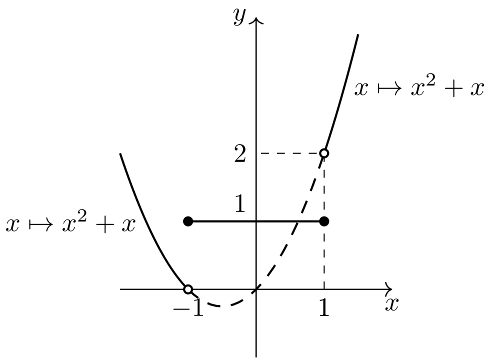
2. La funzione f coincide con $x \mapsto x^2 - x$ sull'intervallo $(-\infty, 1)$ e con $x \mapsto \ln x$ sull'intervallo $[1, +\infty)$. Quindi il grafico di f è il seguente



3. La funzione f coincide con $x \mapsto 2^x$ sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e con $x \mapsto 1 - x^2$ sull'intervallo $[0, +\infty)$. Quindi il grafico di f è il seguente



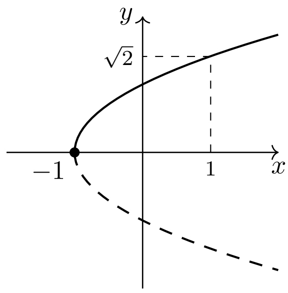
4. La funzione f coincide con $x \mapsto 1$ sull'intervallo $[-1, 1]$ e con $x \mapsto x^2 + x$ sull'insieme complementare, cioè $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Quindi il grafico di f è il seguente



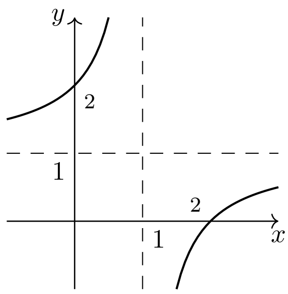
F. Grafici con la geometria analitica

► Qui si tratta di usare quello che sappiamo sulle curve del piano definite da equazioni in due variabili per ricavare il grafico delle funzioni.

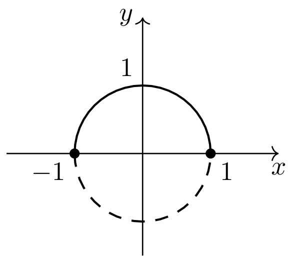
1. Con la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$, poniamo $y = \sqrt{x+1}$. Anzitutto osserviamo che risulta certamente $y \geq 0$ perché la radice è una quantità non negativa. Poi, elevando al quadrato, si ottiene $y^2 = x+1$ che si può anche scrivere $x = y^2 - 1$, che è l'equazione di una parabola con asse orizzontale. Attenzione che il grafico di f non è tutta la parabola, ma soltanto la parte che sta sulle $y \geq 0$, cioè la parte che sta sul primo e secondo quadrante.
L'immagine della funzione è l'intervallo $[0, +\infty)$. L'estremo inferiore (che è anche il minimo) è 0, l'estremo superiore è $+\infty$.



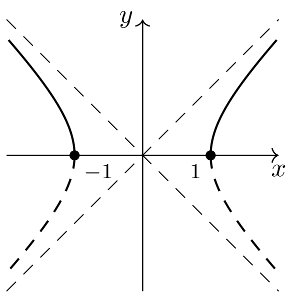
2. Con la funzione $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$, ponendo $y = 1 - \frac{1}{x-1}$, dopo aver osservato che deve essere $x \neq 1$, possiamo scrivere $y - 1 = -\frac{1}{x-1}$ e quindi $(x-1)(y-1) = -1$. Si tratta dell'iperbole di centro il punto $(1, 1)$, asintoti dati dalle rette di equazione $x = 1$ e $y = 1$, con i due rami che occupano l'equivalente del secondo e quarto quadrante (rispetto al centro).
L'immagine della funzione è l'insieme $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Gli estremi, inferiore e superiore, sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$.



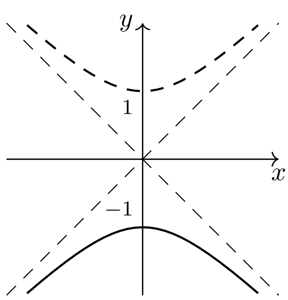
3. Con la funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, ponendo $y = \sqrt{1-x^2}$, dobbiamo anzitutto osservare che risulta certamente $y \geq 0$. Poi, elevando al quadrato, si ottiene $y^2 = 1 - x^2$ e quindi $x^2 + y^2 = 1$, che è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Il grafico di f è pertanto la semicirconferenza che sta sul primo e secondo quadrante.
L'immagine della funzione è l'intervallo $[0, 1]$. L'estremo inferiore (che è anche il minimo) è 0, l'estremo superiore (che è anche il massimo) è 1.



4. Con la funzione $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, ponendo $y = \sqrt{x^2-1}$, osserviamo che risulta certamente $y \geq 0$. Elevando al quadrato si ottiene $y^2 = x^2 - 1$ che si può scrivere come $x^2 - y^2 = 1$ ed è l'equazione di un'iperbole di centro l'origine, asintoti le bisettrici dei quadranti e rami che stanno a sinistra e a destra dell'origine. Il grafico di f è soltanto la parte di iperbole che sta non al di sotto dell'asse x. Dal grafico si vede, indirettamente, che la funzione è definita soltanto nell'insieme $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
L'immagine della funzione è l'insieme $[0, +\infty)$. L'estremo inferiore (che è anche il minimo) è 0, l'estremo superiore è $+\infty$.



5. Con la funzione $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$, ponendo $y = -\sqrt{x^2+1}$, osserviamo intanto che questa volta risulta certamente $y \leq 0$. Elevando al quadrato si ottiene $y^2 = x^2 + 1$ che si può scrivere come $x^2 - y^2 = -1$ ed è l'equazione di un'iperbole di centro l'origine, asintoti le bisettrici dei quadranti e rami che stanno al di sopra e al di sotto dell'origine. Il grafico di f è soltanto la parte di iperbole che sta al di sotto dell'asse x. Dal grafico si vede, indirettamente, che la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, come si trova immediatamente osservando che l'argomento della radice è sempre non negativo.
L'immagine della funzione è l'intervallo $(-\infty, -1]$. L'estremo inferiore è $-\infty$, l'estremo superiore (che è anche massimo) è -1.



6. Con la funzione $f(x) = -\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}}$, ponendo $y = -\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}}$, osserviamo intanto che risulta certamente anche qui $y \leq 0$. Poi, elevando al quadrato, si ottiene $y^2 = 1 - \frac{(x-2)^2}{4}$ e quindi $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$, che è l'equazione dell'ellisse di centro $(2, 0)$ e semiassi $a = 2$ sulle x e $b = 1$ sulle y. Il grafico di f è pertanto la parte di ellisse che sta non al di sopra dell'asse x, cioè nel quarto quadrante.
L'immagine della funzione è l'intervallo $[-1, 0]$. L'estremo inferiore (che è anche il minimo) è -1, l'estremo superiore (che è anche il massimo) è 0.