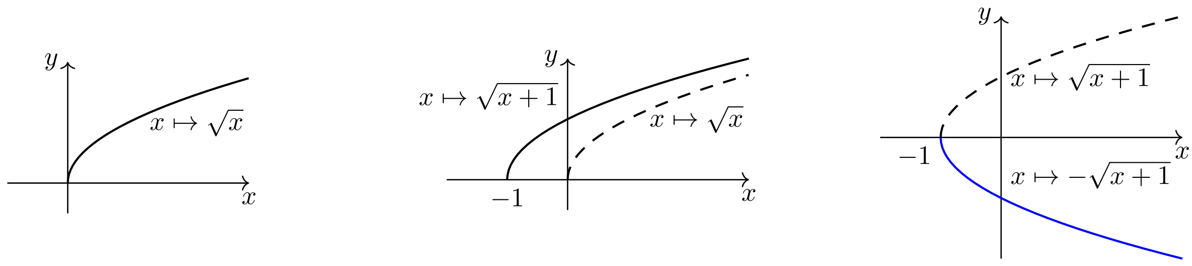
Soluzioni delle Esercitazioni V – 21-25/10/2024

A. Trasformazioni elementari dei grafici

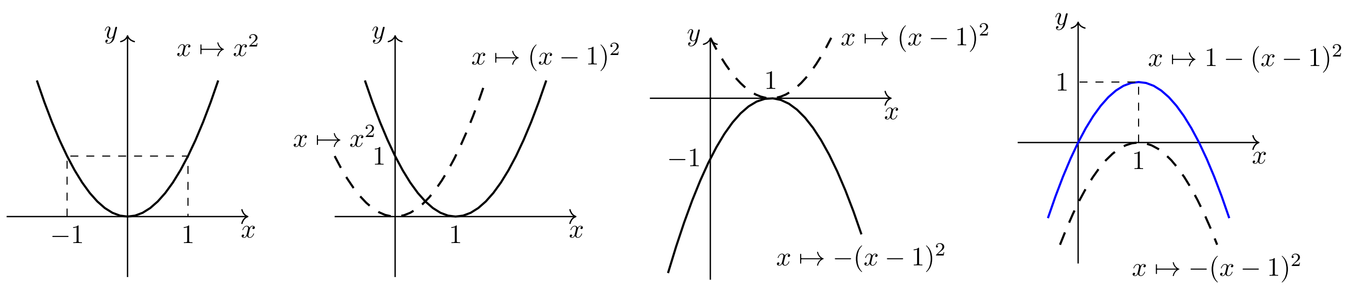
▶ 1. $x \mapsto -\sqrt{x+1}$.

Partendo dal grafico base di $x \mapsto \sqrt{x}$, possiamo passare a quello di $x \mapsto \sqrt{x+1}$ e quindi a quello di $x \mapsto -\sqrt{x+1}$. I grafici qui sotto illustrano i passaggi. Il grafico conclusivo è rappresentato in blu.



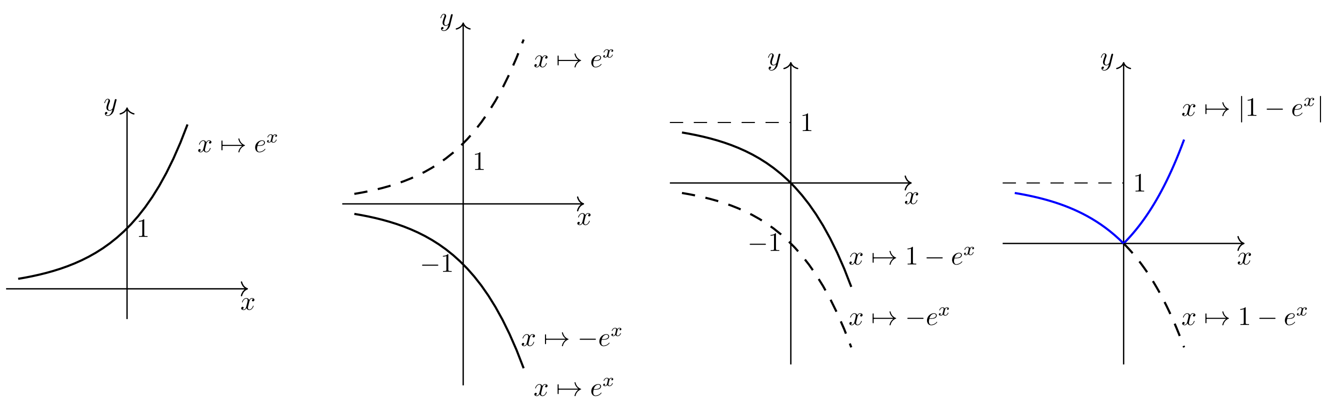
2. $x \mapsto 1-(x-1)^2$.

Partendo dal grafico base di $x \mapsto x^2$, possiamo passare a quello di $x \mapsto (x-1)^2$, quindi a quello di $x \mapsto -(x-1)^2$ e infine a quello voluto aggiungendo 1. I grafici qui sotto illustrano i passaggi.



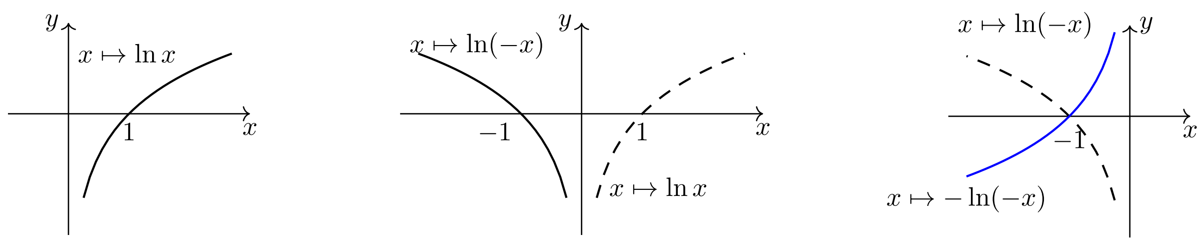
3. $x \mapsto |1-e^x|$.

Partendo dal grafico base di $x \mapsto e^x$, possiamo passare a quello di $x \mapsto -e^x$, quindi a quello di $x \mapsto 1-e^x$ e infine a quello voluto facendo il valore assoluto. I grafici qui sotto illustrano i passaggi.



4. $x \mapsto -\ln(-x)$.

Partendo dal grafico base di $x \mapsto \ln x$, possiamo passare a quello di $x \mapsto \ln(-x)$, e successivamente a quello voluto di $x \mapsto -\ln(-x)$. I grafici qui sotto illustrano i passaggi.



5. $x \mapsto 2^{-|x|}$.

Qui possiamo procedere così: partendo dal grafico base di $x \mapsto 2^x$, possiamo passare a quello di $x \mapsto 2^{-x}$, quindi a quello voluto di $2^{-|x|}$.

Attenzione. Qui la sequenza di trasformazioni che può sembrare più "naturale" è forse

$$2^x \quad \to \quad 2^{|x|} \quad \to \quad 2^{-|x|}.$$

Però, con le trasformazioni che abbiamo considerato (cioè le 6 trasformazioni viste a lezione) non siamo in grado di operare la seconda trasformazione. Si rifletta attentamente su questo aspetto: parlando di un cambio di segno, abbiamo visto le due trasformazioni

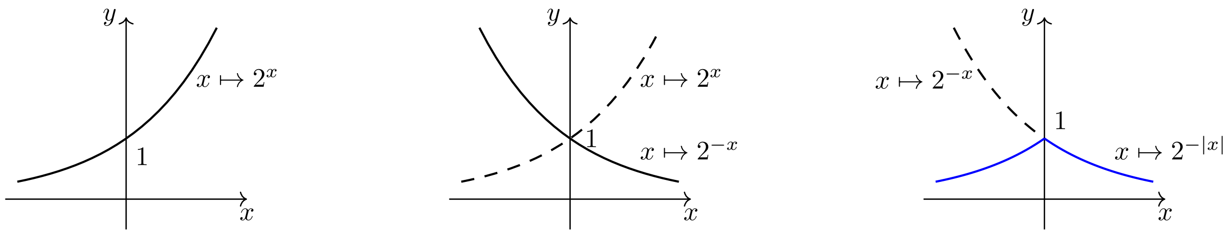
$$f(x) \;\to\; -f(x) \qquad \text{e} \qquad f(x) \;\to\; f(-x)$$

e la trasformazione $2^{|x|} \;\to\; 2^{-|x|}$ non rientra in nessuno dei due casi.[1]

Notare che invece i passaggi indicati all'inizio, cioè

$$2^x \quad \to \quad 2^{-x} \quad \to \quad 2^{-|x|}$$

li sappiamo fare entrambi con le trasformazioni viste (nel primo cambiamo x in $-x$ e nel secondo cambiamo x in $|x|$). I grafici qui sotto illustrano i passaggi.



6. $x \mapsto \frac{1}{1-|x|}$.

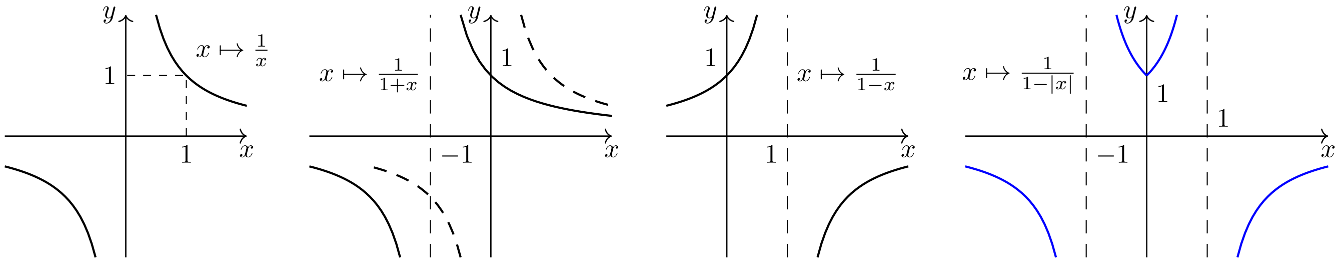
Anche questo caso, come il precedente, presenta qualche insidia.

Vediamo intanto la sequenza di trasformazioni che ci permette di arrivare al risultato, poi alla fine faccio dei commenti sul perché altre sequenze non vanno bene.

Si consideri che all'espressione finale $\frac{1}{1-|x|}$, con le trasformazioni studiate ci possiamo arrivare solo dalla $\frac{1}{1-x}$ (cambiando x in $|x|$). A questa possiamo arrivare dalla $\frac{1}{1+x}$ (cambiando x in $-x$) e infine ovviamente a ques'ultima possiamo arrivare dalla $\frac{1}{x}$ (cambiando x in $1+x$). Pertanto una sequenza possibile è

$$\frac{1}{x} \quad \to \quad \frac{1}{1+x} \quad \to \quad \frac{1}{1-x} \quad \to \quad \frac{1}{1-|x|}.$$

I grafici qui sotto illustrano i passaggi.



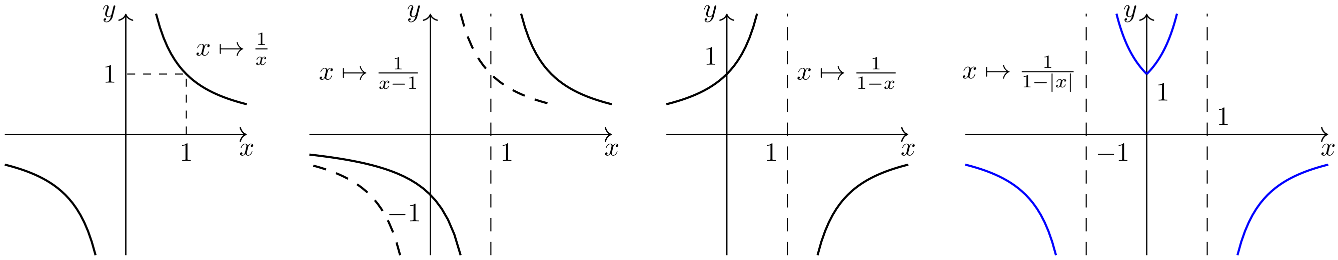
Alternativamente si poteva usare questa sequenza:

$$\frac{1}{x} \quad \to \quad \frac{1}{x-1} \quad \to \quad -\frac{1}{x-1}\left(=\frac{1}{1-x}\right) \quad \to \quad \frac{1}{1-|x|}.$$

Si osservi che anche in questo caso siamo in grado di effettuare tutte le trasformazioni usando quelle studiate. Nella prima cambiamo x in $x-1$, nella seconda facciamo l'opposto della funzione e nella terza cambiamo x in $|x|$.

[1] Infatti la prima ci darebbe $2^{|x|} \to -2^{|x|}$ e la seconda ci darebbe $2^{|x|} \to 2^{|-x|}$. Invece noi vogliamo $2^{|x|} \to 2^{-|x|}$.

I grafici qui sotto illustrano i passaggi.



Ora vediamo sequenze che invece non sono praticabili con le trasformazioni studiate.

Una sequenza di trasformazioni che potrebbe sembrare "naturale" è

$$\frac{1}{x} \quad \to \quad \frac{1}{|x|} \quad \to \quad \frac{1}{-|x|} \quad \to \quad \frac{1}{1-|x|}.$$

Questa non va bene, dato che le prime due le sappiamo fare ma la terza no. La prima consiste nel cambiare x con $|x|$, la seconda nel cambiare il segno di tutta la funzione (scrivere $\frac{1}{-|x|}$ o $-\frac{1}{|x|}$ è lo stesso); la terza comporta l'aggiunta della costante 1: sappiamo aggiungere 1 a tutta la funzione (cioè $f(x)+1$, e nel nostro caso otterremmo $\frac{1}{-|x|}+1 = 1-\frac{1}{|x|}$) oppure aggiungere 1 alla variabile x (cioè $f(x+1)$, e qui otterremmo $\frac{1}{-|x+1|}$). Nessuna delle due evidentemente è quella che vogliamo ottenere.

Un'altra sequenza che potrebbe sembrare fattibile è

$$\frac{1}{x} \quad \to \quad \frac{1}{1+x} \quad \to \quad \frac{1}{1+|x|} \quad \to \quad \frac{1}{1-|x|},$$

ma anche questa non la sappiamo portare a termine, dato che la terza trasformazione non rientra in quelle studiate.[2]

B. Limiti

► I limiti che seguono si possono calcolare con l'algebra dei limiti.

1. Si ha
$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{3x-1} = \frac{1+2}{3-1} = \frac{3}{2}.$$
2. Si ha
$$\lim_{x\to -1} xe^x = (-1)\cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$
3. Si ha
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1+\ln x} = \frac{0}{1+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$
4. Si ha
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+e^x}{x} = \frac{1+0}{-\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$
5. Si ha
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{1+1/x} = \frac{+\infty}{1+0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$
6. Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{-\infty}{0-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$
7. Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - e^x\right) = +\infty - 1 = +\infty.$$

[2] Nella prima cambiamo x in $x+1$, e va bene. Nella seconda cambiamo x in $|x|$, e va bene. Nella terza c'è un cambio di segno: sappiamo cambiare il segno di tutta la funzione (cioè $-f(x)$, e otterremmo $-\frac{1}{1+|x|}$) oppure cambiare il segno di x (cioè $f(-x)$, e otterremmo $\frac{1}{1+|-x|}$), ma nessuna delle due è quella che vogliamo.

8. Si ha
$$\lim_{x\to 1^-}\left(\ln x-\frac{1}{x-1}\right)=0-\frac{1}{0^-}=0-(-\infty)=+\infty.$$

9. Si ha
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

10. Si ha
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-e^x}=\frac{-\infty}{1-1^+}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty.$$

► I limiti che seguono sono tutti forme indeterminate. Propongo per tutti una soluzione algebrica.

11. Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x+x^2}{x^3+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1)}{x^2(x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}{x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{0-0+1}{+\infty+0-0}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

12. Forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{x^2-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+2)}{x^2(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{1-x^2}=\frac{0+2}{1-0}=\frac{2}{1}=2.$$

13. Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^4}{1+x+x^2+x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1-x)}{x^3(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1)}=\frac{1+\infty}{0+0+0+1}=\frac{+\infty}{1}=+\infty.$$

14. Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x+3x^2}{5x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+3)}{x^2(5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\frac{0+0+3}{5-0+0}=\frac{3}{5}.$$

15. Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Dividendo numeratore e denominatore per $\sqrt{x}$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{0+1}{0+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

16. Forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. In questo il raccoglimento non serve (solitamente il raccoglimento può essere efficace per $x\to\pm\infty$ oppure per $x\to 0$). Basta però scomporre in fattori i polinomi. Il numeratore è $(x-1)(x-2)$ e nel denominatore basta raccogliere.
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{4}.$$

17. Forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Basta fare un denominatore comune. Si ha
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-x}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1.$$

18. Forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Il raccoglimento non serve (x tende a 1). Conviene scomporre in fattori, osservando che $1-x=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$. Si ha
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

19. Forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Raccogliendo si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty\cdot(2-1) = +\infty.$$

20. Come il precedente, forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Questo però è più difficile: infatti con il raccoglimento non si risolve. Proviamo a ripetere i passaggi del precedente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty\cdot(1-1) = +\infty\cdot 0.$$

Quindi resta sempre una forma indeterminata. Occorre cambiare metodo. Dobbiamo razionalizzare (cioè moltiplichiamo numeratore e denominatore per $x+\sqrt{x^2+1}$):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

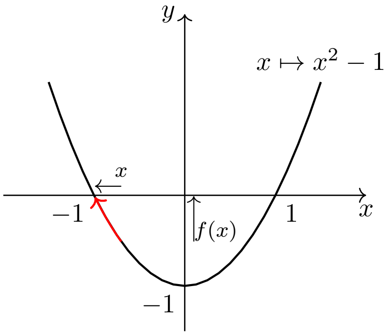
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

► 21. Il limite

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{e^x}{x^2-1}$$

è una forma del tipo $\frac{\ell}{0}$ e per concludere dobbiamo capire che segno ha lo zero a denominatore.

Può essere utile la figura qui a fianco, in cui è tracciato il grafico della funzione $x\mapsto x^2-1$. Da questo possiamo vedere (in rosso è indicata la parte significativa del grafico) che, se $x\to(-1)^+$, cioè se x tende a -1 da valori a destra di -1, i corrispondenti valori della funzione tendono a 0 da valori negativi, cioè in altre parole: per $x\to(-1)^+$ si ha che $f(x)\to 0^-$. Ma allora abbiamo



$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{e^x}{x^2-1} = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty.$$[3]

22. Il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

è una forma indeterminata del tipo $-\infty+\infty$ ed è molto simile al limite dell'esercizio 21. Può essere risolto con un raccoglimento (anche razionalizzando, ma qui il raccoglimento è efficace). Occorre però stare attenti quando si porta sotto radice, in quanto x, che tende a $-\infty$, è negativo.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty\cdot(2-1) = -\infty.$$

Da notare che, portando x sotto radice, il segno davanti alla radice cambia. Ricordo che una possibile motivazione di questo fatto è la seguente: se x è negativo possiamo scrivere

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

e ora possiamo portare sotto radice $|x|$, senza problemi dato che è positivo. Il segno $-$ fuori però resta.

[3] In quanto $e^{-1}=\frac{1}{e}$ è un valore positivo.

► 23. Il limite è una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$. Possiamo portare a denominatore l'esponenziale e scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Si tratta allora del confronto a $+\infty$ tra la funzione potenza e la funzione esponenziale (*confronto standard*). Come noto la funzione potenza va all'infinito più lentamente e quindi il limite è zero.

24. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$$

si ha un confronto standard a $+\infty$ tra una funzione logaritmica (elevata al quadrato) e una potenza (con esponente $1/2$). La funzione potenza va all'infinito più velocemente della funzione logaritmica e quindi il limite è zero.

25. Il limite è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Si tratta di un confronto tra una funzione esponenziale e una potenza. Non è un confronto standard, ma solo perché la frazione è "rovesciata". Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{2^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x^{1/2}}{2^x}}.$$

A denominatore abbiamo ora un confronto standard, che tende a zero. Essendo uno "0^+", cioè uno zero positivo, possiamo dire che il limite è del tipo $\frac{1}{0^+}$, cioè $+\infty$.

26. Il limite è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Siamo nella stessa situazione precedente, con un confronto standard con la frazione "rovesciata". Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln^3 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln^3 x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{(\ln x)^3}{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

27. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x),$$

forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, possiamo fare un raccoglimento, che è efficace in molte situazioni di questo tipo. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

Ricordando che la frazione è un confronto standard logaritmo/potenza e tende a zero, il limite è $+\infty$.

28. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - e^x),$$

forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, possiamo raccogliere e^x: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^3}{e^x} - 1\right).$$

Ricordando che la frazione è un confronto standard potenza/esponenziale e tende a zero, il limite è $+\infty \cdot (-1) = -\infty$.

29. Forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Possiamo dividere numeratore e denominatore per x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x + x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 + x} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

ricordando che a numeratore $\frac{\ln x}{x}$ tende a zero in quanto confronto standard logaritmo/potenza.

30. Forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Possiamo raccogliere a numeratore e a denominatore le due funzioni esponenziali:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2^x}{x^2 + 3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x(\frac{x}{2^x} + 1)}{3^x(\frac{x^2}{3^x} + 1)}.$$

Ricordando che $\frac{x}{2^x}$ e $\frac{x^2}{3^x}$ tendono entrambi a zero (confronti standard potenza/esponenziale), il limite si riduce a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0.$$ [4]

31. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Il limite si può fare in molti modi. Propongo questa soluzione: se dividiamo numeratore e denominatore per la potenza di esponente più piccolo ($\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$) restano potenze con esponente positivo e una costante. Infatti, così facendo abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/3}+x^{1/6}}{x^{5/3}+1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

32. Forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Propongo di raccogliere x a numeratore e 2^x a denominatore. Si ottiene

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}+\ln x}{1+\sqrt{x}+2^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x})}{2^x(\frac{1}{2^x}+\frac{\sqrt{x}}{2^x}+1)}.$$

Ora, tra le parentesi, tutti i termini non costanti tendono a zero. Infatti $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\frac{1}{2^x}$ sono forme del tipo $\frac{1}{+\infty}$, il quoziente $\frac{\ln x}{x}$ tende a zero perché confronto standard logaritmo/potenza e il quoziente $\frac{\sqrt{x}}{2^x}$ tende a zero perché confronto standard potenza/esponenziale. Quindi i termini tra parentesi tendono a 1 e il limite si riduce a

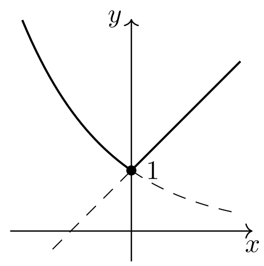
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2^x} = 0 \quad \text{(confronto standard potenza/esponenziale).}$$

C. Funzioni continue

► In questi esercizi sulla continuità troviamo prima la risposta graficamente e poi verifichiamo i risultati con la definizione analitica.

1. Il grafico di f è rappresentato a fianco.

Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Possiamo confermare questo osservando che nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione f è continua in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto 2^{-x}$. Nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è continua in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto 1 + x$.[5] Nel punto $x = 0$ dobbiamo studiare la continuità attraverso la definizione. Possiamo dire (vedi nota) che f certamente è continua da destra (coincide con $x \mapsto 1 + x$ in $[0, +\infty)$) e lo è da sinistra poiché

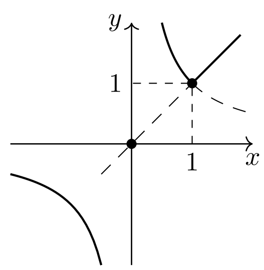


$$f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2^{-x} = 1.$$

La prova della continuità è ora completa.

2. Il grafico di f è rappresentato a fianco.

Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutti i punti tranne l'origine. Possiamo confermare questo osservando che in tutti i punti diversi da 0 e 1 la funzione f è continua in quanto coincide con funzioni elementari. Nel punto $x = 0$ possiamo dire che f non è continua né da destra né da sinistra dato che



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

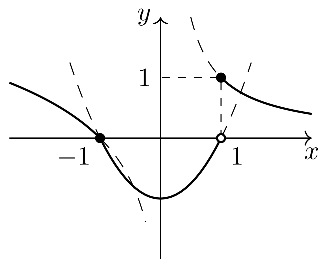
Nel punto $x = 1$ invece f è continua dato che è continua da destra (funzione elementare $x \mapsto x$) e continua da sinistra in quanto

$$f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

[4] È il limite a $+\infty$ di una funzione esponenziale con base *minore di* 1.

[5] Attenzione qui. Se scrivo che una funzione f è continua in $(0, +\infty)$ affermo che è continua in tutti i punti $x > 0$, quindi non dico che è continua in $x = 0$. Se invece scrivo che f è continua in $[0, +\infty)$ sto dicendo che essa è continua anche in $x = 0$, e questo significa continua sia da destra sia da sinistra. Con funzioni definite a tratti, come quelle di questi esercizi, occorre stare attenti. Nel caso che stiamo esaminando sarebbe un errore scrivere, a questo punto dello svolgimento, che f, essendo uguale alla funzione $x \mapsto 1 + x$ nell'intervallo $[0, +\infty)$, è continua in $[0, +\infty)$: infatti posso soltanto dire che è continua da destra, ma non da sinistra.

3. Il grafico di f è rappresentato a fianco.
Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutti i punti tranne che in $x = 1$. Possiamo confermare questo osservando che in tutti i punti diversi da -1 e 1 la funzione f è continua in quanto coincide con funzioni elementari.[6] Nel punto $x = -1$ possiamo dire che f è continua dato che

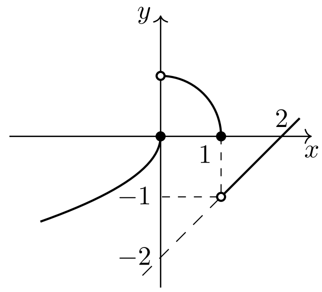


$$f(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (x^2 - 1) = 0.\ ^{7}$$

Nel punto $x = 1$ invece f non è continua dato che

$$f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2 - 1) = 0.\ ^{8}$$

4. Il grafico di f è rappresentato a fianco.
Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutti i punti tranne che in $x = 0$ e $x = 1$. Possiamo confermare questo osservando che in tutti i punti diversi da 0 e 1 la funzione f è continua in quanto coincide con funzioni elementari. Nel punto $x = 0$ possiamo dire che f non è continua dato che



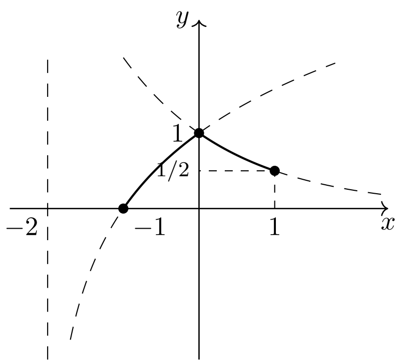
$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sqrt{1 - x^2} = 1.\ ^{9}$$

Nel punto $x = 1$ f non è continua dato che

$$f(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x - 2) = -1.\ ^{10}$$

D. Teoremi sulle funzioni continue

► In questi esercizi lavoriamo con i teoremi sulle funzioni continue in un intervallo. Facciamo tutte le considerazioni che servono operando graficamente.



1. Il grafico della funzione f è rappresentato qui a fianco.
Le ipotesi del teorema fondamentale sono la continuità di f in un intervallo chiuso e limitato. Che la f sia definita in un intervallo chiuso e limitato è evidente. Dobbiamo verificarne la continuità. Non ci sono problemi, nel senso che la funzione è certamente continua, in tutti i punti dell'intervallo diversi da 0, dato che f coincide con funzioni elementari. In $x = 0$ possiamo osservare che il valore di f è $f(0) = 1$. Inoltre la funzione è certamente continua da sinistra. Da destra risulta

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 2^{-x} = 1.$$

Quindi la continuità nell'intervallo $[-1, 1]$ è verificata.

La tesi del teorema dice che l'immagine di f, nel nostro caso $f([-1, 1])$, è un intervallo chiuso e limitato. Dal grafico vediamo che l'immagine di f è l'intervallo $[0, 1]$, che è chiuso e limitato. La tesi è quindi verificata.

► 2. Qui a fianco c'è un grafico della funzione f.

[6] A conferma di quanto detto nella nota precedente, se una funzione è definita a tratti (con funzioni elementari) non si può essere certi della sua continuità soltanto nei punti in cui cambia la definizione, cioè i punti nel cui intorno destro si ha una certa funzione elementare e nel cui intorno sinistro se ne ha un'altra.

[7] La funzione è certamente continua da sinistra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \ln(-x)$ nell'intervallo $(-\infty, -1]$ e quindi il valore assunto in -1 necessariamente coincide con il limite da sinistra.

[8] Qui possiamo specificare che la funzione è continua da destra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1, +\infty)$ e quindi il valore assunto in 1 necessariamente coincide con il limite da destra. La funzione non è però continua da sinistra, come evidenzia il confronto tra il valore $f(1)$ e il limite da sinistra.

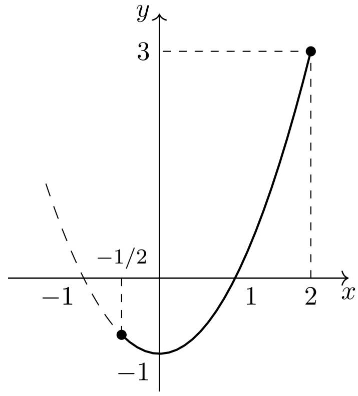
[9] Qui possiamo specificare che la funzione è continua da sinistra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto -\sqrt{-x}$ nell'intervallo $(+\infty, 0]$ e quindi il valore assunto in 0 necessariamente coincide con il limite da sinistra. La funzione non è però continua da destra.

[10] Anche in $x = 1$ la funzione è continua da sinistra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ nell'intervallo $(0, 1]$ e quindi il valore assunto in 1 coincide con il limite da sinistra. La funzione non è però continua da destra.

Ricordo che il Teorema degli zeri dice che se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato e assume valori di segno opposto agli estremi, allora la funzione si annulla in qualche punto. Le ipotesi che garantiscono la tesi sono quindi che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato, sia continua in tale intervallo e assuma valori di segno opposto agli estremi.
Nel nostro caso possiamo dire che: la funzione f è definita in $[-\frac{1}{2}, 2]$ ed è continua in tale intervallo in quanto è una funzione elementare. Inoltre si ha:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad f(2) = 3.$$

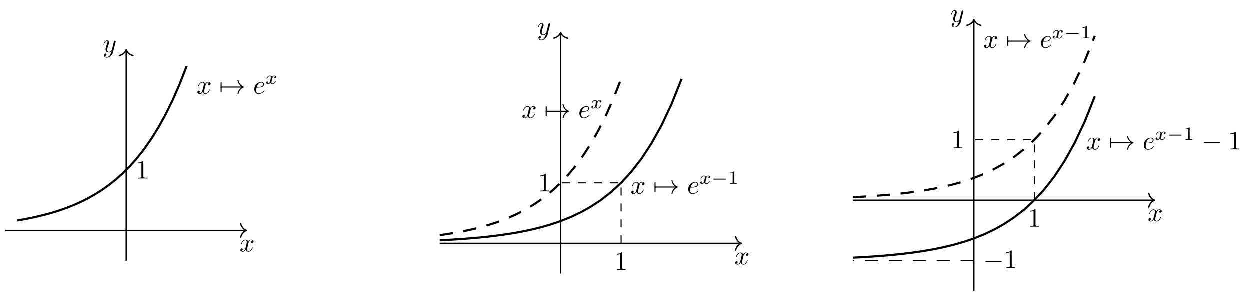
Dato che i valori agli estremi hanno segno opposto, possiamo dire che certamente vale la proprietà degli zeri, cioè che esiste almeno un punto c nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 2)$ tale che $f(c) = 0$. Qui finisce la prima parte dell'esercizio (verifica delle ipotesi).



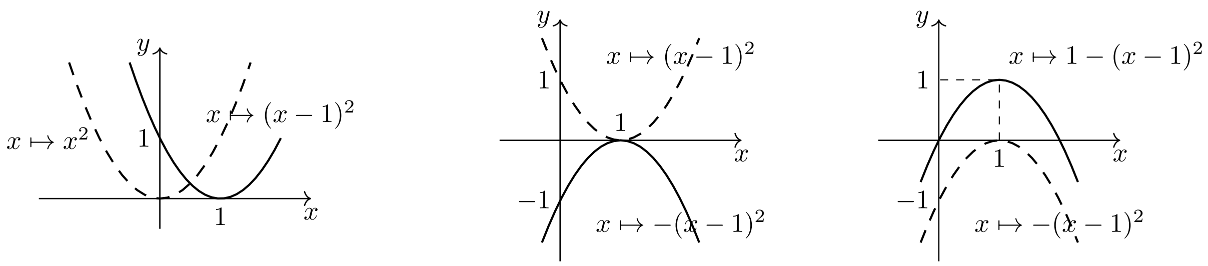
Nella seconda si chiede di verificare la tesi del teorema, cioè di trovare almeno un punto c con la proprietà richiesta. Per fare questo basta ovviamente risolvere l'equazione $x^2 - 1 = 0$. Le soluzioni sono -1 e 1 ma in questo caso soltanto la seconda è interessante dal nostro punto di vista, dato che la funzione è definita in $[-\frac{1}{2}, 2]$. Possiamo quindi concludere dicendo che la proprietà degli zeri è verificata in $c = 1$.

► 3. Si può intanto disegnare il grafico di f: possiamo ottenerlo attraverso le trasformazioni grafiche elementari.

Il grafico di $e^{x-1} - 1$ si ottiene dal grafico di e^x con una traslazione a destra e poi con una traslazione in basso di 1. I passaggi sono raffigurati qui sotto.

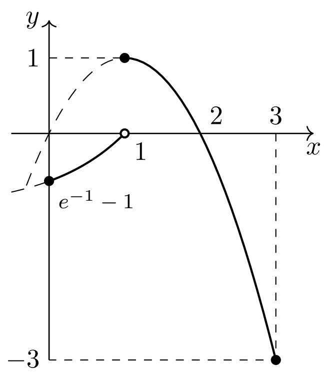


Il grafico di $1 - (x-1)^2$ si ottiene invece dal grafico di x^2 con una traslazione a destra, poi con una simmetria rispetto all'asse orizzontale e infine con una traslazione verso l'alto di 1. I passaggi sono raffigurati qui sotto.



Così possiamo ottenere il grafico della funzione f, che è rappresentato qui a fianco. L'enunciato del Teorema degli zeri è stato ricordato poco fa. La funzione f è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 3]$. Il grafico mostra che non è continua in tutti i punti dell'intervallo, dato che non è continua in $x = 1$. Infatti il valore $f(1) = 1$ attraverso la seconda espressione, mentre il limite da sinistra è 0. Quindi possiamo dire che il teorema non è applicabile.
In realtà possiamo osservare che c'è un'altra ipotesi del teorema che non si verifica, dato che i valori della funzione agli estremi dell'intervallo non sono di segno opposto. Infatti si ha:

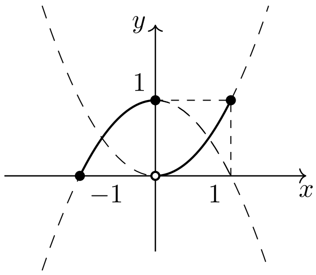
$$f(0) = e^{-1} - 1 = \tfrac{1}{e} - 1, \text{ che è negativo} \qquad \text{e} \qquad f(3) = -3.$$



Pur non essendo applicabile il teorema (cioè non essendo vere le ipotesi) la tesi è comunque vera, dato che esiste un punto nell'intervallo $[0, 3]$ in cui la funzione si annulla, ed è il punto $x = 2$.

► 4. Qui a fianco c'è un grafico della funzione f.

Ricordo che il Teorema di Weierstrass afferma che, se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, allora ci sono in tale intervallo due punti in cui la funzione assume rispettivamente i valori dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore della funzione stessa, cioè in altre parole un punto di massimo (globale) e un punto di minimo (globale). Le ipotesi del teorema sono quindi che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato e sia in questo continua.
Nel nostro caso possiamo dire che:



- la funzione f è definita in $[-1, 1]$;
- è continua in $[-1, 0)$ in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto 1 - x^2$;
- è continua in $(0, 1]$ in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto x^2$;
- non è continua in 0 in quanto
$$f(0) = 1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Pertanto non sono soddisfatte le ipotesi che garantiscono la validità della tesi del Teorema di Weierstrass.

Nella seconda parte si chiede di dire se comunque (cioè anche in mancanza delle ipotesi) la funzione soddisfa la tesi del teorema. Possiamo, senza troppe sottigliezze, dare la risposta leggendo il grafico. Dal grafico risulta evidente che l'estremo inferiore di f è 0 e l'estremo superiore di f è 1. Inoltre il valore 0 si ottiene con $x = -1$ e il valore 1 si ottiene con $x = 0$ oppure con $x = 1$. Pertanto (con le notazioni usate nella dispensa) il punto $c_m = -1$ è (unico) punto di minimo, con valore $f(c_m) = 0$ e i punti $c_{M_1} = 0$ e $c_{M_2} = 1$ sono i punti di massimo, con valore $f(c_{M_1}) = f(c_{M_2}) = 1$.

Questo è dunque un altro caso, come il precedente, in cui, pur non essendo soddisfatte le ipotesi, la tesi del teorema è comunque vera.[11]

E. Limiti con cambio di variabile

► 1. Il limite è nella f.i. $0 \cdot (+\infty)$. Usiamo il cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$ (da cui $x = \frac{1}{y}$). Si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 e^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^2} e^y = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$$

dal confronto standard tra esponenziale e potenza.

2. Il limite è nella f.i. $-\infty \cdot 0$. Possiamo ricondurlo ad un confronto standard tra potenza ed esponenziale scrivendo intanto

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}.$$

Ora usiamo il cambio di variabile $-x = y$ (da cui $x = -y$). Si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-y}{e^y} = 0$$

dal confronto tra potenza ed esponenziale.

3. Il limite è nella f.i. $0 \cdot (+\infty)$. Possiamo ricondurlo ad un confronto standard tra potenza e logaritmo scrivendo intanto

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}.$$

Ora usiamo il cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$ (da cui $x = \frac{1}{y}$). Si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln^2 \frac{1}{y}}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln^2 y}{y} = 0$$ [12]

[11] Si ricordi sempre questo fatto: se un teorema afferma che, in certe ipotesi, vale una certa proprietà, allora la validità della proprietà è assicurata quando sono vere le ipotesi. In generale nulla si può dire quando le ipotesi non sono vere: ci sono casi in cui la proprietà non vale e altri, come questo, in cui invece vale ugualmente.

dal confronto tra logaritmo e potenza.

4. Il limite è nella f.i. $+\infty \cdot 0$. Possiamo ricondurlo ad un confronto standard tra potenza ed esponenziale scrivendo intanto

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}.$$

Ora usiamo il cambio di variabile $\sqrt{x} = y$ (da cui $x = y^2$). Si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

dal confronto tra potenza ed esponenziale.

[12] Ricordo che $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$, e quindi $\ln^2 \frac{1}{y} = \ln^2 y$.