

Soluzioni delle Esercitazioni VI – 29/03-01/04/2010

A. Retta tangente

► Ricordo che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f (derivabile) nel punto di ascissa x_0 è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. Con la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ in $x_0 = 1$ abbiamo

$$f(x_0) = f(1) = \ln 2 \quad , \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(1) = 1.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = \ln 2 + x - 1.$$

2. Con la funzione $f(x) = 2^{-x}$ in $x_0 = 0$ abbiamo

$$f(x_0) = f(0) = 1 \quad , \quad f'(x) = -2^{-x} \cdot \ln 2 \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(0) = -\ln 2.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = 1 - x \ln 2.$$

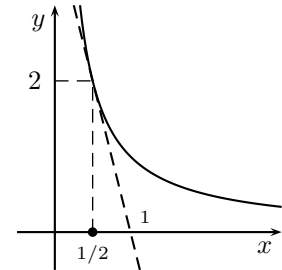
3. Con la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x_0 = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad , \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

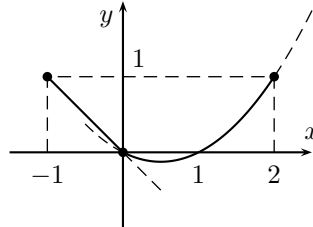
$$y = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Si può vedere che questa retta incontra l'asse x in $x = 1$, come illustra la figura.



B. Teoremi di Lagrange e Rolle

► 1. Il grafico della funzione è rappresentato qui sotto.



Il teorema di Rolle è applicabile se sono soddisfatte le ipotesi del teorema stesso, che sono: la continuità di f nell'intervallo $[-1, 2]$, la derivabilità di f nei punti interni a tale intervallo e infine l'uguaglianza tra i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo, cioè in questo caso l'uguaglianza tra $f(-1)$ e $f(2)$.

I valori agli estremi sono gli stessi, dato che

$$f(-1) = 1 \quad \text{e} \quad f(2) = 1.$$

Il grafico mostra che la funzione è continua nell'intervallo. In particolare è continua in 0, dove si ha

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x(x-1) = 0.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo dire che senz'altro la funzione è derivabile in $(-1, 0)$ e in $(0, 2)$, dato che coincide con funzioni elementari. Nel punto 0 il grafico potrebbe ingannare.¹ Calcoliamo le derivate destra e sinistra nell'origine.

¹Ricordo che i grafici che qui vedete sono stati ottenuti con un software che consente di disegnare il vero grafico di f . È chiaro che quando voi svolgete un esercizio non disponete di tali strumenti e quindi non siete in possesso fin dall'inizio di tutte le informazioni necessarie. In questo esercizio noi sappiamo che la retta (da sinistra) arriva nell'origine con pendenza -1 , ma non conosciamo (se non andiamo a calcolarla esplicitamente) con che pendenza la parabola arriva da destra. Potremmo credere di avere un punto di derivabilità o un punto angoloso sulla base di un grafico che non rende con sufficiente dettaglio questa informazione. Quindi la verifica della derivabilità va fatta attraverso la definizione.

Naturalmente si può calcolare il limite del rapporto incrementale, ma segnalo anche un modo alternativo, spesso conveniente. Quando la funzione è continua nel punto in cui vogliamo studiare la derivabilità, si può calcolare il limite della derivata, da destra e da sinistra.² Se questi esistono (e nei nostri casi esisteranno sempre) essi forniscono la derivata destra e la derivata sinistra.

Nel nostro caso possiamo quindi intanto scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ x - \frac{1}{2} & 0 < x < 2. \end{cases}^3$$

Ora possiamo calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1,$$

che è la derivata sinistra (quindi $f'_-(0) = -1$). Da destra si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2},$$

che è la derivata destra (quindi $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$). Le due derivate non sono uguali e quindi la funzione non è derivabile in 0.

Il teorema di Rolle pertanto non è applicabile. Questo significa che, sulla base delle proprietà di questa funzione, non possiamo essere certi di quanto afferma la tesi del teorema, del fatto cioè che ci sia un punto interno all'intervallo $[-1, 2]$ in cui la derivata di f si annulla (cioè un punto stazionario).

L'esercizio chiede comunque di verificare la tesi, di dire cioè se c'è un punto con questa proprietà.

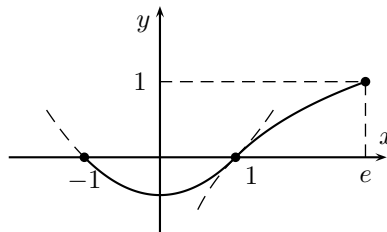
Possiamo allora osservare che questo eventuale punto non può stare nell'intervallo $(-1, 0)$, dove la derivata di f è -1 . Potrebbe stare in $(0, 2)$. La derivata di f in tale intervallo è $x - \frac{1}{2}$ e quindi per cercare il punto stazionario basta porre

$$x - \frac{1}{2} = 0,$$

da cui si ricava $x = \frac{1}{2}$. Dato che $\frac{1}{2}$ sta nell'intervallo $(0, 2)$, è accettabile quale punto stazionario.

A conclusione possiamo osservare che quindi questo è un esempio in cui, pur non essendo soddisfatte le ipotesi, la tesi è comunque vera.

► 2. Il grafico della funzione è rappresentato qui sotto.



Il teorema di Lagrange è applicabile se sono soddisfatte le ipotesi del teorema stesso, che sono: la continuità di f nell'intervallo $[-1, e]$ e la derivabilità di f nei punti interni a tale intervallo.

Il grafico mostra che chiaramente la funzione è continua nell'intervallo. In particolare possiamo verificare con la definizione che f è continua in 1, in quanto si ha

$$f(1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo dire che senz'altro la funzione è derivabile in $(-1, 1)$ e in $(1, e)$, dato che coincide con funzioni elementari. Dopo aver ricordato anche qui che il grafico potrebbe ingannare, nel punto 1 occorre verificare la derivabilità in base alla definizione.

Come fatto nell'esercizio precedente, dato che la funzione è continua in 1, possiamo calcolare i limiti della derivata. La derivata di f è

$$f'(x) = \begin{cases} x & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x < e. \end{cases}$$

²Ovviamente la funzione deve essere derivabile nei punti "vicini" a quello che stiamo studiando.

³Si osservi che scrivo " $<$ " anche dove prima c'era " \leq ". Questo perché agli estremi non mi serve la derivabilità (ipotesi del Teorema di Rolle) e perché in 0 non posso ancora affermare che la funzione sia derivabile.

Calcoliamo le derivate destra e sinistra facendo i limiti di f' . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f'_-(1)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f'_+(1).$$

Essendo uguali i due limiti, la funzione è quindi derivabile anche in 1 e le ipotesi del teorema sono tutte soddisfatte. Il Teorema di Lagrange è dunque applicabile. Significa che, sulla base delle proprietà di questa funzione, possiamo essere certi che c'è un punto interno all'intervallo $[-1, e]$ in cui la derivata di f vale quanto la pendenza media di f nell'intervallo $[-1, e]$, che è data dal quoziente

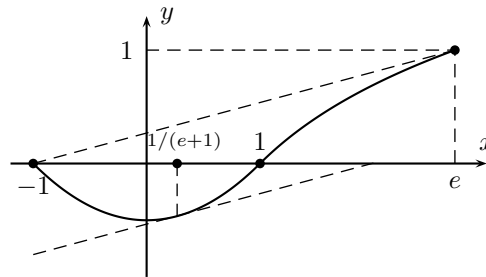
$$\frac{f(e) - f(-1)}{e + 1} = \frac{1 - 0}{e + 1} = \frac{1}{e + 1}.$$

L'esercizio chiede anche di verificare la tesi, e quindi di trovare in quale (quali) punti la tesi del teorema è soddisfatta.

Abbiamo già scritto la derivata e per trovare i punti in questione dobbiamo cercare i punti in cui questa è uguale a $\frac{1}{e+1}$. Dobbiamo considerare entrambi i casi, dobbiamo cioè risolvere le due equazioni

$$x = \frac{1}{e + 1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{e + 1}.$$

Dalla prima si ha appunto $x = \frac{1}{e+1}$, che è accettabile, dato che $\frac{1}{e+1} \in (-1, 1)$. Dalla seconda si ha $x = e + 1$, che non è accettabile, dato che $e + 1 \notin (1, e)$. La conclusione è quindi che c'è un solo punto ($c = \frac{1}{e+1}$) in cui la tesi del teorema è soddisfatta. La figura che segue illustra la situazione.



C. Calcolo di limiti con il teorema di De l'Hôpital

► 1. Dato che il limite è nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty.$$

Ovviamente il limite poteva essere calcolato anche con il cambio di variabile $x^2 = y$, che riconduce il limite ad un confronto standard.

2. La forma è quella prevista ($\frac{\infty}{\infty}$) e quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{3x^3}.$$

Questo limite è ancora nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ e possiamo riapplicare il teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{3x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{9x^3} = 0.$$

Il limite poteva anche essere calcolato osservando che si tratta di un confronto standard (logaritmo elevato alla $p = 2$ e potenza di esponente 3).

3. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad (\text{f.i. del tipo } 0 \cdot \infty)$$

non si può applicare direttamente il teorema di De l'Hôpital, in quanto la forma non è quella prevista. Possiamo però ricondurci ad una delle due forme previste dal teorema ($\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$) portando a denominatore la potenza:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

È opportuno notare che, per ottenere un quoziente, si poteva anche portare a denominatore il logaritmo e si sarebbe ottenuto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x^2 \ln^2 x).$$

Ora però ci si accorge che non conviene proseguire su questa strada, dato che la funzione si è sicuramente complicata.

4. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ e possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}.$$

È ancora una forma $\frac{0}{0}$ e possiamo riapplicare De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Faccio notare che questo limite, a differenza dei precedenti, non avremmo saputo risolverlo con i metodi finora in nostro possesso.

5. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ e possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x}.$$

Questo è ancora una forma $\frac{0}{0}$ e possiamo riapplicare De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Anche questo limite non avremmo saputo risolverlo con i metodi visti finora.

6. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ e possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{-x^2}.$$

Trattandosi ancora di una forma $\frac{0}{0}$, sarebbe forte la tentazione di applicare nuovamente il teorema, ma è altrettanto immediata la considerazione che il quoziente si sta complicando (il numeratore è rimasto lo stesso ma il denominatore è salito di grado). Quindi non conviene continuare su questa strada. Il limite si può calcolare invece riscrivendo il quoziente portando a denominatore l'esponenziale e a numeratore la potenza. Scriviamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-1/x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{1/x}) = 0.$$

Faccio quindi ancora notare che forme equivalenti da un punto di vista algebrico possono non essere ugualmente indicate per l'applicazione del teorema di De l'Hôpital. A priori può essere difficile intuire quale sia la forma più opportuna. La cosa migliore è provare in un modo e poi eventualmente provare nell'altro.

D. Studio di funzione

► Gli svolgimenti degli studi di funzione si trovano nell'Appendice A, alla fine della dispensa Derivate.

E. Integrali indefiniti

► 1. Si ha

$$\int (2x^3 - 3x + 1) dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + c.$$

2. Si ha

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{1/2} + x^{1/3}) dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c.$$

3. Si ha

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \ln|x| + 2\sqrt{x} + c.$$

4. Si ha

$$\int \sqrt{x-3} dx = \int (x-3)^{1/2} dx = \frac{(x-3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + c.$$

5. Si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx = \int (x+2)^{-1/2} dx = \frac{(x+2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x+2} + c.$$

6. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma

$$\int f^\alpha(x) Df(x) dx, \text{ che ricordo si integra in } \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c,$$

dove nel nostro caso $f(x) = 3x + 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Come si vede, per avere la forma richiesta, manca dentro l'integrale la derivata di f , che è 3. Allora possiamo moltiplicare e dividere per 3 e otteniamo

$$\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int 3(3x+2)^{1/2} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+2)^3} + c.$$

7. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma

$$\int e^{f(x)} Df(x) dx, \text{ che ricordo si integra in } e^{f(x)} + c,$$

dove nel nostro caso $f(x) = 4x - 3$. Per avere la forma richiesta, manca dentro l'integrale la derivata di f , che è 4. Allora moltiplichiamo e dividiamo per 4 e otteniamo

$$\int e^{4x-3} dx = \frac{1}{4} \int 4e^{4x-3} dx = \frac{1}{4} e^{4x-3} + c.$$

8. Questo integrale è del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x) dx$ e non richiede nessun "aggiustamento delle costanti", dato che $f(x) = x - 1$ e la derivata di f è 1. Quindi abbiamo direttamente

$$\int \sqrt[4]{(x-1)^3} dx = \int (x-1)^{3/4} dx = \frac{(x-1)^{7/4}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7} \sqrt[4]{(x-1)^7} + c.$$

9. Questo integrale è della forma

$$\int \frac{Df(x)}{f(x)} dx, \text{ che ricordo si integra in } \ln|f(x)| + c,$$

dove nel nostro caso $f(x) = 1 + e^x$. Si ha allora

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln|1+e^x| + c = \ln(1+e^x) + c.$$

Il valore assoluto si può togliere in quanto l'argomento del logaritmo è sempre positivo.

10. Ancora integrale del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)} dx$, con $f(x) = x + e^x$ (il numeratore è la derivata del denominatore). Non occorre aggiustare nessuna costante. Si ha

$$\int \frac{e^x + 1}{x + e^x} dx = \ln|x + e^x| + c.$$

11. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int f^\alpha(x) Df(x) dx$ e occorre aggiustare una costante.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-5x}} dx = -\frac{1}{5} \int (-5)(3-5x)^{-1/2} dx = -\frac{1}{5} \frac{(3-5x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{5} \sqrt{3-5x} + c.$$

12. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int e^{f(x)} Df(x) dx$ e occorre aggiustare una costante.

$$\int x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x) e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c.$$

13. Questo integrale si può risolvere togliendo e aggiungendo 2 a numeratore:

$$\int \frac{x}{x-2} dx = \int \frac{x-2+2}{x-2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx = x + 2 \ln|x-2| + c.$$

14. Questo si può risolvere in modo simile al precedente:

$$\int \frac{x}{4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+5-5}{4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{5}{4x+5}\right) dx = \frac{x}{4} - \frac{5}{4} \int \frac{1}{4x+5} dx.$$

Dato che ora

$$\int \frac{1}{4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4}{4x+5} dx = \frac{1}{4} \ln|4x+5| + c$$

allora

$$\int \frac{x}{4x+5} dx = \frac{x}{4} - \frac{5}{16} \ln|4x+5| + c.$$

15. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int f^\alpha(x) Df(x) dx$, dove in questo caso $f(x) = 5+x^2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Per avere la forma richiesta, dentro l'integrale dobbiamo avere la derivata di f , che è $2x$: la x c'è, manca il 2. Quindi moltiplichiamo e dividiamo per 2. Si ha

$$\int x \sqrt{5+x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x(5+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \frac{(5+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(5+x^2)^3} + c.$$

16. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int e^{f(x)} Df(x) dx$, dove nel nostro caso $f(x) = \sqrt{x}$. Per avere la forma richiesta, dobbiamo avere dentro l'integrale anche la derivata di f , che è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. C'è la radice, ma manca un 2 (a denominatore). Quindi moltiplichiamo e dividiamo per 2. Si ha

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

17. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int \frac{Df(x)}{f(x)} dx$, però occorre aggiustare una costante.

$$\int \frac{e^x}{1-3e^x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-3e^x}{1-3e^x} dx = -\frac{1}{3} \ln|1-3e^x| + c.$$

18. Integrale del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x) dx$ con $f(x) = 1 + 2 \ln x$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Dato che la derivata di f è $\frac{2}{x}$, manca un 2 a numeratore. Si ha allora

$$\int \frac{\sqrt{1+2 \ln x}}{x} dx = \frac{1}{2} \int (1+2 \ln x)^{1/2} \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+2 \ln x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(1+2 \ln x)^3} + c.$$

19. Integrale del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x) dx$,⁴ con $f(x) = 1 + x^3$ e $\alpha = -2$. Dato che la derivata di f è $3x^2$, manca un 3 a numeratore. Si ha allora

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(1+x^3)^{-2} dx = \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3} \frac{1}{1+x^3} + c.$$

⁴Attenzione, non del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)} dx$! Infatti, se così fosse, a numeratore dovremmo avere la derivata di $(1+x^3)^2$ e non è così.

20. Integrale del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)} dx$, con $f(x) = x^2 + e^{-x}$. Si ha

$$\int \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}} dx = \ln|x^2 + e^{-x}| + c = \ln(x^2 + e^{-x}) + c.$$

Il valore assoluto si può togliere poiché l'argomento è sicuramente positivo.