

**Soluzioni delle Esercitazioni VI – 28/10–01/11/2024**

**A. Definizione di derivata**

► 1. Nella forma in  $x$  il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{x}.$$

Nella forma in  $h$  il limite è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + e^h - 1}{h}.$$

Le due forme coincidono in quanto  $x_0 = 0$ .

► 2. Nella forma in  $x$  il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x - 0}{x - 1}.$$

Nella forma in  $h$  il limite è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + h) - 0}{h}.$$

► 3. Dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione  $f(x) = \sqrt{x}$ , per  $x \rightarrow 1$ , e cioè il

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Un modo per calcolare il limite è scomporre il denominatore  $x - 1$  in  $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$ . Si ha allora

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Scrivendo invece il rapporto incrementale nella forma con  $h$  si avrebbe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h},$$

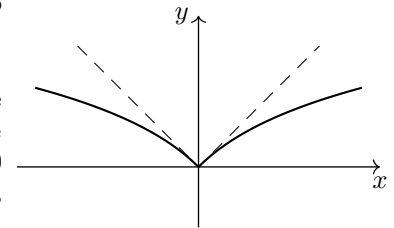
che si può calcolare razionalizzando il numeratore, cioè moltiplicando sopra e sotto per  $\sqrt{1 + h} + 1$ .

► Qui servono i grafici elementari e la definizione di derivata.

4. Il grafico della funzione  $f(x) = \ln(1 + |x|)$  è riportato a fianco. È stato ottenuto con le consuete trasformazioni elementari con la sequenza

$$\ln x \rightarrow \ln(1 + x) \rightarrow \ln(1 + |x|).$$

Il grafico porta a vedere che in  $x = 0$  c'è un punto in cui la funzione non è derivabile (pur essendo continua). Possiamo dire che si tratta di un punto angoloso, in base a questa considerazione. La funzione  $\ln(1 + x)$  è certamente derivabile in  $x = 0$  (la pendenza della retta tangente è finita). Questa è anche la derivata destra della funzione  $\ln(1 + |x|)$ . La derivata sinistra è l'opposto, data la simmetria.

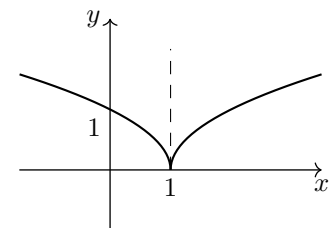


La conclusione è quindi che questa funzione ha in 0 un punto angoloso (punto di non derivabilità con derivata destra e sinistra finite). Anche sul grafico si può vedere che le pendenze, destra e sinistra, sono finite.

5. Il grafico della funzione  $f(x) = \sqrt{|x - 1|}$  è riportato a fianco. È stato ottenuto con la sequenza di trasformazioni elementari

$$\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{|x|} \rightarrow \sqrt{|x - 1|}.$$

Il grafico mostra che in  $x = 1$  c'è un punto in cui la funzione non è derivabile (pur essendo continua). Qui possiamo dire che invece c'è un punto di cuspidè. Questo deriva dal fatto che la funzione iniziale,  $\sqrt{x}$ , ha in 0, da destra, una tangente verticale.

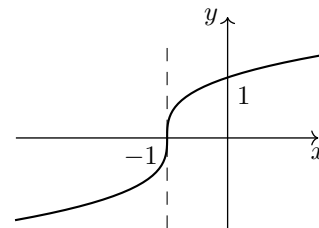


6. Il grafico della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  è riportato a fianco. È stato ottenuto con la trasformazione elementare

$$\sqrt[3]{x} \rightarrow \sqrt[3]{x+1}.$$

Il grafico mostra che in  $x = -1$  c'è un punto in cui la retta tangente esiste, ma ha pendenza infinita. La funzione non è quindi derivabile (pur essendo continua).

Qui abbiamo un punto a tangente verticale. Si noti che, pur essendo derivata destra e derivata sinistra uguali (si provi a calcolarle), la funzione non è comunque derivabile in  $-1$ , dato che queste derivate non sono finite.



## B. Regole di derivazione

► Qui per il calcolo delle derivate usiamo le regole di derivazione.

1. Con la funzione  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  si ha (derivata di una somma)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$$

2. Con la funzione  $f(x) = x^2 e^x$  si ha (derivata di un prodotto)

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x).$$

3. Con la funzione  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$  si ha (derivata di un prodotto)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2).$$

4. Con la funzione  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  si ha (derivata di un quoziente)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

5. Con la funzione  $f(x) = \ln^3 x$  si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}.$$

6. Con la funzione  $f(x) = \ln(x^3)$  si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}.$$

7. Con la funzione  $f(x) = e^{1-x^2}$  si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}.$$

8. Con la funzione  $f(x) = \sqrt{\ln x}$  si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

9. Con la funzione  $f(x) = \ln \sqrt{x}$  si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

10. Con la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$  si ha (derivata di una funzione composta)<sup>1</sup>

$$f'(x) = D(1+e^x)^{-1} = -(1+e^x)^{-2} \cdot e^x = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

<sup>1</sup>Si può anche usare la derivata del quoziente.

11. Con la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$  si ha

$$f'(x) = D(1+x^3)^{1/3} = \frac{1}{3}(1+x^3)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

12. Con la funzione  $f(x) = e^{1/x}$  si ha

$$f'(x) = e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right).$$

13. Con la funzione  $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$  si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

14. Con la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+\ln x}$  si ha

$$f'(x) = D(1+\ln x)^{-1} = -(1+\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+\ln x)^2}.$$

15. Con la funzione  $f(x) = x^2 e^{-1/x}$  si ha

$$f'(x) = 2x e^{-1/x} + x^2 e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} (2x+1).$$

16. Con la funzione  $f(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$  si ha

$$f'(x) = D(1+e^{-x})^{-2} = -2(1+e^{-x})^{-3} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^3}.$$

### C. Retta tangente

► Ricordo che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione  $f$  (derivabile) nel punto di ascissa  $x_0$  è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. Con la funzione  $f(x) = e^{-x}$  in  $x_0 = 0$  abbiamo

$$f(x_0) = f(0) = 1 \quad , \quad f'(x) = -e^{-x} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(0) = -1.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = 1 - x.$$

2. Con la funzione  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  in  $x_0 = 1$  abbiamo

$$f(x_0) = f(1) = \ln 2 \quad , \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(1) = 1.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = \ln 2 + x - 1.$$

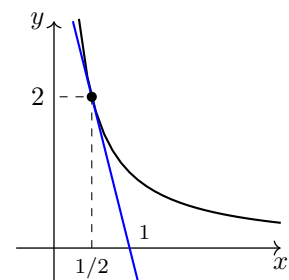
3. Con la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $x_0 = \frac{1}{2}$  abbiamo

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad , \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Si può vedere che questa retta incontra l'asse  $x$  in  $x = 1$ , come illustra la figura.



**D. Derivabilità di funzioni definite a tratti**

► 1. La funzione è definita nell'intervallo  $(-2, +\infty)$ . È certamente continua e derivabile in tutti i punti diversi da 0, dato che in  $(-2, 0)$  e in  $(0, +\infty)$  è una composizione di funzioni elementari. Resta da studiare la funzione in 0.

Anzitutto verifichiamo la continuità.<sup>2</sup>

Si ha  $f(0) = \ln 2$  (con la prima espressione) e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 2 - x^2) = \ln 2. \quad ^3$$

Pertanto la funzione è continua in 0. Passiamo alla derivabilità.

Qui ci sono due modi di procedere: il primo è studiare i limiti dei rapporti incrementali da destra e da sinistra. Il secondo, più comodo, è il seguente: Calcolando le derivate con le regole di derivazione possiamo scrivere che

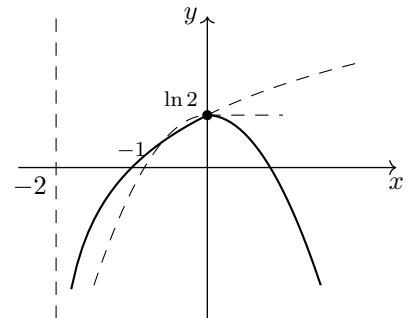
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & -2 < x < 0 \\ -2x & x > 0. \end{cases}$$

Si noti che non ho scritto  $-2 < x \leq 0$  (come era inizialmente nella definizione di  $f$ ) ma  $-2 < x < 0$ , escludendo quindi lo zero. Questo perché possiamo affermare che la derivata è quella scritta solo per i punti diversi da zero (in 0 stiamo appunto studiando la derivabilità). Ora dall'espressione della derivata possiamo calcolarci le derivate destra e sinistra in zero, facendo il limite. Abbiamo quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x = 0.$$

Essendo le derivate destra e sinistra diverse la funzione non è derivabile nell'origine.

Un grafico, peraltro non richiesto, della funzione è rappresentato a fianco.



2. La funzione è definita in tutto  $\mathbb{R}$ . È certamente continua e derivabile in tutti i punti diversi da 0, dato che in  $(-\infty, 0)$  e in  $(0, +\infty)$  è una composizione di funzioni elementari. Resta da studiare la funzione in 0.

Anzitutto verifichiamo la continuità.

Si ha  $f(0) = 1$  (con la seconda espressione) e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1)^2 = 1. \quad ^4$$

Pertanto la funzione è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Calcoliamo le derivate con le regole di derivazione e possiamo scrivere che

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x - 1) & x < 0 \\ -2e^{-2x} & x > 0. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Questa volta possiamo affermare che la funzione è certamente continua da destra in quanto nell'intervallo  $[0, +\infty)$  è una funzione elementare. Quindi calcoliamo soltanto il limite da sinistra.

Anche qui si noti che ho sostituito la scrittura  $x \geq 0$  che c'era inizialmente con  $x > 0$ . Calcoliamo le derivate destra e sinistra in zero, facendo il limite. Otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2(x - 1) = -2 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2e^{-2x} = -2.$$

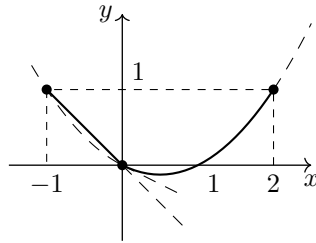
Questa volta le derivate destra e sinistra sono uguali e pertanto la funzione è derivabile in tutti i punti.

**E. Teoremi di Lagrange e Rolle**

► 1. Il grafico della funzione è rappresentato qui sotto.

<sup>2</sup>Ricordo che la continuità è condizione necessaria per la derivabilità e quindi nei casi in cui la funzione non risulta continua nel punto considerato possiamo concludere che essa non è nemmeno derivabile.

<sup>3</sup>Possiamo affermare che la funzione è certamente continua da sinistra in quanto nell'intervallo  $(-2, 0]$  è una funzione elementare. Quindi possiamo calcolare soltanto il limite da destra. Si noti che non possiamo essere certi della continuità da destra in quanto a destra la funzione coincide con una funzione elementare diversa dall'altra.



Il teorema di Rolle è applicabile se sono soddisfatte le ipotesi del teorema stesso, che sono: la continuità di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 2]$ , la derivabilità di  $f$  nei punti interni a tale intervallo e infine l'uguaglianza tra i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo, cioè in questo caso l'uguaglianza tra  $f(-1)$  e  $f(2)$ .

I valori agli estremi sono gli stessi, dato che

$$f(-1) = 1 \quad \text{e} \quad f(2) = 1.$$

Il grafico mostra che la funzione è continua nell'intervallo. In particolare è continua in 0, dove si ha

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x(x-1) = 0.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo dire che senz'altro la funzione è derivabile in  $(-1, 0)$  e in  $(0, 2)$ , dato che coincide con funzioni elementari. Nel punto 0 il grafico potrebbe ingannare.<sup>5</sup> Calcoliamo le derivate destra e sinistra nell'origine.

Naturalmente si può calcolare il limite del rapporto incrementale, ma segnalo anche un modo alternativo, spesso conveniente. Quando la funzione è continua nel punto in cui vogliamo studiare la derivabilità, si può calcolare il limite della derivata, da destra e da sinistra.<sup>6</sup> Se questi esistono (e nei nostri casi esisteranno sempre) essi forniscono la derivata destra e la derivata sinistra.

Nel nostro caso possiamo quindi intanto scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ x - \frac{1}{2} & 0 < x < 2. \end{cases}^7$$

Ora possiamo calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1,$$

che è la derivata sinistra (quindi  $f'_-(0) = -1$ ). Da destra si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

che è la derivata destra (quindi  $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$ ). Le due derivate non sono uguali e quindi la funzione non è derivabile in 0.

Il teorema di Rolle pertanto non è applicabile. Questo significa che, sulla base delle proprietà di questa funzione, non possiamo essere certi di quanto afferma la tesi del teorema, del fatto cioè che ci sia un punto interno all'intervallo  $[-1, 2]$  in cui la derivata di  $f$  si annulla (cioè un punto stazionario).

L'esercizio chiede comunque di verificare la tesi, di dire cioè se c'è un punto con questa proprietà.

Possiamo allora osservare che questo eventuale punto non può stare nell'intervallo  $(-1, 0)$ , dove la derivata di  $f$  è  $-1$ . Potrebbe stare in  $(0, 2)$ . La derivata di  $f$  in tale intervallo è  $x - \frac{1}{2}$  e quindi per cercare il punto stazionario basta porre

$$x - \frac{1}{2} = 0,$$

<sup>5</sup>Ricordo che i grafici che qui vedete sono stati ottenuti con un software che consente di disegnare il vero grafico di  $f$ . È chiaro che quando voi svolgete un esercizio non disponete di tali strumenti e quindi non siete in possesso fin dall'inizio di tutte le informazioni necessarie. In questo esercizio noi sappiamo che la retta (da sinistra) arriva nell'origine con pendenza  $-1$ , ma non conosciamo (se non andiamo a calcolarla esplicitamente) con che pendenza la parabola arriva da destra. Potremmo credere di avere un punto di derivabilità o un punto angoloso sulla base di un grafico che non rende con sufficiente dettaglio questa informazione. Quindi la verifica della derivabilità va fatta attraverso la definizione.

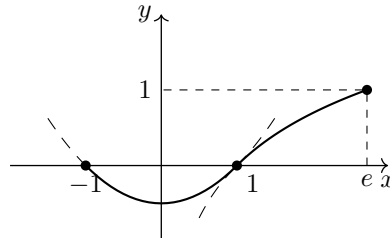
<sup>6</sup>Ovviamente la funzione deve essere derivabile nei punti "vicini" a quello che stiamo studiando.

<sup>7</sup>Si osservi che scrivo " $<$ " anche dove prima c'era " $\leq$ ". Questo perché agli estremi non mi serve la derivabilità (ipotesi del Teorema di Rolle) e perché in 0 non posso ancora affermare che la funzione sia derivabile.

da cui si ricava  $x = \frac{1}{2}$ . Dato che  $\frac{1}{2}$  sta nell'intervallo  $(0, 2)$ , è accettabile quale punto stazionario.

A conclusione possiamo osservare che quindi questo è un esempio in cui, pur non essendo soddisfatte le ipotesi, la tesi è comunque vera.

► 2. Il grafico della funzione è rappresentato qui sotto.



Il teorema di Lagrange è applicabile se sono soddisfatte le ipotesi del teorema stesso, che sono: la continuità di  $f$  nell'intervallo  $[-1, e]$  e la derivabilità di  $f$  nei punti interni a tale intervallo.

Il grafico mostra che chiaramente la funzione è continua nell'intervallo. In particolare possiamo verificare con la definizione che  $f$  è continua in 1, in quanto si ha

$$f(1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo dire che senz'altro la funzione è derivabile in  $(-1, 1)$  e in  $(1, e)$ , dato che coincide con funzioni elementari. Dopo aver ricordato anche qui che il grafico potrebbe ingannare, nel punto 1 occorre verificare la derivabilità in base alla definizione.

Come fatto nell'esercizio precedente, dato che la funzione è continua in 1, possiamo calcolare i limiti della derivata. La derivata di  $f$  è

$$f'(x) = \begin{cases} x & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x < e. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate destra e sinistra facendo i limiti di  $f'$ . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f'_-(1)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f'_+(1).$$

Essendo uguali i due limiti, la funzione è quindi derivabile anche in 1 e le ipotesi del teorema sono tutte soddisfatte. Il Teorema di Lagrange è dunque applicabile. Significa che, sulla base delle proprietà di questa funzione, possiamo essere certi che c'è un punto interno all'intervallo  $[-1, e]$  in cui la derivata di  $f$  vale quanto la pendenza media di  $f$  nell'intervallo  $[-1, e]$ , che è data dal quoziente

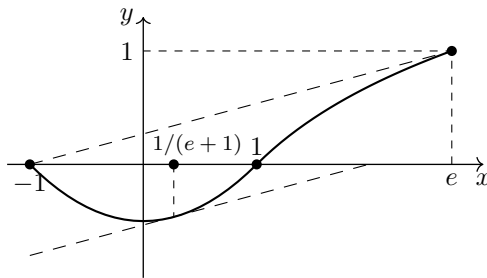
$$\frac{f(e) - f(-1)}{e + 1} = \frac{1 - 0}{e + 1} = \frac{1}{e + 1}.$$

L'esercizio chiede anche di verificare la tesi, e quindi di trovare in quale (quali) punti la tesi del teorema è soddisfatta.

Abbiamo già scritto la derivata e per trovare i punti in questione dobbiamo cercare i punti in cui questa è uguale a  $\frac{1}{e+1}$ . Dobbiamo considerare entrambi i casi, dobbiamo cioè risolvere le due equazioni

$$x = \frac{1}{e + 1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{e + 1}.$$

Dalla prima si ha appunto  $x = \frac{1}{e+1}$ , che è accettabile, dato che  $\frac{1}{e+1} \in (-1, 1)$ . Dalla seconda si ha  $x = e + 1$ , che non è accettabile, dato che  $e + 1 \notin (1, e)$ . La conclusione è quindi che c'è un solo punto ( $c = \frac{1}{e+1}$ ) in cui la tesi del teorema è soddisfatta. La figura che segue illustra la situazione.



**F. Calcolo di limiti con il teorema di De l'Hôpital**

► 1. Dato che il limite è nella forma  $\frac{\infty}{\infty}$ , possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty.$$

Ovviamente il limite poteva essere calcolato anche con il cambio di variabile  $x^2 = y$ , che riconduce il limite ad un confronto standard.

2. La forma è quella prevista ( $\frac{\infty}{\infty}$ ) e quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{3x^3}.$$

Questo limite è ancora nella forma  $\frac{\infty}{\infty}$  e possiamo riapplicare il teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{3x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{9x^3} = 0.$$

Il limite poteva anche essere calcolato osservando che si tratta di un confronto standard (logaritmo elevato alla  $p = 2$  e potenza di esponente 3). Da notare anche che dopo la prima applicazione del teorema di De l'Hôpital si poteva concludere che il limite è zero dato che il numeratore tende a zero (confronto standard) e il denominatore tende all'infinito.

3. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad (\text{f.i. del tipo } 0 \cdot \infty)$$

non si può applicare direttamente il teorema di De l'Hôpital, in quanto la forma non è quella prevista. Possiamo però ricondurci ad una delle due forme previste dal teorema ( $\frac{\infty}{\infty}$  oppure  $\frac{0}{0}$ ) portando a denominatore la potenza:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

È opportuno notare che, per ottenere un quoziente, si poteva anche portare a denominatore il logaritmo e si sarebbe ottenuto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x^2 \ln^2 x).$$

Ora però ci si accorge che non conviene proseguire su questa strada, dato che la funzione si è sicuramente complicata.

4. Il limite si presenta nella forma  $\frac{0}{0}$  e possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}.$$

È ancora una forma  $\frac{0}{0}$  e possiamo riapplicare De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Faccio notare che questo limite, a differenza dei precedenti, non avremmo saputo risolverlo con i metodi finora in nostro possesso.

5. Il limite si presenta nella forma  $\frac{0}{0}$  e possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x}.$$

Questo è ancora una forma  $\frac{0}{0}$  e possiamo riapplicare De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Anche questo limite non avremmo saputo risolverlo con i metodi visti finora.

6. Il limite si presenta nella forma  $\frac{0}{0}$  e possiamo applicare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{-x^2}.$$

Trattandosi ancora di una forma  $\frac{0}{0}$ , sarebbe forte la tentazione di applicare nuovamente il teorema, ma è altrettanto immediata la considerazione che il quoziente si sta complicando (il numeratore è rimasto lo stesso ma il denominatore è salito di grado). Quindi non conviene continuare su questa strada. Il limite si può calcolare invece riscrivendo il quoziente portando a denominatore l'esponenziale e a numeratore la potenza. Scriviamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-1/x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{1/x}) = 0.$$

Faccio quindi ancora notare che forme equivalenti da un punto di vista algebrico possono non essere ugualmente indicate per l'applicazione del teorema di De l'Hôpital. A priori può essere difficile intuire quale sia la forma più opportuna. La cosa migliore è provare in un modo e poi eventualmente provare nell'altro.