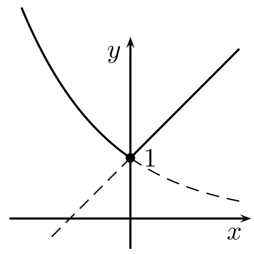
Soluzioni delle Esercitazioni VI – 31/10-04/11/2011

A. Funzioni continue

► In questi esercizi sulla continuità troviamo prima la risposta graficamente e poi verifichiamo i risultati con la definizione analitica.

1. Il grafico di f è rappresentato a fianco.

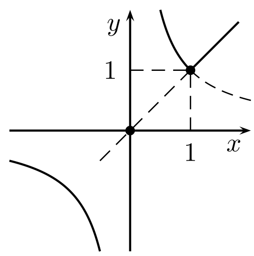


Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Possiamo confermare questo osservando che nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione f è continua in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto 2^{-x}$. Nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è continua in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto 1 + x$.[1] Nel punto $x = 0$ dobbiamo studiare la continuità attraverso la definizione. Possiamo dire (vedi nota) che f certamente è continua da destra (coincide con $x \mapsto 1 + x$ in $[0, +\infty)$) e lo è da sinistra poiché

$$f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2^{-x} = 1.$$

La prova della continuità è ora completa.

2. Il grafico di f è rappresentato a fianco.



Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutti i punti tranne l'origine. Possiamo confermare questo osservando che in tutti i punti diversi da 0 e 1 la funzione f è continua in quanto coincide con funzioni elementari. Nel punto $x = 0$ possiamo dire che f non è continua né da destra né da sinistra dato che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

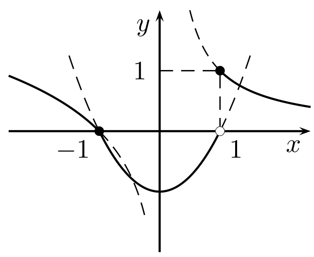
e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Nel punto $x = 1$ invece f è continua dato che è continua da destra (funzione elementare $x \mapsto x$) e continua da sinistra in quanto

$$f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

3. Il grafico di f è rappresentato a fianco.



Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutti i punti tranne che in $x = 1$. Possiamo confermare questo osservando che in tutti i punti diversi da -1 e 1 la funzione f è continua in quanto coincide con funzioni elementari.[2] Nel punto $x = -1$ possiamo dire che f è continua dato che

$$f(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} (x^2 - 1) = 0.$$ [3]

Nel punto $x = 1$ invece f non è continua dato che

$$f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0.$$ [4]

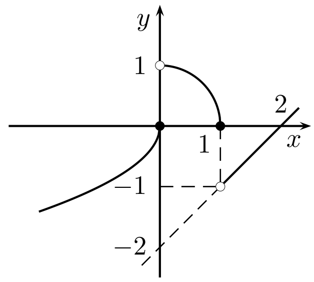
[1] Attenzione qui. Se scrivo che una funzione f è continua in $(0, +\infty)$ affermo che è continua in tutti i punti $x > 0$, quindi non dico che è continua in $x = 0$. Se invece scrivo che f è continua in $[0, +\infty)$ sto dicendo che essa è continua anche in $x = 0$, e questo significa continua sia da destra sia da sinistra. Con funzioni definite a tratti, come quelle di questi esercizi, occorre stare attenti. Nel caso che stiamo esaminando sarebbe un errore scrivere, a questo punto dello svolgimento, che f, essendo uguale alla funzione $x \mapsto 1 + x$ nell'intervallo $[0, +\infty)$, è continua in $[0, +\infty)$: infatti posso soltanto dire che è continua da destra, ma non da sinistra.

[2] A conferma di quanto detto nella nota precedente, se una funzione è definita a tratti (con funzioni elementari) non si può essere certi della sua continuità soltanto nei punti in cui cambia la definizione, cioè i punti nel cui intorno destro si ha una certa funzione elementare e nel cui intorno sinistro se ne ha un'altra.

[3] La funzione è certamente continua da sinistra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \ln(-x)$ nell'intervallo $(-\infty, -1]$ e quindi il valore assunto in -1 necessariamente coincide con il limite da sinistra.

[4] Qui possiamo specificare che la funzione è continua da destra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1, +\infty)$ e quindi il valore assunto in 1 necessariamente coincide con il limite da destra. La funzione non è però continua da sinistra, come evidenzia il confronto tra il valore $f(1)$ e il limite da sinistra.

4. Il grafico di f è rappresentato a fianco.
Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutti i punti tranne che in $x = 0$ e $x = 1$. Possiamo confermare questo osservando che in tutti i punti diversi da 0 e 1 la funzione f è continua in quanto coincide con funzioni elementari. Nel punto $x = 0$ possiamo dire che f non è continua dato che



$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-x^2} = 1.$$ [5]

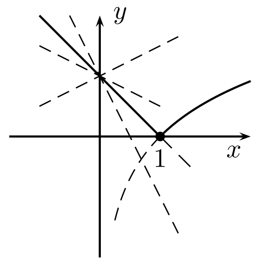
Nel punto $x = 1$ f non è continua dato che

$$f(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-2) = -1.$$ [6]

► 5. Possiamo dire anzitutto che la funzione f è certamente continua in ogni punto diverso da 1, per ogni valore di a: infatti coincide in un opportuno intorno di tali punti con una funzione elementare. La continuità nel punto $x = 1$ dipende invece dal parametro a.[7] Possiamo anche qui dire che certamente la funzione è continua da destra, qualunque sia il parametro a (tra l'altro, a destra, la funzione non dipende da a).

Per quanto riguarda la continuità da sinistra, abbiamo

$$f(1) = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+ax) = 1+a.$$

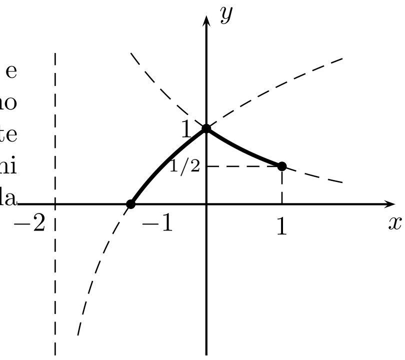


Per avere la continuità deve quindi essere $1 + a = 0$, e quindi $a = -1$.
La figura a fianco illustra geometricamente il problema. Delle infinite rette che passano per il punto $(0, 1)$ (tutte queste rette, ad eccezione di quella di equazione $x = 0$, sono il grafico della funzione $x \mapsto 1 + ax$, al variare di a) si tratta di trovare quella che rende continua la funzione. La figura mostra che la retta è quella che passa anche per il punto $(1, 0)$, e si vede facilmente che si tratta di quella con pendenza -1.

B. Teoremi sulle funzioni continue

► In questi esercizi lavoriamo con i teoremi sulle funzioni continue in un intervallo. Facciamo tutte le considerazioni che servono operando graficamente.

1. Il grafico della funzione f è rappresentato qui a fianco.
Le ipotesi del teorema fondamentale sono la continuità di f in un intervallo chiuso e limitato. Che la f sia definita in un intervallo chiuso e limitato è evidente. Dobbiamo verificarne la continuità. Non ci sono problemi, nel senso che la funzione è certamente continua, in tutti i punti dell'intervallo diversi da 0, dato che f coincide con funzioni elementari. In $x = 0$ possiamo osservare che il valore di f è $f(0) = 1$. Inoltre la funzione è certamente continua da sinistra. Da destra risulta



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2^{-x} = 1.$$

Quindi la continuità nell'intervallo $[-1, 1]$ è verificata.

La tesi del teorema dice che l'immagine di f, nel nostro caso $f([-1, 1])$ è un intervallo chiuso e limitato. Dal grafico vediamo che l'immagine di f è l'intervallo $[0, 1]$, che è chiuso e limitato. La tesi è quindi verificata.

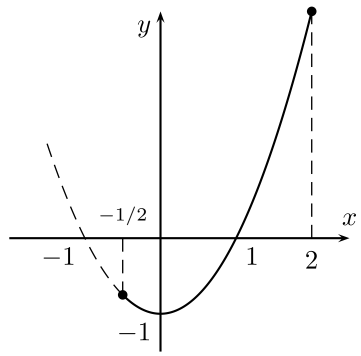
► 2. Qui a fianco c'è un grafico della funzione f.

[5] Qui possiamo specificare che la funzione è continua da sinistra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto -\sqrt{-x}$ nell'intervallo $(+\infty, 0]$ e quindi il valore assunto in 0 necessariamente coincide con il limite da sinistra. La funzione non è però continua da destra.

[6] Anche in $x = 1$ la funzione è continua da sinistra in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $(0, 1]$ e quindi il valore assunto in 1 coincide con il limite da sinistra. La funzione non è però continua da destra.

[7] Ribadisco ancora una volta che anche in un intorno di 1 la funzione coincide con funzioni elementari, ma non con la stessa funzione elementare. In altre parole a destra di 1 coincide con una funzione elementare e a sinistra con un'altra funzione elementare. Ovviamente questo non garantisce che la funzione sia continua in 1.

Ricordo che il Teorema degli zeri dice che se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato e assume valori di segno opposto agli estremi, allora la funzione si annulla in qualche punto. Le ipotesi che garantiscono la tesi sono quindi che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato, sia continua in tale intervallo e assuma valori di segno opposto agli estremi.
Nel nostro caso possiamo dire che: la funzione f è definita in $[-\frac{1}{2}, 2]$ ed è continua in tale intervallo in quanto è una funzione elementare. Inoltre si ha:

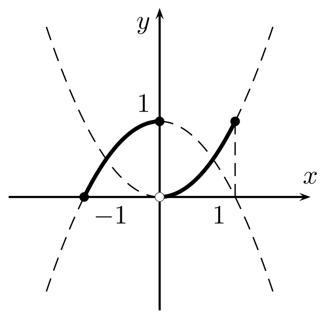


$$f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad f(2) = 3.$$

Dato che i valori agli estremi hanno segno opposto, possiamo dire che certamente vale la proprietà degli zeri, cioè che esiste almeno un punto c nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 2)$ tale che $f(c) = 0$. Qui finisce la prima parte dell'esercizio (verifica delle ipotesi).

Nella seconda si chiede di verificare la tesi del teorema, cioè di trovare almeno un punto c con la proprietà richiesta. Per fare questo basta ovviamente risolvere l'equazione $x^2 - 1 = 0$. Le soluzioni sono -1 e 1 ma in questo caso soltanto la seconda è interessante dal nostro punto di vista, dato che la funzione è definita in $[-\frac{1}{2}, 2]$. Possiamo quindi concludere dicendo che la proprietà degli zeri è verificata in $c = 1$.

► 3. Qui a fianco c'è un grafico della funzione f.



Ricordo che il Teorema di Weierstrass afferma che, se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, allora ci sono in tale intervallo due punti in cui la funzione assume rispettivamente i valori dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore della funzione stessa. Come visto, possiamo anche dire che ci sono almeno un punto di massimo ed almeno un punto di minimo nell'intervallo. Le ipotesi del teorema sono quindi che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato e sia in questo continua.
Nel nostro caso possiamo dire che:

- la funzione f è definita in $[-1, 1]$;
- è continua in $[-1, 0)$ in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto 1 - x^2$;
- è continua in $(0, 1]$ in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto x^2$;
- non è continua in 0 in quanto
$$f(0) = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Pertanto non sono soddisfatte le ipotesi che garantiscono la validità della tesi del Teorema di Weierstrass.

Nella seconda parte si chiede di dire se comunque (cioè anche in mancanza delle ipotesi) la funzione soddisfa la tesi del teorema. Possiamo, senza troppe sottigliezze, dare la risposta leggendo il grafico. Dal grafico risulta evidente che l'estremo inferiore di f è 0 e l'estremo superiore di f è 1. Inoltre il valore 0 si ottiene con $x = -1$ e il valore 1 si ottiene con $x = 0$ oppure con $x = 1$. Pertanto (con le notazioni usate nella dispensa) il punto $c_m = -1$ è (unico) punto di minimo, con valore $f(c_m) = 0$ e i punti $c_{M_1} = 0$ e $c_{M_2} = 1$ sono i punti di massimo, con valore $f(c_{M_1}) = f(c_{M_2}) = 1$.

Questo è dunque un caso in cui, pur non essendo soddisfatte le ipotesi, la tesi del teorema è comunque vera.[8]

C. Limiti con cambio di variabile e limiti notevoli

► 1. Il limite è nella f.i. $0 \cdot (+\infty)$. Usiamo il cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$ (da cui $x = \frac{1}{y}$). Si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^2} e^y = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$$

dal confronto standard tra esponenziale e potenza.

[8] Si ricordi sempre questo fatto: se un teorema afferma che, in certe ipotesi, vale una certa proprietà, allora la validità della proprietà è assicurata quando sono vere le ipotesi. In generale nulla si può dire quando le ipotesi non sono vere: ci sono casi in cui la proprietà non vale e altri, come questo, in cui invece vale ugualmente.

2. Il limite è nella f.i. $-\infty \cdot 0$. Possiamo ricondurlo ad un confronto standard tra potenza ed esponenziale scrivendo intanto

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}.$$

Ora usiamo il cambio di variabile $-x = y$ (da cui $x = -y$). Si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{e^y} = 0$$

dal confronto tra potenza ed esponenziale.

3. Il limite è nella f.i. $0 \cdot (+\infty)$. Possiamo ricondurlo ad un confronto standard tra potenza e logaritmo scrivendo intanto

$$\lim_{x\to0^+} x\ln^2 x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}.$$

Ora usiamo il cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$ (da cui $x = \frac{1}{y}$). Si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^2 \frac{1}{y}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^2 y}{y} = 0 \quad [9]$$

dal confronto tra logaritmo e potenza.

4. Il limite è nella f.i. $+\infty \cdot 0$. Possiamo ricondurlo ad un confronto standard tra potenza ed esponenziale scrivendo intanto

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}.$$

Ora usiamo il cambio di variabile $\sqrt{x} = y$ (da cui $x = y^2$). Si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

dal confronto tra potenza ed esponenziale.

5. Premetto una considerazione generale sui limiti notevoli. Abbiamo visto che dal limite fondamentale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

seguono alcuni limiti notevoli. In particolare, come si è visto, sono importanti

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_b(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln b} \quad , \quad \lim_{x\to0} \frac{b^x-1}{x} = \ln b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^b-1}{x} = b.$$

È semplice intuire che, più in generale, possiamo dire che, se $f(x)$ tende a zero per $x \to c$ (e c può essere qualunque cosa, finito o infinito), allora

$$\lim_{x\to c} \frac{\log_b\big(1+f(x)\big)}{f(x)} = \frac{1}{\ln b} \quad , \quad \lim_{x\to c} \frac{b^{f(x)}-1}{f(x)} = \ln b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} \frac{\big(1+f(x)\big)^b-1}{f(x)} = b$$

(basta usare il cambio di variabile $f(x) = y$ e questi si riconducono ai tre limiti notevoli).[10]

Veniamo ora all'esercizio proposto (f.i. $\frac{0}{0}$). È un limite che può essere ricondotto ad un limite notevole, e lo possiamo fare in due modi: o con un cambio di variabile oppure direttamente. Vediamo entrambe le possibilità.

Con un cambio di variabile, ponendo $x^3 = y$ (e quindi $x = y^{1/3}$), si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^3)}{x} = \lim_{y\to0} \frac{\ln(1+y)}{y^{1/3}}.$$

[9] Ricordo che $\ln\frac{1}{y} = -\ln y$, e quindi $\ln^2\frac{1}{y} = \ln^2 y$.

[10] Quindi, se ci troviamo in presenza di uno di questi casi, possiamo scrivere direttamente il risultato, anche senza scrivere formalmente il cambio di variabile. Ad esempio, con i limiti

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to1} \frac{(1+\ln x)^{1/3}-1}{\ln x}$$

possiamo dire direttamente che i risultati sono rispettivamente 1, 1 e $\frac{1}{3}$.

Ora possiamo ricondurre il limite al limite notevole moltiplicando e dividendo per y:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y^{1/3}} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{y}{y^{1/3}}\right).$$

Il primo quoziente tende a 1 poiché è il limite notevole logaritmico, il secondo si semplifica in $y^{2/3}$ e quindi tende a 0. Il risultato è 0.

Senza usare il cambio di variabile possiamo semplicemente scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot x^2\right)$$

e concludere che il limite è 0 dato che il quoziente è sostanzialmente il limite notevole e x^2 tende a 0 per $x\to 0$.

6. Il limite è nella f.i. $+\infty\cdot 0$. Possiamo portare la x come esponente dell'argomento del logaritmo:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Dentro al logaritmo abbiamo il limite fondamentale ($\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$) e quindi il limite dato vale $\ln e = 1$.

Alternativamente possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

e concludere che è sostanzialmente il limite notevole logaritmico, dato che la funzione $\frac{1}{x}$ tende a zero per $x\to+\infty$. Il risultato è quindi 1. Si poteva ovviamente anche usare un cambio di variabile ($\frac{1}{x}=y$).

7. Il limite è nella f.i. $\frac{0}{0}$. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x}\right).$$

Il primo quoziente tende ad 1 (limite notevole esponenziale); il secondo quoziente si semplifica in $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e quindi tende a $+\infty$ per $x\to 0^+$. Il risultato è allora $-\infty$. Si poteva anche usare un cambio di variabile ($\sqrt{x}=y$).

8. Il limite è nella f.i. $+\infty\cdot 0$. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x}\cdot\frac{1}{1/x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x}\cdot x\right).$$

Il quoziente tende ad 1 (limite notevole esponenziale) e quindi il limite è $+\infty$.

9. Il limite è nella f.i. $\frac{0}{0}$. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x^2)^{1/2}-1}{x^2}\cdot x\right).$$

Il quoziente tende a $\frac{1}{2}$ (limite notevole potenza) e quindi il limite è 0.

10. Il limite è nella f.i. $\frac{0}{0}$. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Il primo quoziente tende a $\frac{1}{3}$ (limite notevole potenza); il secondo quoziente tende a $+\infty$ e quindi il limite è $+\infty$.

11. Questo è forse meno immediato degli altri, ma un semplice cambio di variabile lo riconduce direttamente al limite notevole logaritmico. Poniamo $x-1=y$ (da cui $x=1+y$): si ottiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

12. Questo è simile al precedente (almeno nel modo con cui si arriva alla conclusione): poniamo $x-1=y$ e otteniamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+y}-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{1/4}-1}{y} = \frac{1}{4}.$$

D. Definizione di derivata

► 1. Dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = x + 2^x$, per $x \to 0$, e cioè il

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{2^x - 1}{x}\right) = 1 + \ln 2,$$

ricordando il limite notevole esponenziale (con base 2).

► 2. Dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \ln^2 x$, per $x \to 1$. Possiamo usare qui la definizione nella forma con l'incremento h, cioè calcolare il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln^2(1 + h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\ln(1 + h)}{h}\right)^2 \cdot h = 0,$$

ricordando che quello tra parentesi è un limite notevole.

Se avessimo invece usato il limite del rapporto incrementale nella forma con la x dovevamo calcolare il

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x}{x - 1}.$$

Questo limite diventa quello di prima con il cambio di variabile $x - 1 = h$.

► 3. Dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, per $x \to 1$, e cioè il

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Questo limite si può calcolare in vari modi.

Uno è quello di scomporre il denominatore $x - 1$ in $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$. Si ha allora

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Oppure si può usare un cambio di variabile $x - 1 = t$, da cui risulta

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 + t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1 + t)^{1/2} - 1}{t} = \frac{1}{2} \quad \text{(limite notevole)}.$$

Scrivendo invece il rapporto incrementale nella forma con h si avrebbe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$$

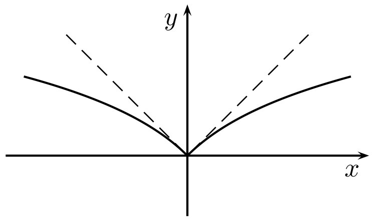
e si vede che il limite è lo stesso di poco fa.

► Qui servono i grafici elementari e la definizione di derivata.

4. Il grafico della funzione $f(x) = \ln(1 + |x|)$ è riportato a fianco. È stato ottenuto con le consuete trasformazioni elementari con la sequenza

$\ln x$, $\ln(1 + x)$, $\ln(1 + |x|)$.

Il grafico porta a vedere che in $x = 0$ c'è un punto in cui la funzione non è derivabile (pur essendo continua). Verifichiamo allora questo con la definizione di derivata, calcolando derivata destra e derivata sinistra.



La derivata destra è

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1. \quad [11]$$

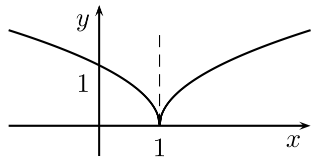
La derivata sinistra è invece

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1 - x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1 - x)}{-x} \cdot (-1) = -1. \quad [12]$$

[11] Per $x > 0$ si ha naturalmente $f(x) = \ln(1 + |x|) = \ln(1 + x)$.

La conclusione è quindi che questa funzione ha in 0 un punto angoloso (punto di non derivabilità con derivata destra e sinistra finite). Anche sul grafico si può vedere che le pendenze, destra e sinistra, sono finite.

5. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ è riportato a fianco. È stato ottenuto con una sequenza di trasformazioni elementari, a partire dal grafico di $x \mapsto \sqrt{x}$, poi di $x \mapsto \sqrt{|x|}$ e infine di $x \mapsto \sqrt{|x-1|}$.
Il grafico mostra che in $x = 1$ c'è un punto in cui la funzione non è derivabile (pur essendo continua). Calcoliamo allora derivata destra e derivata sinistra.



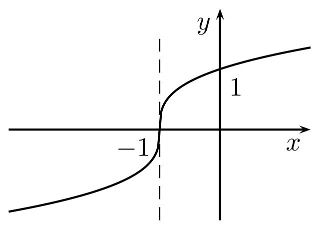
$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

La derivata sinistra è invece

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \left(-\sqrt{\frac{1-x}{(x-1)^2}}\right) = -\lim_{x\to1^-} \sqrt{\frac{-1}{x-1}} = -\infty.$$ [13]

La conclusione è quindi che questa funzione ha in 1 un punto di cuspide (punto di non derivabilità con almeno una delle due derivate, destra o sinistra, infinite e diverse tra loro). Sul grafico si può vedere che qui le pendenze, destra e sinistra, sono entrambe infinite e di segno opposto.

6. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ è riportato a fianco. È stato ottenuto con una trasformazione elementare a partire dal grafico di $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ricordando che la funzione è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine.
Il grafico mostra che in $x = -1$ c'è un punto in cui la funzione ha pendenza infinita, e quindi non è derivabile (pur essendo continua). Calcoliamo la derivata con la definizione.



$$f'(-1) = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty.$$ [14]

La conclusione è quindi che questa funzione ha in -1 un punto a tangente verticale. Si noti che, pur essendo derivata destra e derivata sinistra uguali, la funzione non è comunque derivabile in -1, dato che queste derivate non sono finite.

E. Retta tangente

► Ricordo che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f (derivabile) nel punto di ascissa x_0 è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. Con la funzione $f(x) = e^{-x}$ in $x_0 = 0$ abbiamo

$$f(x_0) = f(0) = 1 \quad , \quad f'(x) = -e^{-x} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(0) = -1.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = 1 - x.$$

2. Con la funzione $f(x) = \ln(x^2+1)$ in $x_0 = 1$ abbiamo

$$f(x_0) = f(1) = \ln 2 \quad , \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(1) = 1.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = \ln 2 + x - 1.$$

[12] Per $x < 0$ si ha $f(x) = \ln(1+|x|) = \ln(1-x)$. Si noti anche che qui ci si riconduce al limite notevole logaritmico semplicemente cambiando il segno del denominatore.

[13] Attenzione qui. Quando si porta $x-1$ sotto radice bisogna ricordarsi che, dato che $x \to 1^-$, $x-1$ è negativo, e quindi occorre "lasciare fuori un segno meno".

[14] Qui non serve distinguere se da destra o da sinistra, dato che il denominatore è sempre uno 0^+.

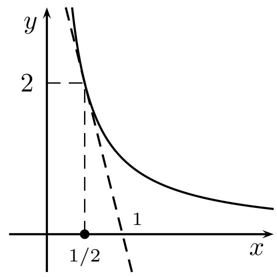
3. Con la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x_0 = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$f(x_0) = f(\tfrac{1}{2}) = 2 \quad , \quad f'(x) = -\tfrac{1}{x^2} \quad \text{e quindi} \quad f'(x_0) = f'(\tfrac{1}{2}) = -4.$$

L'equazione della retta tangente è pertanto

$$y = 2 - 4(x - \tfrac{1}{2}).$$

Si può vedere che questa retta incontra l'asse x in $x = 1$, come illustra la figura.



F. Regole di derivazione

► Qui per il calcolo delle derivate usiamo le regole di derivazione.

1. Con la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ si ha (derivata di una somma)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$$

2. Con la funzione $f(x) = x^2 e^x$ si ha (derivata di un prodotto)

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x).$$

3. Con la funzione $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ si ha (derivata di un prodotto)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2).$$

4. Con la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ si ha (derivata di un quoziente)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

5. Con la funzione $f(x) = \ln^3 x$ si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}.$$

6. Con la funzione $f(x) = \ln(x^3)$ si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}.$$

7. Con la funzione $f(x) = e^{1-x^2}$ si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}.$$

8. Con la funzione $f(x) = \sqrt{\ln x}$ si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

9. Con la funzione $f(x) = \ln \sqrt{x}$ si ha (derivata di una funzione composta)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

10. Con la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ si ha (derivata di una funzione composta)[15]

$$f'(x) = D(1 + e^x)^{-1} = -(1 + e^x)^{-2} \cdot e^x = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

[15] Si può anche usare la derivata del quoziente.

11. Con la funzione $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$ si ha

$$f'(x) = D(1+x^3)^{1/3} = \frac{1}{3}(1+x^3)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

12. Con la funzione $f(x) = e^{1/x}$ si ha

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

13. Con la funzione $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

14. Con la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}$ si ha

$$f'(x) = D(1+\ln x)^{-1} = -(1+\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+\ln x)^2}.$$

15. Con la funzione $f(x) = x^2 e^{-1/x}$ si ha

$$f'(x) = 2xe^{-1/x} + x^2 e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-1/x}(2x+1).$$

16. Con la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$ si ha

$$f'(x) = D(1+e^{-x})^{-2} = -2(1+e^{-x})^{-3} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^3}.$$