Soluzioni delle Esercitazioni VII – 07/11–15/11/2024

A. Integrali indefiniti

► 1. Si ha

$$\int (2x^3 - 3x + 1)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + c.$$

2. Si ha

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x = \int (x^{1/2} + x^{1/3})\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c.$$

3. Si ha

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \ln|x| + 2\sqrt{x} + c.$$

4. Si ha

$$\int \sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x = \int (x-3)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + c.$$

5. Si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = \int (x+2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x+2} + c.$$

6. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma

$$\int f^{\alpha}(x) Df(x)\,\mathrm{d}x \text{ , che ricordo si integra in } \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c,$$

dove nel nostro caso $f(x) = 3x + 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Come si vede, per avere la forma richiesta, manca dentro l'integrale la derivata di f, che è 3. Allora possiamo moltiplicare e dividere per 3 e otteniamo

$$\int \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3(3x+2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^3} + c.$$

7. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma

$$\int e^{f(x)} Df(x)\,\mathrm{d}x \text{ , che ricordo si integra in } e^{f(x)} + c,$$

dove nel nostro caso $f(x) = 4x - 3$. Per avere la forma richiesta, manca dentro l'integrale la derivata di f, che è 4. Allora moltiplichiamo e dividiamo per 4 e otteniamo

$$\int e^{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4e^{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{4x-3} + c.$$

8. Questo integrale è del tipo $\int f^{\alpha}(x)Df(x)\,\mathrm{d}x$ e non richiede nessun "aggiustamento delle costanti", dato che $f(x) = x - 1$ e la derivata di f è 1. Quindi abbiamo direttamente

$$\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \int (x-1)^{3/4}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^{7/4}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[4]{(x-1)^7} + c.$$

9. Questo integrale è della forma

$$\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \text{ , che ricordo si integra in } \ln|f(x)| + c,$$

dove nel nostro caso $f(x) = 1 + e^x$. Si ha allora

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+e^x| + c = \ln(1+e^x) + c.$$

Il valore assoluto si può togliere in quanto l'argomento del logaritmo è sempre positivo.

10. Ancora integrale del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, con $f(x) = x + e^x$ (il numeratore è la derivata del denominatore). Non occorre aggiustare nessuna costante. Si ha

$$\int \frac{e^x + 1}{x + e^x}\,\mathrm{d}x = \ln|x + e^x| + c.$$

11. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int f^\alpha(x)Df(x)\,\mathrm{d}x$ e occorre aggiustare una costante.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-5x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int(-5)(3-5x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\frac{(3-5x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{5}\sqrt{3-5x} + c.$$

12. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int e^{f(x)}Df(x)\,\mathrm{d}x$ e occorre aggiustare una costante.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c.$$

13. Questo integrale si può risolvere togliendo e aggiungendo 2 a numeratore:

$$\int \frac{x}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-2+2}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = x + 2\ln|x-2| + c.$$

14. Questo si può risolvere in modo simile al precedente:

$$\int \frac{x}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+5-5}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(1 - \frac{5}{4x+5}\right)\mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{5}{4}\int \frac{1}{4x+5}\,\mathrm{d}x.$$

Dato che ora

$$\int \frac{1}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|4x+5| + c$$

allora

$$\int \frac{x}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{5}{16}\ln|4x+5| + c.$$

15. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int f^\alpha(x)Df(x)\,\mathrm{d}x$, dove in questo caso $f(x) = 5+x^2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Per avere la forma richiesta, dentro l'integrale dobbiamo avere la derivata di f, che è $2x$: la x c'è, manca il 2. Quindi moltiplichiamo e dividiamo per 2. Si ha

$$\int x\sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(5+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(5+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(5+x^2)^3} + c.$$

16. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int e^{f(x)}Df(x)\,\mathrm{d}x$, dove nel nostro caso $f(x) = \sqrt{x}$. Per avere la forma richiesta, dobbiamo avere dentro l'integrale anche la derivata di f, che è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. C'è la radice, ma manca un 2 (a denominatore). Quindi moltiplichiamo e dividiamo per 2. Si ha

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

17. Questo integrale si può ricondurre ad un integrale della forma $\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, però occorre aggiustare una costante.

$$\int \frac{e^x}{1-3e^x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{-3e^x}{1-3e^x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|1-3e^x| + c.$$

18. Integrale del tipo $\int f^\alpha(x)Df(x)\,\mathrm{d}x$ con $f(x) = 1 + 2\ln x$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Dato che la derivata di f è $\frac{2}{x}$, manca un 2 a numeratore. Si ha allora

$$\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1+2\ln x)^{1/2}\cdot\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(1+2\ln x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(1+2\ln x)^3} + c.$$

19. Integrale del tipo $\int f^{\alpha}(x)Df(x)\,\mathrm{d}x$,[1] con $f(x) = 1 + x^3$ e $\alpha = -2$. Dato che la derivata di f è $3x^2$, manca un 3 a numeratore. Si ha allora

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2(1+x^3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(1+x^3)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3} + c.$$

20. Integrale del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, con $f(x) = x^2 + e^{-x}$. Si ha

$$\int \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2 + e^{-x}| + c = \ln(x^2 + e^{-x}) + c.$$

Il valore assoluto si può togliere poiché l'argomento è sicuramente positivo.

B. Integrali indefiniti

► 1. Integriamo per parti scegliendo come parte finita x e come parte differenziale e^{-2x}. Ricordo che dobbiamo seguire questa regola: la parte finita per una primitiva della parte differenziale meno l'integrale di questa primitiva appena trovata per la derivata della parte finita. Quindi

$$\begin{aligned}
\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x &= x \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + c \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

2. Qui prendiamo come parte finita $\ln x$ e come parte differenziale x^3. Si ha

$$\begin{aligned}
\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x &= \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c \\
&= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c.
\end{aligned}$$

3. Qui prendiamo come parte finita $\ln x$ e come parte differenziale $\sqrt{x}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x &= \ln x \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - \int \frac{x^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + c.
\end{aligned}$$

4. Parte finita $\ln^2 x$ e parte differenziale x. Si ha

$$\begin{aligned}
\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x &= \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

[1] Attenzione, non del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$! Infatti, se così fosse, a numeratore dovremmo avere la derivata di $(1 + x^3)^2$ e non è così.

Ora ancora per parti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\left(\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+c\\
&= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+c.
\end{aligned}$$

5. Parte finita $\ln(x+1)$ e parte differenziale 1. Si ha

$$\int\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+c.$$

Si noti che è inutile qui mettere il valore assoluto di $x+1$ nell'ultimo termine, dato che la funzione non è comunque definita se $x+1<0$.

6. Parte finita $\ln(x+1)$ e parte differenziale x. Si ha

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x &= \ln(x+1)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ora si tratta di integrare il quoziente dei due polinomi. Qui si può procedere in due modi: o effettuiamo la divisione del polinomio x^2 per il polinomio $x+1$ (ad esempio con la regola di Ruffini)[2] oppure usiamo la tecnica già vista dell'"aggiungere e togliere". Possiamo scrivere

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}.$$

Quindi

$$\int\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c$$

e pertanto

$$\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c.$$

► 7. Questo integrale è quasi immediato e lo sappiamo già risolvere con quella tecnica. Usiamo qui invece il cambio di variabile $\ln x=t$, da cui $x=e^t$ e quindi $\mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$. Si ha

$$\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t}{e^t}\cdot e^t\,\mathrm{d}t=\int t\,\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\ln^2 x}{2}+c.$$

8. Con il cambio di variabile $e^x=t$, da cui $x=\ln t$, cioè $x=\ln t$ e quindi $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, si ha

$$\int\frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Per procedere si può usare la tecnica dell'"aggiungere e togliere", aggiungendo e togliendo t.

$$\int\frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1+t-t}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln|t|-\ln|t+1|+c=\ln e^x-\ln|e^x+1|+c=x-\ln(e^x+1)+c.$$

Il valore assoluto si può togliere perché e^x+1 è certamente positivo.

[2] Lo studente provi ad effettuarla: si trova che vale l'identità $x^2=(x+1)(x-1)+1$.

9. L'integrale si può anche risolvere osservando che $\frac{1+\ln x}{x\ln x} = \frac{1}{x\ln x} + \frac{1}{x}$. L'integrale del primo termine lo abbiamo visto poco fa e l'integrale del secondo è immediato.

Usiamo invece il cambio di variabile: ponendo $\ln x = t$, si ha $x = e^t$ e quindi $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$. Allora

$$\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t}{e^t\cdot t}\cdot e^t\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t = \ln|t| + t + c = \ln|\ln x| + \ln x + c.$$

10. Con il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$, da cui $x = t^2$ e quindi $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, si ha

$$\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{2+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ora con la solita tecnica dell'"aggiungere e togliere":

$$2\int \frac{2+t-2}{2+t}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{2}{2+t}\right)\mathrm{d}t = 2\Big(t - 2\ln|2+t|\Big) + c = 2\sqrt{x} - 4\ln|2+\sqrt{x}| + c = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + c.$$

Si noti che il valore assoluto alla fine si può togliere in quanto l'argomento del logaritmo è positivo.

11. Con il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$, da cui $x = t^2$ e quindi $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, si ha

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2-t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t-1| + c = 2\ln|\sqrt{x}-1| + c.$$

Qui il valore assoluto alla fine non si può togliere in quanto l'argomento del logaritmo non è sempre positivo.

12. Con il cambio di variabile $e^x = t$, da cui $x = \ln t$ e quindi $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, si ha

$$\int \frac{1}{e^x+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Qui si può ancora sfruttare la tecnica dell'"aggiungere e togliere", togliendo e aggiungendo t^2. Si ottiene

$$\int \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-t)(1+t)+t^2}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1-t}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} - \ln|t| + \ln|1+t| + c = -\frac{1}{e^x} - \ln e^x + \ln|1+e^x| + c = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + c.$$

C. Integrale di Riemann

► 1. Si osservi anzitutto che la funzione integranda non è definita in $x = 0$, ma questo non crea problemi dato che l'intervallo di integrazione è $[1,2]$ (possiamo quindi dire che la funzione è definita e continua nell'intervallo che ci interessa e quindi che l'integrale è un integrale di Riemann). L'integrazione è immediata. Si ha

$$\int_1^2\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(e^x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = e^2 - \frac{1}{2} - (e-1) = e^2 - e + \frac{1}{2}.$$

2. Anche in questo caso la funzione integranda non è definita in $x = 0$, ma l'intervallo è $[1, e^2]$ e quindi la funzione è in esso continua. Anche qui l'integrazione è immediata. Si ha

$$\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln x + \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_1^{e^2} = 2 + \frac{2}{3}e^3 - \left(0+\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}e^3 + \frac{4}{3}.$$

3. La funzione non è definita in $x = 0$, ma l'intervallo è $[1,2]$. Qui l'integrazione non è così immediata ma non è difficile. Si può osservare che l'integrale è del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, con $f(x) = 1+\ln x$. Quindi si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x = \ln|1+\ln x|\Big|_1^2 = \ln(1+\ln 2).$$

4. La funzione non è definita in $x = 0$, ma l'intervallo è $[4,9]$. Una primitiva della funzione $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ si può trovare con un cambio di variabile. Ricordo che, quando si vuole risolvere un integrale definito con un cambio di variabile, sono aperte due strade:

(i) risolvere prima a parte l'integrale indefinito (quindi senza gli estremi), trovare la primitiva con la nuova variabile, tornare a scrivere la primitiva nella variabile x e infine calcolare la differenza agli estremi di integrazione, oppure

(ii) svolgere i calcoli mantenendo gli estremi di integrazione: in questo caso occorre ricordare che, quando si effettua il cambio di variabile, gli estremi cambiano; dopo aver trovato la primitiva, nella nuova variabile, il calcolo dell'integrale definito si conclude facendo la differenza agli estremi (quelli nuovi). Ovviamente in questo modo non si torna più alla vecchia variabile di integrazione x.

In questo esempio vediamo tutti e due i modi di procedere.

Con il primo modo calcolo intanto a parte l'integrale indefinito, con il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$, da cui $x = t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t+1| + c = 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

A questo punto calcolo l'integrale definito facendo

$$\int_4^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\ln(\sqrt{x}+1)\Big|_4^9 = 2(\ln 4 - \ln 3) = \ln\frac{16}{9}.$$

Nel secondo modo invece si ha

$$\int_4^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t+1|\Big|_2^3 = 2(\ln 4 - \ln 3) = \ln\frac{16}{9}.$$

Si noti che, quando ho effettuato il cambio di variabile, ho cambiato gli estremi di integrazione.[3]

5. La funzione non è definita in $x = \ln 3$, ma l'intervallo è $[0, \ln 2]$. Una primitiva si può trovare o con un cambio di variabile oppure più direttamente osservando che l'integrale è del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x)\,\mathrm{d}x$, con $f(x) = e^x - 3$ e $\alpha = -2$. Quindi si ha

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(e^x-3)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{e^x-3}\Bigg|_0^{\ln 2} = -\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{2}.$$

6. La funzione non è definita in $x = -2$ e in $x = 1$, ma l'intervallo è $[-1, 0]$ e quindi non contiene i punti "pericolosi". L'integrale indefinito è del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x)\,\mathrm{d}x$, con $f(x) = 2 - x - x^2$ e $\alpha = -\frac{1}{2}$. Quindi si ha (occorre aggiustare una costante)

$$\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{\sqrt{2-x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 (-2x-1)(2-x-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{(2-x-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{-1}^0 = -2\sqrt{2-x-x^2}\Big|_{-1}^0 = -2(\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 0.$$

Il risultato può forse sorprendere. È dovuto ad una simmetria della funzione, che però è una simmetria non così facile da cogliere, dato che non è rispetto ad $x = 0$, ma rispetto ad $x = -\frac{1}{2}$.

D. Integrale di funzioni definite a tratti

► 1. Dividendo l'intervallo di integrazione $[-1, 2]$ nei due sottointervalli $[-1, 1]$ e $[1, 2]$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) + \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

[3]I nuovi estremi si determinano sulla base della sostituzione: in questo caso, essendo $\sqrt{x} = t$, al valore $x = 4$ corrisponde $t = 2$ e al valore $x = 9$ corrisponde $t = 3$.

2. Questo integrale è svolto nelle dispense del corso.

3. La presenza del valore assoluto (e il fatto che x cambia segno nell'intervallo di integrazione)[4] costringe a scomporre l'integrale di $|x|$ in due integrali distinti. Si ha

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + |x|)\,dx = \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx.$$

A questo punto il calcolo è immediato. Si ottiene

$$\ldots = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{2} = \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = 3 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{11}{2}.$$

4. Anche qui la presenza del valore assoluto e il fatto che $x-3$ cambia segno nell'intervallo di integrazione costringe a scomporre l'integrale in due integrali distinti.[5] Si osservi anche che la funzione non è definita in $x=0$ ma questo non crea problemi all'integrale, che è in $[1,4]$. Si ha

$$\int_1^4 \frac{|x-3|+2}{x^2}\,dx = \int_1^3 \frac{3-x+2}{x^2}\,dx + \int_3^4 \frac{x-3+2}{x^2}\,dx = \int_1^3 \frac{5-x}{x^2}\,dx + \int_3^4 \frac{x-1}{x^2}\,dx.$$

Ora gli integrali sono immediati:

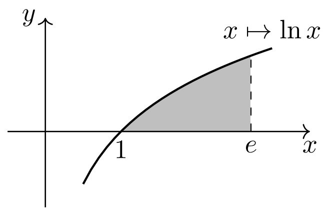
$$\ldots = 5\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{x}\,dx - \int_3^4 \frac{1}{x^2}\,dx = 5\left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_1^3 - \ln x\Big|_1^3 + \ln x\Big|_3^4 + \frac{1}{x}\bigg|_3^4 = \ldots = \ln\frac{4}{9} + \frac{39}{12}.$$

E. Calcolo di un'area

► 1. La figura a fianco rappresenta la regione in questione.

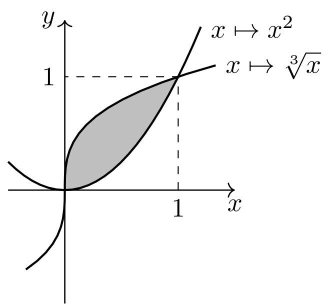
La definizione stessa di integrale di Riemann, in questo caso, fornisce direttamente l'area voluta. Infatti nell'intervallo $[1,e]$ la funzione logaritmica è non negativa. L'area è data dall'integrale

$$\int_1^e \ln x\,dx = \Big(x\ln x - x\Big)\Big|_1^e = 1.\ ^{6}$$



► 2. Nel caso di un'area di una regione compresa tra due grafici di funzioni, come in questo caso, l'area si ottiene calcolando l'integrale, tra due estremi opportunamente determinati, della differenza delle due funzioni. Se le due funzioni sono f e g, ovviamente non è lo stesso fare $f-g$ o $g-f$: solo in un caso si ottiene l'area, cioè un numero positivo, nell'altro si ottiene l'opposto negativo. Un modo generale potrebbe essere calcolare l'integrale del valore assoluto $|f-g|$, ma questo non ci eviterebbe di fare un controllo che dovrebbe risultare naturale: trovare "quale funzione sta sopra e quale sotto", per poi fare "quella sopra − quella sotto".

La figura a fianco rappresenta la regione in questione.
È anzitutto fondamentale trovare dove si ha l'intersezione dei due grafici, dato che questi punti sono gli estremi dell'intervallo di integrazione. Ricordando le proprietà delle funzioni potenza si vede facilmente che le ascisse dei punti di intersezione sono 0 e 1. Altrimenti bisogna risolvere l'equazione $\sqrt[3]{x} = x^2$, cioè $x^6 = x$, cioè $x(x^5-1) = 0$, da cui si trova quanto detto. Il grafico dice che la radice "sta sopra" e la parabola "sta sotto". L'area è data allora dall'integrale



$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

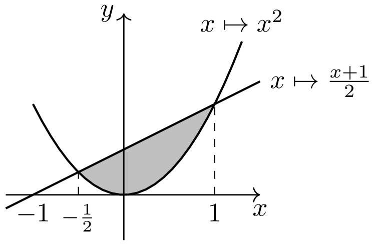
[4] Se fosse stato $\int_1^2 (x^2+|x|)\,dx$ non avremmo avuto grosse complicazioni rispetto agli integrali precedenti, dato che in $[1,2]$ si ha $|x| = x$ e quindi $\int_1^2 (x^2+|x|)\,dx = \int_1^2 (x^2+x)\,dx$.

[5] Qui ci serve osservare che $|x-3|$ coincide con $x-3$ in $[3,4]$ e con $3-x$ in $[1,3]$.

[6] Ricordo che la primitiva si calcola per parti:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c.$$

► 3. La figura a fianco rappresenta la regione in questione.



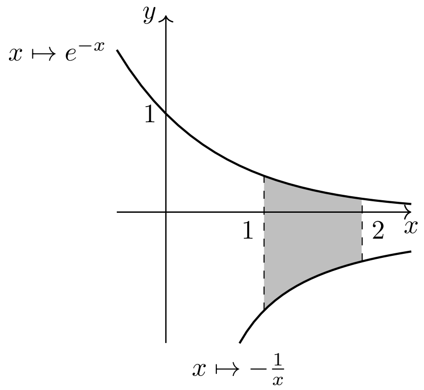
È importante trovare dove si ha l'intersezione tra le due curve, dato che questi punti sono gli estremi dell'intervallo di integrazione. Per trovare i due punti basta risolvere l'equazione $x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$, cioè $2x^2 - x - 1 = 0$. Con la formula risolutiva si trova

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1 \text{ oppure } -\tfrac{1}{2}.$$

Le ascisse dei punti di intersezione sono quindi 1 oppure $-\frac{1}{2}$. L'area è data allora dall'integrale

$$\int_{-1/2}^{1} \left(\frac{1}{2}(x+1) - x^2\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1/2}^{1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{9}{16}.$$

► 4. La figura qui sotto rappresenta la regione in questione.



Indicando con $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$, l'area è data dall'integrale tra 1 e 2 della differenza delle due funzioni, cioè di

$$f(x) - g(x), \text{ dato che } f \text{ è maggiore di } g.$$

Quindi l'area è

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2} \left(e^{-x} + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x &= \left(-e^{-x} + \ln x\right)\Big|_{1}^{2} \\
&= (-e^{-2} + \ln 2) - (-e^{-1} + \ln 1) \\
&= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + \ln 2.
\end{aligned}$$

F. Vettori

► 1. Il vettore v, combinazione lineare dei tre vettori v^1, v^2, v^3, è

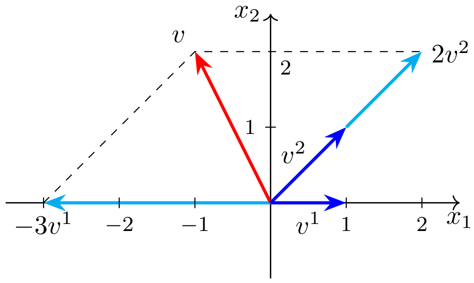
$$v = 3v^1 - 2v^2 + v^3 = 3(1,2,3) - 2(-1,2,-2) + (-2,3,1) = (3,6,9) + (2,-4,4) + (-2,3,1) = (3,5,14).$$

► 2. Intanto possiamo calcolare algebricamente

$$v = -3v^1 + 2v^2 = -3(1,0) + 2(1,1) = (-3,0) + (2,2) = (-1,2).$$

Ora facciamolo geometricamente:[7]

[7] Il vettore v si può ottenere, dalla regola del parallelogramma, come somma di $-3v^1$ e di $2v_2$. Il primo è un vettore di lunghezza tripla di v^1, orientato con verso opposto a v^1 stesso, il secondo è un vettore di lunghezza doppia di v^2, orientato come v^2.



▶ 3. La definizione dice che i vettori sono linearmente dipendenti se è possibile trovare una loro c.l. non banale uguale al vettore nullo e invece che sono linearmente indipendenti se l'unica loro c.l. uguale al vettore nullo è quella banale.

Costruiamo allora una generica c.l. dei vettori dati (ad esempio con coefficienti a, b) e poniamola uguale al vettore nullo; poi troviamo le condizioni sui coefficienti e vediamo in quali modi questo è possibile. Nel nostro caso abbiamo

$$a(1,2) + b(2,-1) = (0,0).$$

Questa equivale alla

$$(a, 2a) + (2b, -b) = (0,0) \qquad \text{cioè} \qquad (a+2b, 2a-b) = (0,0).$$

Questo si può avere solo se sono verificate le condizioni

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a - b = 0. \end{cases}$$

Ricavando b dalla seconda e sostituendo nella prima si ha

$$\begin{cases} b = 2a \\ a + 4a = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} b = 2a \\ 5a = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unica possibilità di avere il vettore nullo come c.l. dei vettori dati è evidentemente quella di scegliere tutti e due i coefficienti uguali a zero. I vettori sono pertanto linearmente indipendenti.

▶ 4. La definizione dice che i vettori sono linearmente dipendenti se è possibile trovare una loro c.l. non banale uguale al vettore nullo e invece che sono linearmente indipendenti se l'unica loro c.l. uguale al vettore nullo è quella banale.

Costruiamo allora una generica c.l. dei vettori dati (ad esempio con coefficienti a, b, c) e poniamola uguale al vettore nullo; poi troviamo le condizioni sui coefficienti e vediamo in quali modi questo è possibile. Nel nostro caso abbiamo

$$a(1,-1,0) + b(-1,1,1) + c(1,0,0) = (0,0,0).$$

Questa equivale alla

$$(a,-a,0) + (-b,b,b) + (c,0,0) = (0,0,0) \qquad \text{cioè} \qquad (a-b+c, -a+b, b) = (0,0,0).$$

Questo si può avere solo se $b = 0$ (terza componente), da cui però segue che $a = 0$ (seconda componente) e infine $c = 0$ (prima componente, tenendo conto delle altre due condizioni trovate). Quindi l'unica possibilità di avere il vettore nullo come c.l. dei vettori dati è evidentemente quella di scegliere tutti e tre i coefficienti uguali a zero. I vettori sono pertanto linearmente indipendenti.

▶ 5. Esercizio analogo al precedente. Possiamo procedere cercando se il vettore nullo si può ottenere come c.l. dei vettori dati solo in modo banale (cioè con coefficienti nulli) oppure in modo non banale. Scriviamo allora una generica c.l. dei vettori dati e poniamola uguale al vettore nullo:

$$a(0,1,0) + b(1,-1,1) + c(1,0,1) = (0,0,0).$$

Questa equivale alla

$$(0,a,0) + (b,-b,b) + (c,0,c) = (0,0,0) \qquad \text{cioè} \qquad (b+c, a-b, b+c) = (0,0,0).$$

Ora questo si può avere ovviamente se e solo se

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \qquad \text{(due equazioni sono uguali).}$$

È evidente che questo sistema non ha come unica soluzione $a=b=c=0$, dato che ad esempio anche $a=1$, $b=1$, $c=-1$ è una soluzione. I vettori sono quindi linearmente dipendenti.

► 6. Si potrebbe osservare subito che si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^2$, quindi 3 vettori in uno spazio di dimensione 2, e quindi che i 3 vettori sono certamente dipendenti. Però vediamolo, come richiesto, con la definizione.

Costruiamo come sempre una generica c.l. dei vettori dati (con coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) e poniamola uguale al vettore nullo. Abbiamo

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = 0 \quad , \quad \alpha_1(1,-1) + \alpha_2(1,1) + \alpha_3(0,1) = (0,0).$$

Questa significa

$$(\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = (0,0) \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases}$$

Ad esempio scegliendo $\alpha_1 = 1$, si vede subito che con $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = 2$ il sistema è verificato e quindi che la c.l. $v^1 - v^2 + 2v^3$ è il vettore nullo. Pertanto, dato che il vettore nullo si può scrivere come c.l. non banale dei vettori v^1, v^2, v^3, questi ultimi sono linearmente dipendenti.