Soluzioni delle Esercitazioni VIII – 18-22/11/2024

A. Vettori

▶ 1. I due vettori sono ortogonali se il loro prodotto interno è zero. Si ha

$$\langle v^1, v^2 \rangle = \langle (k+1, 1, 2k), (1, k-1, k) \rangle = k+1+k-1+2k^2 = 2k^2+2k = 2k(k+1).$$

Pertanto i vettori sono ortogonali se $2k(k+1) = 0$, cio è se (e solo se) $k = 0$ oppure $k = -1$.

▶ 2. La norma euclidea (o norma 2) di un vettore è la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti.[1] Quindi nel nostro caso

$$\|v\| = \big\|(-3, 1, -\sqrt{2}, 2)\big\| = \sqrt{9+1+2+4} = \sqrt{16} = 4.$$

▶ 3. Cerchiamo i punti di norma euclidea uguale a 1.

Siamo in $\mathbb{R}^2$ e indichiamo con (x, y) il punto generico. La norma euclidea (o norma 2) di (x, y) è radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti e quindi deve essere

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad \text{e cioè} \quad x^2+y^2 = 1.$$

Si tratta dei punti che stanno sulla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario.

▶ 4. La distanza dei due punti si ottiene come norma (euclidea) della differenza. Quindi

$$d(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| = \big\|(-1, 2, 3) - (-3, 1, -2)\big\| = \big\|(2, 1, 5)\big\| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}.$$

B. Trasformazioni lineari e matrici

▶ 1. Dato che possiamo scrivere

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

la matrice di rappresentazione della trasformazione T è $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Se indichiamo per comodità con u il vettore a componenti unitarie, sia ha che il trasformato del vettore u è

$$T(u) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che si può ottenere o dalla legge che definisce la trasformazione T o facendo il prodotto matrice×vettore

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Dato che possiamo scrivere

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2+2x_3 \\ 2x_1+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la matrice di rappresentazione della trasformazione T è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1] Si può anche dire, è lo stesso, che è la radice quadrata del prodotto interno del vettore per se stesso.

Il trasformato del vettore $u = (1,1,1)$ è

$$T(u) = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

3. Dato che possiamo scrivere

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2-2x_3-x_4\\x_1+x_2\\-x_3+2x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&-2&-1\\1&1&0&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

la matrice di rappresentazione della trasformazione T è $\begin{pmatrix}0&1&-2&-1\\1&1&0&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$.

Il trasformato del vettore $u = (1,1,1,1)$ è

$$T(u) = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

▶ 4. Anzitutto possiamo affermare che la trasformazione, chiamiamola T, è definita in $\mathbb{R}^3$ e assume valori in $\mathbb{R}^3$, quindi possiamo scrivere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. L'espressione si può ottenere in due modi, o con un prodotto matrice×vettore oppure con una combinazione lineare:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&3\\2&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1+3x_3\\2x_1+x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\end{pmatrix}.$$

Oppure, ricordando che in generale $T(x) = T(x_1u^1 + x_2u^2 + \ldots + x_nu^n) = x_1T(u^1) + x_2T(u^2) + \ldots + x_nT(u^n)$,

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1\\2x_1\\x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x_2\\-x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3x_3\\-x_3\\2x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1+3x_3\\2x_1+x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\end{pmatrix}.$$

▶ 5. Possiamo affermare che la trasformazione, chiamiamola T, è definita in $\mathbb{R}^4$ e assume valori in $\mathbb{R}^3$, quindi scriviamo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. L'espressione si può ottenere anche qui in due modi; otteniamola come prodotto matrice×vettore:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&-1&2\\1&-1&0&1\\2&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_3+2x_4\\x_1-x_2+x_4\\2x_1-x_4\end{pmatrix}.$$

▶ 6. L'immagine della trasformazione T è data dai vettori del tipo

$$\begin{pmatrix}2x_1-x_2+x_3\\x_1-2x_3\end{pmatrix}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono parametri arbitrari. Data l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix}2x_1-x_2+x_3\\x_1-2x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1\\x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_3\\-2x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},$$

si deduce che i vettori

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

sono generatori dell'immagine di T.

In generale si può affermare che i vettori colonna della matrice di rappresentazione sono generatori dell'immagine della trasformazione.[2] Nel nostro caso la matrice di rappresentazione di T è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi i vettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sono generatori dell'immagine di T. Questi tre vettori sono le immagini (o i trasformati) dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$. Infatti si può verificare facilmente che risulta: $T(u^1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{2}{1}$, $T(u^2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{-1}{0}$ e $T(u^3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \binom{1}{-2}$.

Questi tre vettori sono sicuramente linearmente dipendenti, dato che sono tre vettori in uno spazio di dimensione 2. Quindi essi non formano una base dell'immagine della trasformazione T.

Anche se non richiesto nell'esercizio, si può osservare che ad esempio il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due. Infatti dall'equazione

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ a \end{pmatrix},$$

si può ricavare $a = -2$ e $b = -5$, il che vuol dire che $\binom{1}{-2} = -2\binom{2}{1} - 5\binom{-1}{0}$. Allora, eliminando il terzo vettore, i rimanenti continuano ad essere generatori dell'immagine di T. Vediamo ora se il primo e il secondo vettore sono dipendenti o indipendenti. Con la definizione poniamo

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{che equivale a} \quad \begin{pmatrix} 2a - b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che si vede subito ha per soluzione solo quella banale, cioè $a = b = 0$. I due vettori sono quindi linearmente indipendenti e pertanto formano una base dell'immagine della trasformazione.

► 7. Come nell'esercizio precedente, possiamo ricavare i generatori riscrivendo opportunamente il vettore immagine. Si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto i tre vettori colonna trovati sono generatori dell'immagine di T.

Oppure, ricordando che dei generatori dell'immagine di una trasformazione lineare sono dati dalle colonne della matrice di rappresentazione, o ancora equivalentemente dai trasformati dei vettori fondamentali (di $\mathbb{R}^3$ in questo caso), sono quindi i vettori

$$T(u^1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T(u^2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T(u^3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essi però non sono una base dell'immagine, dato che sono linearmente dipendenti. Lo possiamo affermare osservando che ad esempio il secondo è l'opposto del primo.[3] Potremmo ora osservare che dei tre vettori generatori il secondo è inutile (dato che è c.l. del primo); il primo e il terzo sono ancora generatori dell'immagine di T e questa volta sono

[2] Ricordo che questo segue dal fatto che, se $x \in \mathbb{R}^n$, allora possiamo scrivere

$$x = x_1u^1 + x_2u^2 + \ldots + x_nu^n, \text{ dove } u^1, u^2, \ldots, u^n \text{ sono i vettori fondamentali di } \mathbb{R}^n.$$

Allora si ha

$$f(x) = f(x_1u^1 + x_2u^2 + \ldots + x_nu^n) = x_1f(u^1) + x_2f(u^2) + \ldots + x_nf(u^n).$$

Questa scrittura dice che ogni $f(x)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $f(u^1), f(u^2), \ldots, f(u^n)$ e cioè che questi ultimi sono generatori dell'immagine della trasformazione. Ma i vettori $f(u^1), f(u^2), \ldots, f(u^n)$ non sono altro che le colonne della matrice di rappresentazione.

[3] Se $T(u^2) = -T(u^1)$, allora $T(u^1) + T(u^2) = 0$ e quindi c'è una c.l. non banale dei tre vettori che mi dà il vettore nullo. Quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

linearmente indipendenti (lo si può verificare facilmente con la definizione). Allora possiamo dire che $T(u^1)$ e $T(u^3)$ (la prima e la terza colonna della matrice di rappresentazione) sono una base dell'immagine di T.

► 8. Si tratta di una trasformazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. La matrice di rappresentazione di T è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I vettori colonna di questa matrice sono generatori dell'immagine di T. Non si tratta di una base in quanto i tre vettori sono dipendenti.[4] Si può verificare facilmente con la definizione che le prime due colonne sono linearmente indipendenti e quindi formano una base dell'immagine di T.

C. Calcoli con matrici

► 1. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

► 7. La trasformazione T non è certamente suriettiva dato che ad esempio il vettore $\binom{0}{1}$ non si può ottenere come immagine di alcun vettore di $\mathbb{R}^2$, avendo le immagini tutte come seconda componente 0. Analogamente possiamo affermare che il sottospazio immagine, cioè $\mathrm{Im}(T)$, usando nel codominio un riferimento (y_1, y_2), è formato dai vettori con $y_2 = 0$ (seconda componente nulla, cioè l'asse y_1) e pertanto non "copre" l'intero codominio.

La trasformazione T non è nemmeno iniettiva. Infatti i vettori $\binom{0}{0}$ e $\binom{1}{-1}$ hanno la stessa immagine, cioè il vettore nullo.

► 8. La trasformazione T è iniettiva. Infatti se $\binom{x_1}{x_2} \neq \binom{y_1}{y_2}$ allora certamente

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

dato che essi hanno la prima (o la seconda) componente diversa.[5]

[4] Anche qui si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^2$: un numero di vettori maggiore della dimensione dello spazio porta sempre a vettori dipendenti.

[5] Si consideri che due vettori sono diversi tra loro se e solo se hanno almeno una componente diversa. Quindi $\binom{x_1}{x_2} \neq \binom{y_1}{y_2}$ se e solo se $x_1 \neq y_1$ oppure $x_2 \neq y_2$. Pertanto, nel nostro caso, se $x_1 \neq y_1$ allora i vettori trasformati hanno la seconda componente diversa, mentre se $x_2 \neq y_2$, hanno la prima componente diversa. In ogni caso i due trasformati sono diversi.

La trasformazione T è anche suriettiva. Infatti, preso un qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$, indichiamolo con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, esso si ottiene come immagine di un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, dato che

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{significa} \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e basterà porre $x_1 = b$ e $x_2 = -a$.

► 9. La trasformazione T non è iniettiva. Infatti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanno la stessa immagine, cioè il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Non è nemmeno suriettiva, dato che ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non si può ottenere come immagine di alcun vettore di $\mathbb{R}^3$. Infatti

$$T\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

e il sistema è chiaramente impossibile.

► 10. La trasformazione T è iniettiva. Infatti se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ allora possiamo ricavare che

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

dato che almeno una delle componenti è diversa.

La trasformazione T è anche suriettiva. Infatti, se consideriamo un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$, indichiamolo con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, esso si ottiene come immagine di un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dato che

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{significa} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e basterà porre $x_1 = c$, $x_2 = a$ e $x_3 = b$.