Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2016/17

Alberto Peretti

Ottobre 2017

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 09/11/2016

Domanda 1. Determinare il quoziente e il resto della divisione di $x^3 - x + 1$ per $x + 1$

✎

Possiamo applicare la divisione di Ruffini, dato che il divisore è del tipo $x + a$. Abbiamo

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Quindi possiamo scrivere $x^3 - x + 1 = (x + 1)(x^2 - x) + 1$ e cioè il quoziente è $x^2 - x$ e il resto è 1.
Effettuando la divisione con il procedimento di Euclide avremmo avuto

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} & x^3 & & & - & x & + & 1 & x & + & 1 \\ \cline{9-11} - & x^3 & - & x^2 & & & & & x^2 & - & x \\ \cline{1-8} & // & - & x^2 & - & x & + & 1 & & & \\ & & & x^2 & + & x & & & & & \\ \cline{3-8} & & & // & & // & & 1 & & & \end{array}$$

Domanda 2. Ridurre allo stesso denominatore l'espressione $\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{x}{e^x} + 1$

✎

Si ha

$$\frac{e^x}{x} + \frac{x}{e^x} + 1 = \frac{e^{2x} + x^2 + xe^x}{xe^x}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2e^{1/x} - 1 = 0$$

✎

Anzitutto dobbiamo scrivere la condizione di esistenza, che è $x \neq 0$. Poi l'equazione equivale a

$$2e^{1/x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1/x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \ln\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{\ln 2}.$$

La soluzione è accettabile nella condizione di esistenza.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$(x + 1)(x - 2) > 4$$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 - x - 6 > 0 \quad \text{che equivale a} \quad (x + 2)(x - 3) > 0.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono per valori esterni alle due radici e quindi

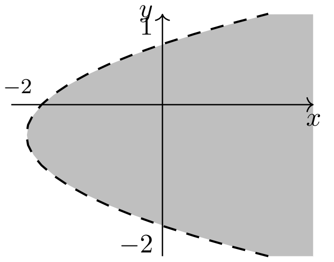
$$x < -2 \ \vee \ x > 3 \quad \text{oppure} \quad S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty).$$

Domanda 5. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x > y^2 + y - 2$

✎

La disequazione equivale alla

$$x > (y - 1)(y + 2).$$



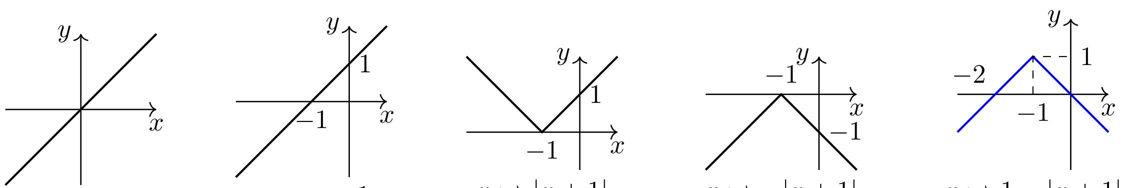
L'equazione corrispondente definisce la parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso destra, che interseca l'asse verticale in $y = -2$ oppure $y = 1$. La disequazione individua poi la regione di piano che sta alla destra della parabola. La frontiera (i punti della parabola) non fanno parte della regione, raffigurata in grigio qui sopra.

Domanda 6. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - |x+1|$

✎

La sequenza di trasformazioni può essere questa:

$$x \quad \to \quad x+1 \quad \to \quad |x+1| \quad \to \quad -|x+1| \quad \to \quad -|x+1|+1.$$

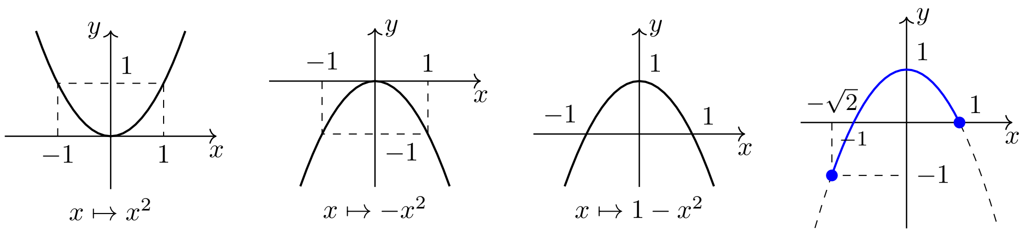


$x \mapsto x$ $\quad$ $x \mapsto x+1$ $\quad$ $x \mapsto |x+1|$ $\quad$ $x \mapsto -|x+1|$ $\quad$ $x \mapsto 1-|x+1|$

Domanda 7. Dopo aver disegnato un grafico della funzione $f : [-\sqrt{2}, 1] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = 1 - x^2$, si determinino il massimo e il minimo di f e i relativi punti di massimo e di minimo

✎

Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$, con le successive trasformazioni qui sotto riportate.



$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto -x^2$ $\quad$ $x \mapsto 1-x^2$

Dal grafico si rileva che:

$$\max f = 1, \text{ con punto di massimo } x_M = 0;$$

e

$$\min f = -1, \text{ con punto di minimo } x_m = -\sqrt{2}.$$

Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(x^2)}{x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{\ln(0^+)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Domanda 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - \dfrac{1}{2}$

✎

I punti stazionari sono i punti che annullano la derivata. Abbiamo $f'(x) = x^2 + 2x$ e quindi i punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = -2.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 09/11/2016

Domanda 1. Determinare il quoziente e il resto della divisione di $x^3 + x^2 + 1$ per $x + 2$

✎

Possiamo applicare la divisione di Ruffini, dato che il divisore è del tipo $x + a$. Abbiamo

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
-2 & & -2 & 2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & -3
\end{array}
$$

Quindi possiamo scrivere $x^3 + x^2 + 1 = (x + 2)(x^2 - x + 2) - 3$ e cioè il quoziente è $x^2 - x + 2$ e il resto è -3. Effettuando la divisione con il procedimento di Euclide avremmo avuto

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & x^2 & & & & + & 1 & & x + 2 \\
\cline{11-11}
- & x^3 & - & 2x^2 & & & & & & & x^2 - x + 2 \\
\cline{1-10}
 & // & - & x^2 & & & & + & 1 & & \\
 & & + & x^2 & + & 2x & & & & & \\
\cline{3-10}
 & & & // & & 2x & & + & 1 & & \\
 & & & & - & 2x & & - & 4 & & \\
\cline{5-10}
 & & & & & // & & - & 3 & &
\end{array}
$$

Domanda 2. Ridurre allo stesso denominatore l'espressione $\dfrac{1}{e^x} - \dfrac{e^x}{x} - 1$

✎

Si ha

$$\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{x} - 1 = \frac{x - e^{2x} - xe^x}{xe^x}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

✎

Anzitutto dobbiamo scrivere la condizione di esistenza, che è $x > 0$. Poi l'equazione equivale a

$$2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = e^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

La soluzione è accettabile nella condizione di esistenza.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$(x + 3)(x - 2) > 6$$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 + x - 12 > 0 \quad \text{e cioè} \quad (x + 4)(x - 3) > 0.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono per valori esterni alle due radici e quindi

$$x < -4 \ \vee \ x > 3 \quad \text{oppure} \quad S = (-\infty, -4) \cup (3, +\infty).$$

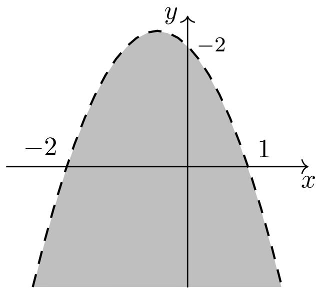
Domanda 5. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2+x+y<2$

✎

La disequazione equivale alla

$$y < -x^2 - x + 2 \quad \text{ossia} \quad y < -(x^2 + x - 2) \quad \text{ossia} \quad y < -(x+2)(x-1).$$

L'equazione corrispondente definisce la parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso, che interseca l'asse orizzontale in $x = -2$ oppure $x = 1$. La disequazione individua poi la regione di piano che sta al di sotto della parabola. La frontiera (i punti della parabola) non fanno parte della regione, raffigurata in grigio qui sotto.

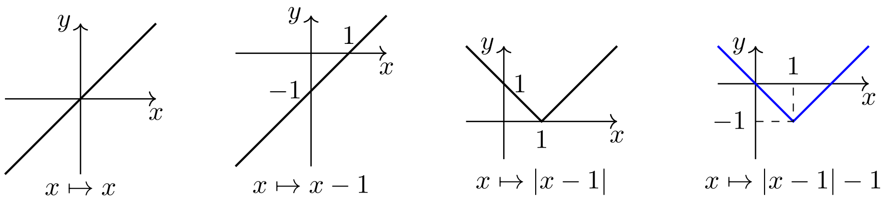


Domanda 6. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = |x-1| - 1$

✎

La sequenza di trasformazioni può essere questa:

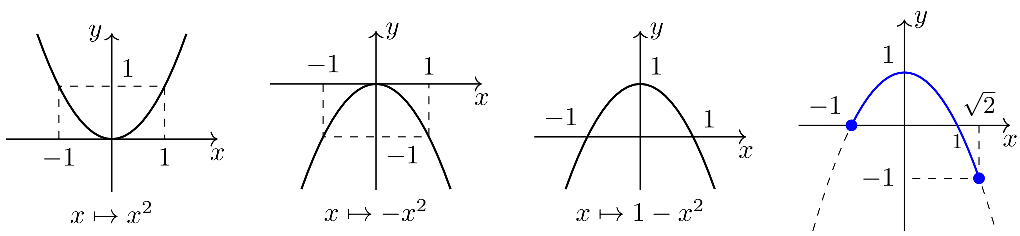
$$x \quad \to \quad x-1 \quad \to \quad |x-1| \quad \to \quad |x-1|-1.$$



Domanda 7. Dopo aver disegnato un grafico della funzione $f : [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = 1 - x^2$, si determinino il massimo e il minimo di f e i relativi punti di massimo e di minimo

✎

Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$, con le successive trasformazioni qui sotto riportate.



Dal grafico si rileva che:

$$\max f = 1, \text{ con punto di massimo } x_M = 0;$$

e

$$\min f = -1, \text{ con punto di minimo } x_m = \sqrt{2}.$$

Domanda 8. Si calcoli il $\lim_{x \to 0^-} \frac{x+1}{e^{1/x}}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\lim_{x \to 0^-} \frac{x+1}{e^{1/x}} = \frac{0+1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

✎

$$f'(x) = \frac{e^{1/x}(-\frac{1}{x^2}) \cdot x - e^{1/x} \cdot 1}{x^2} = -\frac{e^{1/x}}{x^3}(1+x).$$

Domanda 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{1}{4}$

✎

I punti stazionari sono i punti che annullano la derivata. Abbiamo $f'(x) = x^3 + 2x$ e quindi i punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

dato che l'equazione $x^2 + 2 = 0$ è impossibile.

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 11/11/2016

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$
si scriva l'espressione della funzione $f(\ln x)$. Si provi poi che f tende a zero per $x \to +\infty$. Si dimostri infine che f è trascurabile rispetto a $x^2 e^{-x}$ per $x \to +\infty$.

✎

L'espressione della funzione composta $f(\ln x)$ è questa:
$$f(\ln x) = \frac{\ln x}{e^{\ln x} + 1} = \frac{\ln x}{x + 1}.$$

Per quanto riguarda il limite di f si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x + 1} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x/e^x}{1 + e^{-x}} = \frac{0}{1+0} = 0,$$
ricordando che il numeratore tende a zero per il confronto standard tra la potenza e l'esponenziale.

Ma si poteva anche trascurare la costante a denominatore e concludere con il confronto standard. Oppure si poteva utilizzare il teorema di De L'Hôpital:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x + 1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Passiamo all'ultima domanda: dimostriamo che f è trascurabile rispetto a $x^2 e^{-x}$ per $x \to +\infty$. Anzitutto osserviamo che la funzione $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$ tende anch'essa a zero per $x \to +\infty$ (confronto standard potenza/esponenziale) e quindi si tratta di un confronto tra due infinitesimi. Occorre dimostrare che il limite del quoziente delle due funzioni è 0.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2 e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{e^x+1}}{x^2 e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x + 1} \cdot \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{+\infty} \cdot \frac{1}{1+0} = 0.$$

Si poteva anche fare:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(1 + e^x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + 1 + xe^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + e^{-x} + x} = \frac{1}{1 + 0 + \infty} = 0.$$

ESERCIZIO 2. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ -x^2 + x + 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$
se ne disegni un grafico, usando la geometria analitica o trasformazioni grafiche elementari. Si mostri che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$ e se ne verifichi la tesi. Si stabilisca infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 1]$ e, in caso affermativo, se ne verifichi la tesi.

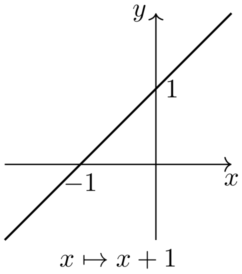
✎

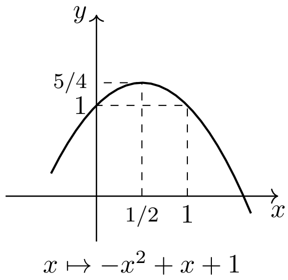
Nell'intervallo $[-1, 0]$ il grafico è una retta, nell'intervallo $(0, 1]$ una parabola con la concavità verso il basso. In realtà per disegnare la parabola basta osservare che essa passa per i punti $(0, 1)$ e $(1, 1)$ (e quindi necessariamente ha il vertice in un punto di ascissa $\frac{1}{2}$ e ordinata maggiore di 1). Possiamo anche procedere con il completamento del quadrato per avere tutte le informazioni.
$$y = -x^2 + x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -(x^2 - x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -(x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{5}{4}.$$

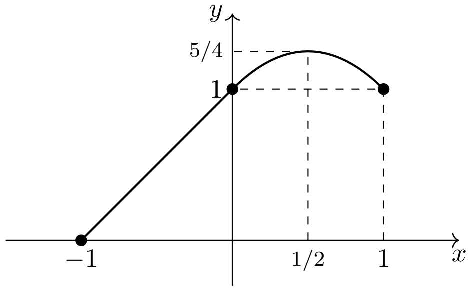
Quindi il vertice è nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

I grafici delle due funzioni che servono e il grafico di f sono riportati alla pagina successiva.

Il teorema di Weierstrass è applicabile se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato. L'intervallo $[-1, 1]$ è chiuso e limitato per definizione.







Per verificare la continuità di f in questo intervallo possiamo anzitutto affermare che f è certamente continua negli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, 1]$,[1] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con una funzione elementare (o somma/prodotto/quoziente/composta di funzioni elementari).

Nel punto $x = 0$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo però affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = 0$ da sinistra, in quanto in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione di primo grado. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione di primo grado, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione di secondo grado.

La continuità da destra è data dall'uguaglianza tra

$$f(0) = 0 + 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(- x^2 + x + 1\big) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Il teorema di Weierstrass è quindi applicabile (e siamo pertanto sicuri che vale la sua tesi). Verificare la tesi significa constatare che nell'esempio dato è vero quanto la tesi afferma.

La tesi del teorema di Weierstrass è che la funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$ ha un punto di massimo e un punto di minimo (globali). Dal grafico possiamo vedere che la tesi è verificata e che il punto di massimo è in $x_M = \frac{1}{2}$, con valore corrispondente $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ (massimo di f) e il punto di minimo è in $x_m = -1$, con valore corrispondente $f(-1) = 0$ (minimo di f).

Passiamo all'applicabilità del teorema di Lagrange. Le ipotesi sono che la funzione sia continua nell'intervallo $[-1, 1]$ (già verificato) e derivabile nei punti interni, cioè nell'intervallo $(-1, 1)$.

Quindi studiamo la derivabilità. In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, coincidendo con funzioni elementari. Sfruttando la derivabilità nei punti $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -2x + 1 & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo[2]

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(- 2x + 1\big) = 1.$$

Pertanto f è derivabile in $x = 0$, con $f'(0) = 1$, e quindi il teorema di Lagrange è applicabile. Verifichiamo dunque la tesi del teorema. Si tratta di provare che esiste un punto $c \in (-1, 1)$ in cui si ha

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

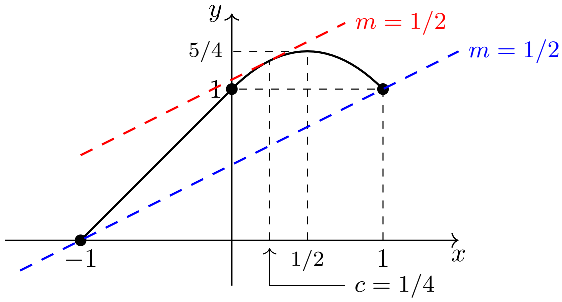
Evidentemente c non può stare nell'intervallo $(-1, 0]$, dato che qui la derivata vale 1. Cerchiamolo quindi nell'intervallo $(0, 1)$. L'equazione è pertanto

$$-2c + 1 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2c = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{4}.$$

La figura qui sotto illustra il significato del teorema.

[1] Metto in evidenza questo aspetto, a volte non così chiaro agli studenti: con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo $[-1, 0)$, cioè in tutti i punti x, con $-1 \le x < 0$ e nell'intervallo $(0, 1]$, e cioè in tutti i punti x, con $0 < x \le 1$ (agli estremi -1 ed 1 la continuità si intende rispettivamente da destra e da sinistra). Quindi non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda la continuità nel punto $x = 0$, che andrà studiato successivamente.

[2] Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra. Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.



ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x) = 2x + e^{-x}$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di f. Si scriva infine l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

✎

Non ci sono condizioni di esistenza per la funzione f e quindi il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$ e $+\infty$. Con l'algebra dei limiti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(2x + e^{-x}\Big) = +\infty + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty.$$

A $-\infty$ si ha invece

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \Big(2x + e^{-x}\Big) = -\infty + e^{+\infty} = -\infty + \infty,$$

che è una forma indeterminata. Possiamo fare

$$= \lim_{x\to-\infty} x\Big(2 + \frac{e^{-x}}{x}\Big) \text{ e osservare che il limite del quoziente è}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} \Big(\text{C.V. } -x = t\Big) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}}{-t} = -\infty \text{ (reciproco di un C.S.). Pertanto}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\Big(2 + \frac{e^{-x}}{x}\Big) = -\infty \cdot (2 - \infty) = +\infty.$$

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di f è

$$f'(x) = 2 - e^{-x}.$$

I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln 2.$$

Per studiare l'andamento della funzione, cioè dove essa cresce o decresce, studiamo il segno della derivata.

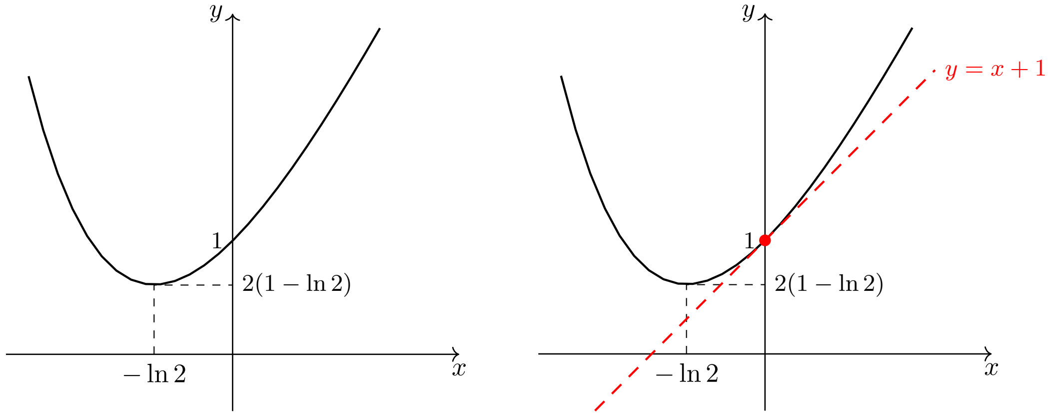
$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x < \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\ln 2.$$

Pertanto la funzione f è decrescente in $\big(-\infty, -\ln 2\big]$ e crescente in $\big[-\ln 2, +\infty\big)$. Quindi $x_m = -\ln 2$ è punto di minimo, e possiamo dire minimo globale.

Per disegnare un grafico più preciso, è utile calcolare

$$f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(-\ln 2) = -2\ln 2 + e^{\ln 2} = -2\ln 2 + 2 = 2(1 - \ln 2) \approx 0.61 > 0$$

In particolare è rilevante che il minimo di f sia positivo. Un possibile grafico di f è qui sotto a sinistra.



Infine l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$. L'equazione in generale è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e quindi nel nostro caso è

$$y = f(0) + f'(0)x.$$

Si ha $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2 - 1 = 1$. Pertanto l'equazione della retta tangente è

$$y = 1 + x.$$

La retta è tratteggiata in rosso nella figura sopra a destra.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 16/01/2017

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1+x+x\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1+x+x\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}+\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}+c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$

✎

Per parti

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c = e^x(x-1)+c$$

e quindi

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \Big(e^x(x-1)\Big|_0^1 = e\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 1.$$

Domanda 3. Calcolare la media integrale di e^{-x} nell'intervallo $[-1,1]$

✎

Ricordando che la media integrale di una funzione in un intervallo $[a,b]$ è $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, la media è

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(-e^{-x}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\Big(-e^{-1}+e\Big) = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

Domanda 4. Calcolare il prodotto vettore-matrice $\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare il prodotto interno (o scalare) dei due vettori $(-2,1,-1,3)$ e $(1,3,2,1)$

✎

$$\Big\langle(-2,1,-1,3)\ ,\ (1,3,2,1)\Big\rangle = (-2)\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 1 = -2+3-2+3 = 2.$$

Domanda 6. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

✎

Anzitutto il determinante della matrice è $-1\cdot(-2)-1\cdot(-1)=3$. La matrice dei complementi algebrici è

$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. La matrice aggiunta è $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. La matrice inversa è $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

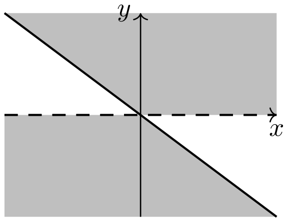
Domanda 7. Disegnare il dominio della funzione $f(x,y) = y\sqrt{\dfrac{x}{y}+1}$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{x}{y}+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{x+y}{y} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y \leq 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq -x \\ y < 0. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato in grigio qui sotto.



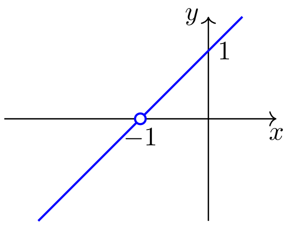
Domanda 8. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{x+1}{y}$

✎

La curva di livello 1 della funzione è l'insieme dei punti del piano in cui è verificata l'equazione

$$\frac{x+1}{y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{y} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1-y}{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1-y = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x+1 \\ y \neq 0. \end{cases}$$

La curva è raffigurata qui sotto. Attenzione che il punto $(-1,0)$ non fa parte della retta.



Domanda 9. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x,y) = -x^2 + 4xy - 2y^2$

✎

La matrice simmetrica della forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il minore principale di Nord Ovest di ordine 1 è -1; il minore principale di Nord Ovest di ordine 2 è -2. Essendoci un minore principale di ordine pari negativo la forma è indefinita.

Si poteva anche concludere osservando che ad esempio $Q(1,0) = -1 < 0$ e $Q(1,1) = 1 > 0$.

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = y\sqrt{\dfrac{x}{y}+1}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}+1}} \cdot \frac{1}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{\frac{x}{y}+1} + y\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}+1}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Il gradiente è poi $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 20/01/2017

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = x^2 e^{-x}$$
se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $[0,1]$. Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ converge o diverge.

✎

Per l'integrale indefinito si ha
$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2e^{-x} + 2\left(x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c.\end{aligned}$$
L'integrale di Riemann di f nell'intervallo $[0,1]$ è quindi dato da
$$\int_0^1 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big(- x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\Big|_0^1 = \big(- e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}\big) - \big(- 2\big) = 2 - \frac{5}{e}.$$
Passiamo all'integrale generalizzato. Abbiamo
$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{x^2e^{-x}}{x^3} = \frac{1}{xe^x}.$$
La funzione tende evidentemente a zero per $x \to +\infty$. Confrontiamola con la funzione $\frac{1}{x^2}$.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{(confronto standard)}.$$
Questo ci dice che la funzione integranda è trascurabile rispetto a $\frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$. Quindi, essendo quest'ultima integrabile, risulta che anche la nostra lo è. L'integrale allora converge.

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione lineare T rappresentata dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$
Si scriva l'espressione della trasformazione T. Si stabilisca se la trasformazione è invertibile. Si determini la dimensione e una base della sua immagine. Si dica se esiste almeno un vettore non banale (non nullo) in cui T si annulla e in caso affermativo se ne indichi uno.

✎

L'espressione della trasformazione T è data da
$$T\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3\\ -x_1 + x_3\\ x_1 - x_2\end{pmatrix}.$$

La trasformazione T è evidentemente definita in $\mathbb{R}^3$ e ha i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, quindi scriviamo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Per dire se T è invertibile basta calcolare il determinante della matrice A. Questo risulta (calcolo rispetto alla prima riga)

$$\det A = -1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Quindi T non è invertibile.

La dimensione della sua immagine è uguale al rango di A, che evidentemente non è 3. Possiamo affermare che è 2, dato che ad esempio il minore di Nord Ovest del secondo ordine vale 1.

Possiamo indicare una base dell'immagine di T scegliendo allora due colonne indipendenti della matrice A. Ad esempio le prime due colonne, coerentemente con il minore indicato in precedenza. Quindi possiamo scrivere che

$$\text{una base di } \mathrm{Im}T \text{ è } \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cerchiamo ora un vettore x non nullo tale che $T(x) = 0$, cioè

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \\ x_1 = x_2. \end{cases}$$

Il sistema è evidentemente possibile e una soluzione è, ad esempio, il vettore $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln x \cdot \sqrt{1 - e^{xy}}$$

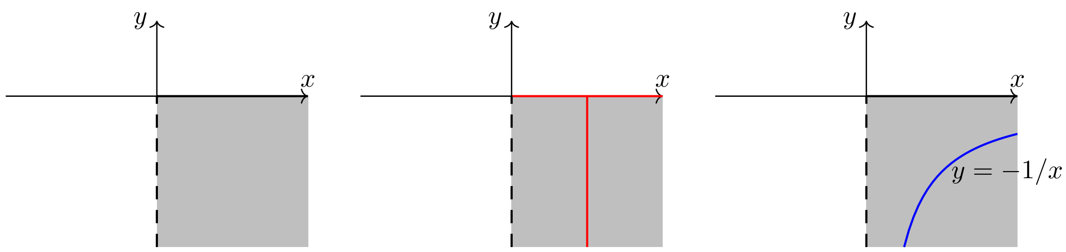
si determini e si disegni il suo dominio, precisando l'appartenenza o meno al domino dei punti di frontiera. Si determini e si disegni la curva di livello 0 di f. Si calcolino le derivate parziali di f. Si scriva infine l'espressione della restrizione di f alla curva di equazione $xy + 1 = 0$ con $x > 0$.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - e^{xy} \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ e^{xy} \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ xy \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Il dominio di f è quindi costituito sostanzialmente dal quarto quadrante del piano cartesiano, con la precisazione che i punti sull'asse x sono compresi (tranne l'origine), mentre i punti sull'asse y no. La raffigurazione è qui sotto a sinistra.



La curva di livello zero è formata dalle soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, cioè

$$\ln x \cdot \sqrt{1 - e^{xy}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \ \vee \ \sqrt{1 - e^{xy}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ e^{xy} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ xy = 0$$

La curva è rappresentata sopra al centro in rosso.

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}\sqrt{1 - e^{xy}} + \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{xy}}}\big(-e^{xy}\big)y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{xy}}}\big(-e^{xy}\big)x.$$

Infine la restrizione di f alla curva di equazione $xy + 1 = 0$ con $x > 0$. L'equazione si può esprimere equivalentemente con $y = -\frac{1}{x}$. La curva è rappresentata sopra a destra in blu. La restrizione è quindi

$$f\Big|_{y=-\frac{1}{x}} = f\left(x, -\frac{1}{x}\right) = \ln x \cdot \sqrt{1 - e^{-1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{e}}\, \ln x.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 16/01/2017

Domanda 1. Si dimostri che $\sqrt{2}$ e $(\sqrt{e})^{\ln 2}$ sono uguali

✎

$$\sqrt{2} = e^{\ln\sqrt{2}} = e^{\ln(2^{1/2})} = e^{\frac{1}{2}\ln 2} = \left(e^{1/2}\right)^{\ln 2} = \left(\sqrt{e}\right)^{\ln 2}.$$

Domanda 2. Nell'espressione $a^2b^{2/3} + a^{1/4}b^{-1/3}$ raccogliere $ab^{1/3}$ e se possibile semplificare

✎

$$a^2b^{2/3} + a^{1/4}b^{-1/3} = ab^{1/3}\left(\frac{a^2b^{2/3}}{ab^{1/3}} + \frac{a^{1/4}b^{-1/3}}{ab^{1/3}}\right) = ab^{1/3}\left(ab^{1/3} + a^{-3/4}b^{-2/3}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2\ln x - x^2\ln x = 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x > 0$. Poi l'equazione equivale a

$$\ln x\cdot(2-x^2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = 0 \ \vee\ x^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1 \ \vee\ x = \pm\sqrt{2}.$$

La soluzione negativa non è accettabile e quindi le soluzioni sono $x = 1 \ \vee\ x = \sqrt{2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$e^{-x^2} - \frac{1}{e} > 0$$

✎

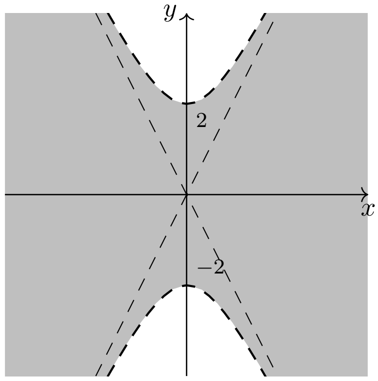
La disequazione equivale a

$$e^{-x^2} > e^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad -x^2 > -1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < x < 1.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - \dfrac{y^2}{4} + 1 > 0$

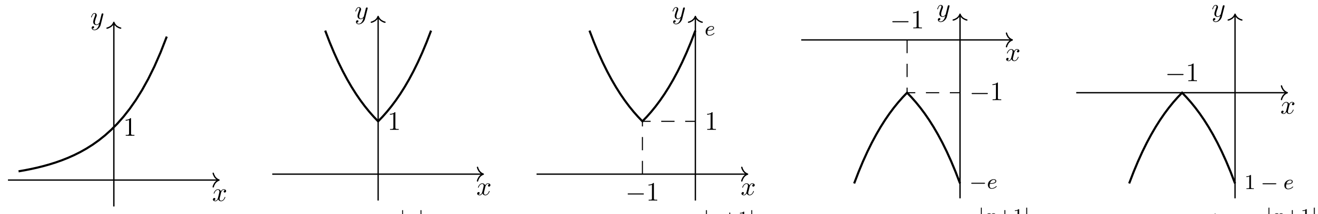
✎

L'equazione corrispondente $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ definisce un'iperbole di centro l'origine e rami che stanno al di sopra e al di sotto dell'origine. Dato che $a = 1$ e $b = 2$, gli asintoti hanno pendenze $m = \pm\frac{b}{a} = \pm 2$. La disequazione ha per soluzioni i punti che stanno nella parte di piano compresa tra i rami dell'iperbole, iperbole esclusa.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - e^{|x+1|}$

✎



$x \mapsto e^x$ $\quad x \mapsto e^{|x|}$ $\quad x \mapsto e^{|x+1|}$ $\quad x \mapsto -e^{|x+1|}$ $\quad x \mapsto 1 - e^{|x+1|}$

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1 - e^x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1 - e^x} = \dfrac{\ln(0^+)}{1 - e^{0^+}} = \dfrac{-\infty}{1 - 1^+} = \dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - e^x}$

✎

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - e^x) - \ln x(-e^x)}{(1 - e^x)^2}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int x e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int (-4x)e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + c.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = \dfrac{y^2}{1 - e^{xy}}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y^2}{(1 - e^{xy})^2} \cdot \big(-e^{xy}\big) \cdot y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(1 - e^{xy}) - y^2(-e^{xy}) \cdot x}{(1 - e^{xy})^2}.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 20/01/2017

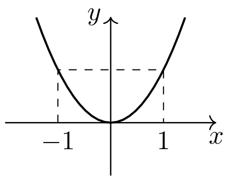
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x-1)^2 & x \le 1 \\ 1-\ln x & x > 1, \end{cases}$$

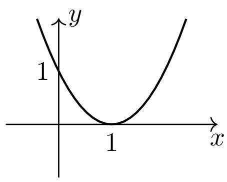
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ (si verifichi anche con la definizione se c'è la continuità nei punti critici). Sulla base del grafico si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = c$ al variare di c.

✎

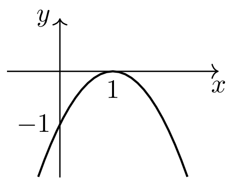
Le trasformazioni grafiche elementari della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.



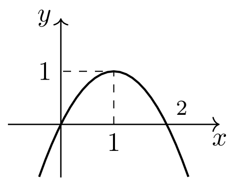
$x \mapsto x^2$



$x \mapsto (x-1)^2$

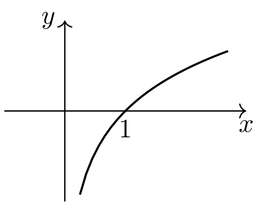


$x \mapsto -(x-1)^2$

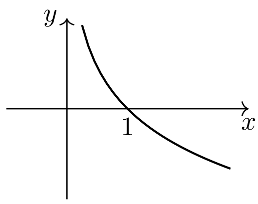


$x \mapsto 1-(x-1)^2$

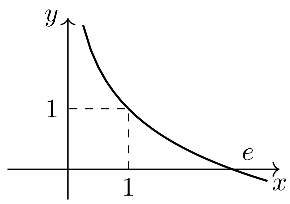
Le trasformazioni della funzione logaritmica sono riportate qui sotto.



$x \mapsto \ln x$

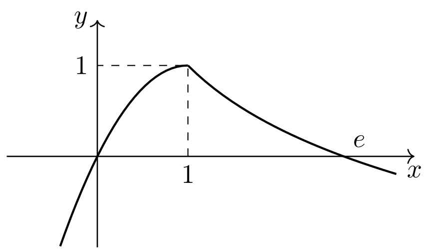


$x \mapsto -\ln x$



$x \mapsto 1-\ln x$

Il grafico della funzione f è pertanto quello qui sotto.



Studiamo la continuità della funzione. Possiamo affermare che f è certamente continua in ogni x diverso da 1, in quanto coincide in tutto un intorno di questi punti con trasformazioni di funzioni elementari.

Dobbiamo ora verificare la continuità solo in $x = 1$. Il grafico ci dice che f è continua in 1, ma è richiesta anche la verifica con la definizione. Possiamo affermare che f è continua da sinistra in 1, dato che in $x = 1$ e in un intorno sinistro di 1 coincide con un polinomio di secondo grado. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 1$ la funzione assume il suo valore attraverso il polinomio, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione logaritmica.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(1) = 1-(1-1)^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \big(1-\ln x\big) = 1-\ln 1 = 1.$$

La funzione è dunque continua in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla derivabilità. In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$, cioè per $x \neq 1$, dato che coincide con funzioni elementari in tutto un intorno di questi punti. Sfruttando la derivabilità nei punti $x \neq 1$ possiamo scrivere

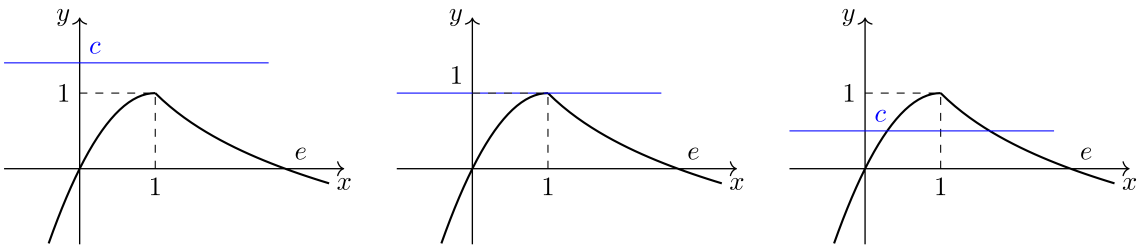
$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{se } x < 1 \\ -1/x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \big(-2(x-1)\big) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \Big(-\frac{1}{x}\Big) = -1.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = 1$.

L'ultima domanda è dire, sulla base del grafico, quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = c$ al variare di c. Possono aiutare i grafici seguenti, nei tre casi possibili relativi al valore di c.



Si vede allora che

- se $c > 1$ (caso di sinistra) l'equazione $f(x) = c$ non ha soluzioni;
- se $c = 1$ (caso al centro) l'equazione $f(x) = c$ ha una sola soluzione, che è $x = 1$;
- se $c < 1$ (caso di destra) l'equazione $f(x) = c$ ha due soluzioni, delle quali la seconda sempre positiva.

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

si scriva la matrice di rappresentazione di T. Si stabilisca se la trasformazione è invertibile. Si determini la dimensione e una base della sua immagine. Si dica se esiste almeno un vettore non banale (non nullo) in cui T si annulla e in caso affermativo se ne indichi uno.

✎

La trasformazione T è evidentemente definita in $\mathbb{R}^3$ e ha i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, quindi scriviamo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. La sua matrice di rappresentazione è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per dire se T è invertibile basta calcolare il determinante della matrice A. Questo risulta (calcolo rispetto alla prima riga)

$$\det A = -1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Quindi T non è invertibile.

La dimensione della sua immagine è uguale al rango di A, che evidentemente non è 3. Possiamo affermare che è 2, dato che ad esempio il minore di Nord Ovest del secondo ordine vale 1.

Possiamo indicare una base dell'immagine di T scegliendo allora due colonne indipendenti della matrice A. Ad esempio le prime due colonne, coerentemente con il minore indicato in precedenza. Quindi possiamo scrivere che

$$\text{una base di Im}T \text{ è} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cerchiamo ora un vettore $x \neq 0$ tale che $T(x) = 0$, cioè

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \\ x_1 = x_2. \end{cases}$$

Il sistema è evidentemente possibile e una soluzione è, ad esempio, il vettore $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln y \cdot \sqrt{e^{x+y} - 1}$$

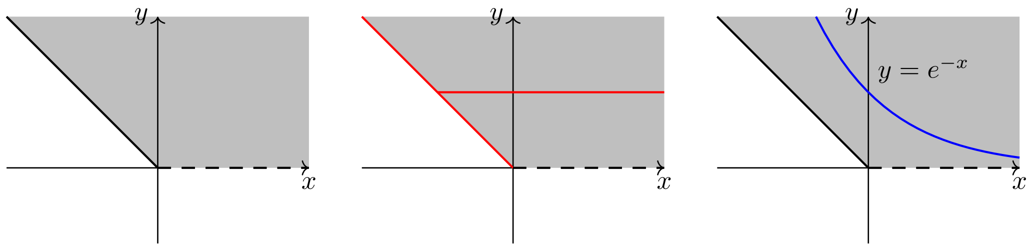
si determini e si disegni il suo dominio, precisando l'appartenenza o meno al domino dei punti di frontiera. Si determini e si disegni la curva di livello 0 di f. Si calcolino le derivate parziali di f. Si scriva infine l'espressione della restrizione di f alla curva di equazione $y - e^{-x} = 0$.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} y > 0 \\ e^{x+y} - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ e^{x+y} \geq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ y \geq -x. \end{cases}$$

Il dominio di f è raffigurato qui sotto a sinistra, con la precisazione che i punti sull'asse x non sono compresi, mentre i punti sulla bisettrice del secondo quadrante sì.



La curva di livello zero è formata dalle soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, cioè $\ln y \cdot \sqrt{e^{x+y} - 1} = 0$, che equivale a

$$\ln y = 0 \;\vee\; \sqrt{e^{x+y} - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \;\vee\; e^{x+y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \;\vee\; x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \;\vee\; y = -x.$$

La curva è rappresentata sopra al centro in rosso.

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{x+y} - 1}} \cdot e^{x+y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}\sqrt{e^{x+y} - 1} + \ln y \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{x+y} - 1}} \cdot e^{x+y}.$$

Infine la restrizione di f alla curva di equazione $y - e^{-x} = 0$. L'equazione si può esprimere equivalentemente con $y = e^{-x}$ ed è rappresentata sopra a destra in blu. La restrizione è quindi

$$f\Big|_{y=e^{-x}} = f\left(x, e^{-x}\right) = \ln(e^{-x}) \cdot \sqrt{e^{x+e^{-x}} - 1} = -x\sqrt{e^{x+e^{-x}} - 1}.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 03/02/2017

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln^2 x}{x}\right)\mathrm{d}x = \ln x + \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^e x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

✎

L'integrale indefinito è

$$\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c.$$

Quindi

$$\int_1^e x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4}.$$

Domanda 3. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ mediante la definizione

✎

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\big(-e^{-x}\big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\big(-e^{-b}+1\big) = 1.$$

Domanda 4. Dati i vettori $v^1 = (1,-1,2)$ e $v^2 = (-2,1,-1)$, scrivere la loro combinazione lineare $2v^1 - 3v^2$

✎

$$2v^1 - 3v^2 = 2(1,-1,2) - 3(-2,1,-1) = (2,-2,4) + (6,-3,3) = (8,-5,7).$$

Domanda 5. Calcolare il prodotto interno (o scalare) dei due vettori $(1,3,2,1)$ e $(-2,1,-1,3)$

✎

$$\big\langle (1,3,2,1)\ ,\ (-2,1,-1,3)\big\rangle = 1\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 = -2+3-2+3 = 2.$$

Domanda 6. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

✎

Anzitutto il determinante della matrice è $-1\cdot(-2) - 1\cdot(-2) = 4$. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice inversa è} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

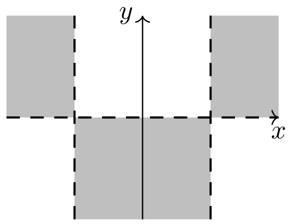
Domanda 7. Disegnare il dominio della funzione $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{y}\right)$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{x^2-1}{y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-1<0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \ \vee x>1 \\ y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ y<0. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato in grigio qui sotto.



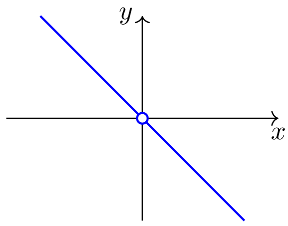
Domanda 8. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

✎

La curva di livello -1 della funzione è l'insieme dei punti del piano in cui è verificata l'equazione

$$\frac{x}{y} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y}+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{y}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=0 \\ y\neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=-x \\ y\neq 0. \end{cases}$$

La curva è raffigurata qui sotto. Attenzione che l'origine non fa parte della retta.



Domanda 9. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x,y) = -x^2+2xy-2y^2$

✎

La matrice simmetrica della forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il minore principale di Nord Ovest di ordine 1 è -1; il minore principale di Nord Ovest di ordine 2 è 1. La forma è quindi definita negativa.
Si poteva anche concludere osservando che $Q(x,y) = -(x-y)^2 - y^2$ e che la forma si annulla solo nell'origine.

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = x\ln\left(1+x\sqrt{y}\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln\left(1+x\sqrt{y}\right) + x\cdot\frac{1}{1+x\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\frac{1}{1+x\sqrt{y}}\cdot\frac{x}{2\sqrt{y}}.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 10/02/2017

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = xe^{2x}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $[0,1]$. Si calcoli infine, con la definizione, l'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✎

L'integrale indefinito si calcola per parti. Ricordando che $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + c$, si ha

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$$

Ora l'integrale di Riemann nell'intervallo $[0,1]$.

$$\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Concludiamo con l'integrale generalizzato.

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right|_b^0 = \lim_{b\to-\infty}\left(-\frac{1}{4} - \frac{b}{2}e^{2b} + \frac{1}{4}e^{2b}\right) = -\frac{1}{4}$$

ricordando che

$$\lim_{b\to-\infty} be^{2b} = (\text{c.v. } b=-x) = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^{2x}} = 0 \text{ (confronto standard)}.$$

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -x+y=3 \\ x-y-2z=1 \\ -2x+2y+2z=2. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema sono

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Il teorema di Rouché–Capelli afferma che il sistema ha almeno una soluzione se e solo se il rango di A è uguale al rango di $(A|b)$. Per determinare il rango di A possiamo fare in vari modi.

Si può calcolare il determinante di A, che risulta (rispetto alla prima riga)

$$\det A = -1\cdot 2 - 1\cdot(-2) = 0.$$

Oppure si può osservare che la terza riga è la differenza delle prime due. Questo permette di dire che le righe sono linearmente dipendenti e quindi che il rango di A non è 3. Possiamo dire che il rango di A è 2 in quanto ad esempio il minore (evidenziato in grigio) che si ottiene con le prime due righe e con le ultime due colonne è -2.

Possiamo poi concludere che il rango di $(A|b)$ è ugualmente 2, in quanto la terza riga continua ad essere la differenza delle prime due anche nella matrice completa.

Quindi, in base al teorema di Rouché–Capelli, possiamo affermare che il sistema $Ax = b$ ha almeno una soluzione.

Dobbiamo ora risolvere il sistema stesso. Si tratta di un sistema di tre equazioni e tre incognite con rango 2. Possiamo eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e avremo una variabile che diventa parametro. Avendo osservato che il rango è 2 grazie al minore che si ottiene con la prima e seconda riga e con la seconda e terza colonna, eliminiamo la terza equazione e trasformiamo in parametro la variabile x.

Il sistema equivalente è quindi

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ -y - 2z = 1 - x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 3 + x \\ 2z = -3 - x - 1 + x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 3 + x \\ z = -2. \end{cases}$$

Possiamo scrivere direttamente le soluzioni, che sono date dall'insieme

$$S = \Big\{(x, 3 + x, -2) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Scriviamo ora le soluzioni indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Basta "scomporre" il vettore soluzione in

$$(x, 3 + x, -2) = (0, 3, -2) + x(1, 1, 0),$$

e quindi $(0, 3, -2)$ è una soluzione particolare del sistema e

$$\Big\{x(1, 1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\}$$

sono le soluzioni del sistema omogeneo associato.

La dimensione di tale sottospazio di $\mathbb{R}^3$ è 1 (vi è un solo generatore indipendente) e una sua base è data dal vettore $(1, 1, 0)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

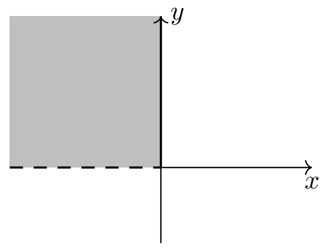
$$f(x, y) = \sqrt{1 - e^x} + \ln y$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se i punti di frontiera appartengono o no al dominio stesso. Si calcoli il gradiente di f e si dica se possono esserci punti stazionari. Si dica se il punto $(0, 1)$ sta sulla curva di livello 1 di f.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - e^x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \leq 1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y > 0. \end{cases}$$



Il dominio di f è quindi costituito sostanzialmente dal secondo quadrante del piano cartesiano, con la precisazione che i punti sull'asse x non sono compresi, mentre i punti sull'asse y sì (tranne l'origine). La raffigurazione è qui a fianco.

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^x}} \cdot (-e^x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{e^x}{2\sqrt{1 - e^x}} \ , \ \frac{1}{y}\right).$$

Non possono esistere punti stazionari, dato che la derivata parziale rispetto ad y non si annulla mai (nemmeno quella rispetto ad x peraltro).

Il punto $(0, 1)$ non sta sulla curva di livello 1 di f, dato che

$$f(0, 1) = \sqrt{1 - 1} + \ln 1 = 0.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 03/02/2017

Domanda 1. Per quali valori di x è definita l'espressione $\ln|x|$?

✎

La condizione di esistenza è

$$|x| > 0, \text{ che equivale a } x \neq 0.$$

Domanda 2. Nell'espressione $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2} + \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$ raccogliere $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ e se possibile semplificare

✎

$$\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2} + \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}} = x^{1/2}y^{2/3} + x^{3/2}y^{-1/2} = x^{1/2}y^{-1/2}\left(\frac{x^{1/2}y^{2/3}}{x^{1/2}y^{-1/2}} + \frac{x^{3/2}y^{-1/2}}{x^{1/2}y^{-1/2}}\right) =$$
$$= x^{1/2}y^{-1/2}\left(y^{2/3+1/2} + x^{3/2-1/2}\right) = x^{1/2}y^{-1/2}\left(y^{7/6} + x\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 1)\ln(x+1) = 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$. Poi l'equazione equivale a

$$x^2 - 1 = 0 \;\vee\; \ln(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \;\vee\; x+1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \;\vee\; x = 0.$$

La soluzione negativa non è accettabile e quindi le soluzioni sono $x = 0 \;\vee\; x = 1$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$e^{1-x} - \frac{1}{e^2} < 0$$

✎

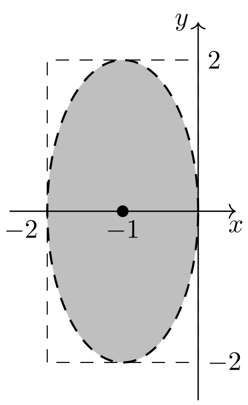
La disequazione equivale a

$$e^{1-x} < e^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 < 0$$

✎



L'equazione corrispondente $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ definisce un'ellisse di centro $(-1, 0)$ e semiassi $a = 1$, $b = 2$. La disequazione ha per soluzioni i punti interni all'ellisse. La regione è rappresentata in grigio qui a fianco.

Domanda 6. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^{-x}}{\ln(1 - \frac{1}{x})}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^{-x}}{\ln(1 - \frac{1}{x})} = \frac{1 + e^{-\infty}}{\ln(1 - \frac{1}{+\infty})} = \frac{1 + 0}{\ln(1 - 0^+)} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2$

✎

$$f'(x) = 2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

✎

Si tratta di un integrale quasi immediato. Per avere a numeratore la derivata del denominatore basta un segno meno. Quindi

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(1+e^{-x}\right) + c.$$

Non serve il valore assoluto sull'argomento del logaritmo, dato che l'argomento è comunque positivo.

Domanda 9. Calcolare il prodotto tra matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = y\ln\left(1+e^x\right) + e^{-y}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(1+e^x) - e^{-y}.$$

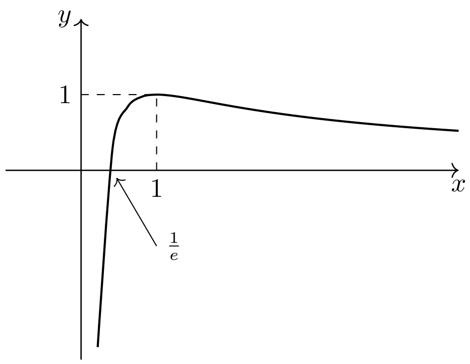
ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 10/02/2017

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$
si determini il suo dominio, il segno e i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f, si stabilisca dove la funzione è crescente/decrescente e si trovino eventuali punti di massimo/minimo. Se ne disegni quindi un possibile grafico. Utilizzando le trasformazioni elementari, si disegni infine il grafico della funzione $f(|x|) = \dfrac{1+\ln|x|}{|x|}$.

✎

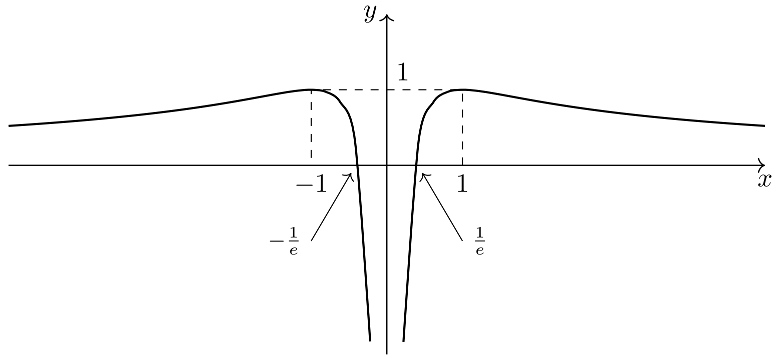
Le condizioni di esistenza per la funzione sono espresse dal sistema
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Studiamo dove la funzione è positiva (teniamo conto che x è positivo nel dominio).
$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\ln x}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{e}.$$
Quindi funzione f è positiva per $x > \frac{1}{e}$, si annulla in $x = \frac{1}{e}$ ed è negativa per $0 < x < \frac{1}{e}$.
I limiti significativi sono per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \frac{1+\ln 0^+}{x} = \frac{1-\infty}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$
e
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$
Calcoliamo la derivata.
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$
La derivata si annulla in $x = 1$, unico punto stazionario e possibile punto di massimo/minimo.
Studiamo il segno della derivata. Essa è positiva se e solo se
$$-\frac{\ln x}{x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln x}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1.$$
Pertanto la funzione f cresce in $(0,1)$ e decresce in $(1,+\infty)$. Quindi $x = 1$ è punto di massimo (globale).
Un possibile grafico della funzione f è pertanto quello qui sotto.



Infine disegniamo il grafico di $f(|x|)$ usando le trasformazioni grafiche elementari. Ricordo che la definizione di valore assoluto di x porta a scrivere:
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi il grafico cercato, detto a parole, è il seguente: per $x \geq 0$ coincide con il grafico di f, mentre per $x < 0$ è il grafico di $f(-x)$, che si ottiene per simmetria sulle x negative da quello che abbiamo sulle x positive. Quindi si ottiene quanto è raffigurato qui sotto.



ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y - 2z = 1 \\ -2x + 2y + 2z = 2. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema sono

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Il teorema di Rouché–Capelli afferma che il sistema ha almeno una soluzione se e solo se il rango di A è uguale al rango di $(A|b)$. Per determinare il rango di A possiamo fare in vari modi.

Si può calcolare il determinante di A, che risulta (rispetto alla prima riga)

$$\det A = -1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) = 0.$$

Oppure si può osservare che la terza riga è la differenza delle prime due. Questo permette di dire che le righe sono linearmente dipendenti e quindi che il rango di A non è 3. Possiamo dire che il rango di A è 2 in quanto ad esempio il minore (evidenziato in grigio) che si ottiene con le prime due righe e con le ultime due colonne è -2.

Possiamo poi concludere che il rango di $(A|b)$ è ugualmente 2, in quanto la terza riga continua ad essere la differenza delle prime due anche nella matrice completa.

Quindi, in base al teorema di Rouché–Capelli, possiamo affermare che il sistema $Ax = b$ ha almeno una soluzione.

Dobbiamo ora risolvere il sistema stesso. Si tratta di un sistema di tre equazioni e tre incognite con rango 2. Possiamo eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e avremo una variabile che diventa parametro. Avendo osservato che il rango è 2 grazie al minore che si ottiene con la prima e seconda riga e con la seconda e terza colonna, eliminiamo la terza equazione e trasformiamo in parametro la variabile x.

Il sistema equivalente è quindi

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ -y - 2z = 1 - x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 3 + x \\ 2z = -3 - x - 1 + x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 3 + x \\ z = -2. \end{cases}$$

Possiamo scrivere direttamente le soluzioni, che sono date dall'insieme

$$S = \Big\{ (x, 3 + x, -2) \ : \ x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Scriviamo ora le soluzioni indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Basta "scomporre" il vettore soluzione in

$$(x, 3 + x, -2) = (0, 3, -2) + x(1, 1, 0),$$

e quindi $(0, 3, -2)$ è una soluzione particolare del sistema e

$$\Big\{x(1, 1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\}$$

sono le soluzioni del sistema omogeneo associato.

La dimensione di tale sottospazio di $\mathbb{R}^3$ è 1 (vi è un solo generatore indipendente) e una sua base è data dal vettore $(1, 1, 0)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

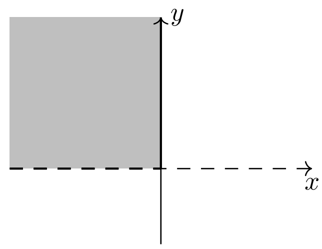
$$f(x, y) = \sqrt{1 - e^x} + \ln y$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se i punti di frontiera appartengono o no al dominio stesso. Si calcoli il gradiente di f e si dica se possono esserci punti stazionari. Si dica infine se il punto $(0, 1)$ sta sulla curva di livello 1 di f.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - e^x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \leq 1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y > 0. \end{cases}$$



Il dominio di f è quindi costituito sostanzialmente dal secondo quadrante del piano cartesiano, con la precisazione che i punti sull'asse x non sono compresi, mentre i punti sull'asse y sì (tranne l'origine). La raffigurazione è qui a fianco.

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^x}} \cdot (-e^x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{e^x}{2\sqrt{1 - e^x}} \ , \ \frac{1}{y} \right).$$

Non possono esistere punti stazionari, dato che la derivata parziale rispetto ad y non si annulla mai (nemmeno quella rispetto ad x peraltro).

Il punto $(0, 1)$ non sta sulla curva di livello 1 di f, dato che

$$f(0, 1) = \sqrt{1 - 1} + \ln 1 = 0.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 05/06/2017

Domanda 1. Per quali valori di x è definita l'espressione $\dfrac{x}{\log_2 x}$?

✎

L'espressione è definita se l'argomento del logaritmo è positivo e il denominatore non si annulla, quindi nelle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{cioè per } x \in (0,1) \cup (1, +\infty).$$

Domanda 2. Nell'espressione $e^{-x}\sqrt{x} + \dfrac{e}{\sqrt{x}}$ raccogliere $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ e semplificare

✎

$$e^{-x}\sqrt{x} + \frac{e}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(e^{-x}\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{e^{-x}} + \frac{e}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(x + e^{1+x}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\ln\left(x^2\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

✎

La condizione di esistenza è per il primo logaritmo $x \neq 0$ e per il secondo $x > 0$. Quindi la condizione di esistenza dell'equazione è $x > 0$. Poi, applicando la proprietà della somma di logaritmi, l'equazione equivale a

$$\ln\left(x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^2.$$

La soluzione è accettabile per le condizioni di esistenza.

Si poteva alternativamente usare la proprietà del logaritmo di una potenza e scrivere l'equazione di partenza come

$$\ln\left(x^2\right) + \ln\left(x^{-1}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln x - \ln x = 2, \text{ da cui, come prima, } \ln x = 2.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 + \frac{1}{x} > x$$

✎

La condizione di esistenza è $x \neq 0$. La disequazione equivale a

$$1 + \frac{1}{x} - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1 - x^2}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 1}{x} < 0.$$

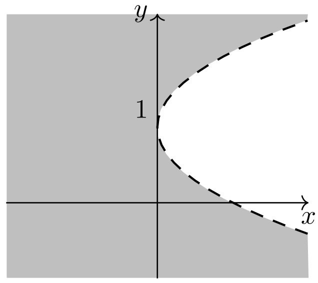
Quest'ultima equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - x - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

e questi a loro volta a

$$\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione
$x - (y-1)^2 < 0$



✎

La disequazione equivale a $x < (y-1)^2$. Dato che l'equazione corrispondente individua una parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso destra e vertice nel punto $(0,1)$, l'insieme delle soluzioni è dato dai punti che stanno a sinistra della parabola, parabola esclusa. La regione è rappresentata in grigio qui sotto.

Domanda 6. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{1-x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $$\lim_{x\to1^+} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{1-x} = \frac{\ln\left(1^+-1\right)}{1-1^+} = \frac{\ln\left(0^+\right)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^2 \ln\left(1-e^{-x}\right)$

✎

$$f'(x) = 2x\ln\left(1-e^{-x}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} \cdot e^{-x}.$$

Domanda 8. Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

✎

Risolviamo l'integrale $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x(1+x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$.

Si tratta di un integrale quasi immediato di una potenza. Per avere nell'integrale la derivata della funzione $1+x^2$ basta moltiplicare e dividere per 2. Quindi

$$\int x(1+x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2} + c = \sqrt{1+x^2} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Una primitiva è una qualunque di queste infinite funzioni, ad esempio $\sqrt{1+x^2}$.

Domanda 9. Scrivere un vettore non nullo ortogonale a $\left(1,2,3,4\right)$

✎

Si tratta di uno dei tanti vettori del tipo (x,y,z,t) tali che $x+2y+3z+4t=0$. Ad esempio possiamo indicare il vettore $(1,1,-1,0)$.

Domanda 10. Dire se la funzione $f(x,y) = x^2+y^2+x+3y$ ha punti stazionari nel primo quadrante

✎

Il gradiente della funzione f è $\nabla f(x,y) = \Big(2x+1, 2y+3\Big)$. Il gradiente si annulla soltanto nel punto $(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ che, avendo entrambe le componenti negative, sta nel terzo quadrante. Pertanto la funzione non ha punti stazionari nel primo quadrante.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 07/06/2017

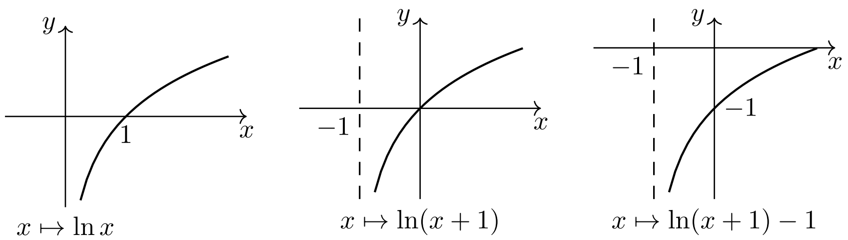
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) - 1 & -1 < x < 0 \\ -e^{-x} & x \geq 0, \end{cases}$$

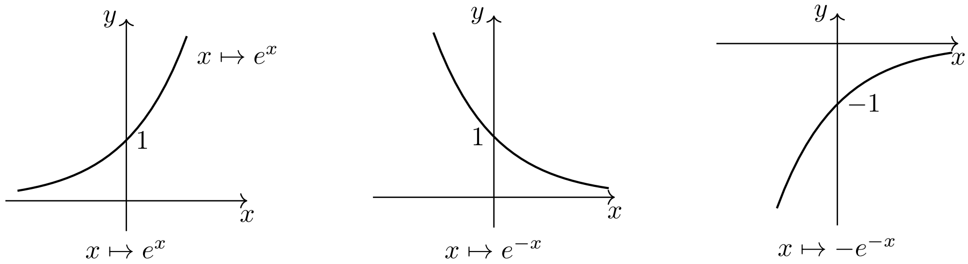
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si dica qual è l'immagine di f e se esistono punti di massimo o di minimo, Si dica poi se f è derivabile in $\big(-1, +\infty\big)$. Si calcoli infine l'integrale generalizzato di f nell'intervallo $[0, +\infty)$, cioè $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✎

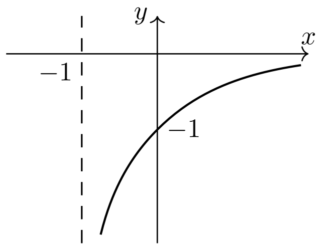
Le trasformazioni della funzione logaritmica sono le seguenti.



Le trasformazioni della funzione esponenziale sono le seguenti.



Pertanto il grafico della funzione f è il seguente.



Dal grafico ottenuto si vede che l'immagine di f è formata dai valori negativi, cioè dall'intervallo $(-\infty, 0)$. Si vede ancora che non esistono punti di massimo o di minimo, dato che la funzione è crescente in un intervallo aperto.

La continuità è evidente dal grafico. Studiamo allora la derivabilità. Possiamo affermare che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$, dato che coincide con funzioni elementari in tutto un intorno di questi punti. Resta da analizzare l'esistenza della derivata in $x = 0$. Sfruttando la derivabilità nei punti $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & -1 < x < 0 \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1+x} = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1.$$

Pertanto f è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 1$.

Calcoliamo infine l'integrale generalizzato.

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (-e^{-x})\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b (-e^{-x})\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-b} - 1\right) = -1.$$

ESERCIZIO 2. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio S generato dai vettori

$$v^1 = (0,-1,0,1) \quad , \quad v^2 = (-1,0,0,1) \quad , \quad v^3 = (1,-1,0,0).$$

Si dica, motivando adeguatamente la risposta, se v^1, v^2, v^3 sono una base di S. Successivamente si determini la dimensione di S. Indicata poi con A la matrice formata con i tre vettori disposti in riga e con T la trasformazione lineare associata alla matrice A, si dica se l'immagine di T coincide oppure no con $\mathbb{R}^3$. Si indichi infine una base di questa immagine di T.

✎

I vettori v^1, v^2, v^3 sono una base di S se e solo se sono linearmente indipendenti, dato che generatori del sottospazio S lo sono per definizione di sottospazio generato. Vi sono come sempre due modi per stabilire se i vettori sono l.i. oppure no, usare la definizione oppure usare le relazioni di questa proprietà con il rango della matrice formata con i vettori stessi. Usiamo questa seconda strada, più comoda. Con i tre vettori formiamo la matrice (richiesta anche più avanti)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ai fini del calcolo del rango può essere utile osservare che la prima riga è la somma delle altre due e quindi il rango di A non può essere massimo. Inoltre il rango è certamente 2, dato che ad esempio il minore che si ottiene con prima e seconda riga e prima e seconda colonna (evidenziato in grigio) è diverso da zero.

Si poteva alternativamente osservare che la matrice A ha una colonna di zeri e quindi l'unico minore di A che può essere diverso da zero è quello formato eliminando la terza colonna. Risulta però

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi il rango di A non può essere 3 ed è 2 per quanto osservato poco fa.

In conclusione i tre vettori, avendo rango 2, sono linearmente dipendenti e quindi non sono una base di S. La dimensione del sottospazio S da essi generato è uguale al rango della matrice A, e quindi possiamo dire che $\dim S = 2$.

Ora consideriamo la trasformazione lineare T associata alla matrice A. Ricordo che si tratta della trasformazione di espressione

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione T è definita in $\mathbb{R}^4$ e ha i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, quindi possiamo scrivere $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

È richiesto di dire se l'immagine di T coincide oppure no con $\mathbb{R}^3$. Dato che l'immagine di T ha dimensione uguale al rango di A, possiamo dire che questa immagine ha dimensione 2 e quindi non può essere tutto $\mathbb{R}^3$.

Una base dell'immagine di T è data da una coppia di colonne l.i. della matrice A. Coerentemente con il minore che ci ha permesso di dire che il rango è 2, possiamo affermare che le prime due colonne di A formano una base dell'immagine di T. Quindi

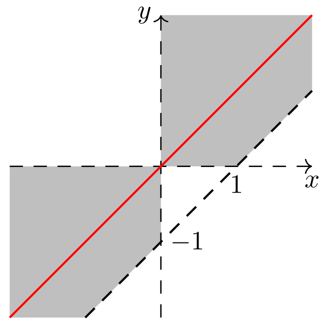
$$\text{una base di Im}T \text{ è} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\big(1+y-x\big),$$
si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. È vero che la funzione si annulla in tutti i punti del dominio che stanno sulla bisettrice del primo e terzo quadrante? Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari per la funzione. È vero che tutti i punti in cui la funzione si annulla sono stazionari?

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \ \wedge \ y \neq 0 \\ 1+y-x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y > x-1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ y > x-1. \end{cases}$$



Il dominio di f è quindi costituito dai punti del primo o terzo quadrante al di sopra della retta. L'insieme è aperto, cioè tutti i punti di frontiera non fanno parte del dominio. L'insieme è raffigurato in grigio è qui a fianco.

Per dire se è vero che la funzione si annulla in tutti i punti del dominio che stanno sulla bisettrice del primo e terzo quadrante basta scrivere la restrizione di f a tali punti, ricordando che l'equazione della bisettrice è $y = x$.

$$f\Big|_{y=x} = f(x,x) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) + \ln\big(1+x-x\big) = \ln 1 + \ln 1 = 0.$$

Quindi l'affermazione è vera.[3]

Calcoliamo il gradiente di f. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+y-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+y-x} = \frac{1+y-2x}{x(1+y-x)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1+y-x} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{1+y-x} = \frac{x-1}{y(1+y-x)}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+y-x}\left(\frac{1+y-2x}{x} \ , \ \frac{x-1}{y}\right).$$

Cerchiamo eventuali punti stazionari annullando le due derivate parziali. Possiamo scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} 1+y-2x = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ 1+y-2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(1,1)$ (accettabile nel dominio).

L'ultima domanda è se è vero che tutti i punti in cui la funzione si annulla sono stazionari. Prima abbiamo visto che f si annulla sulla bisettrice e quindi, dato che $(1,1)$ è l'unico punto stazionario, possiamo rispondere no alla domanda.

[3] Attenzione che la domanda, così posta, non significa se tutti *e soli* i punti in cui f si annulla sono quelli della bisettrice. La domanda si limita a chiedere se sulla bisettrice la funzione si annulla. La questione è importante dal punto di vista della soluzione, dato che se il significato fosse "tutti e soli" dovrei trovare tutte le soluzioni dell'equazione $f(x,y) = 0$, mentre così posso limitarmi a scrivere la restrizione.

Riporto comunque, anche se non richiesto la risoluzione completa dell'equazione $f(x,y) = 0$. L'equazione significa $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\big(1+y-x\big) = 0$, che equivale a

$$\ln\left[\frac{x}{y}(1+y-x)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\big(1+y-x\big) = y \quad \Leftrightarrow \quad x + xy - x^2 - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) - y(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)(x-y) = 0,$$

da cui si ricava che la funzione si annulla sulla bisettrice e sulla retta di equazione $x = 1$, ovviamente limitatamente ai punti che fanno parte del dominio.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 28/08/2017

Domanda 1. Per quali valori di x è definita l'espressione $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$?

✎

Le condizioni per l'esistenza dell'espressione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{cioè l'insieme } (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Domanda 2. Nell'espressione $\quad e^x\sqrt{x} + e^{-x}\sqrt[3]{x^2} \quad$ raccogliere $\quad e^x\sqrt[3]{x} \quad$ e semplificare

✎

$$e^x\sqrt{x} + e^{-x}\sqrt[3]{x^2} = e^x\sqrt[3]{x}\left(\frac{x^{1/2}e^x}{x^{1/3}e^x} + \frac{x^{2/3}e^{-x}}{x^{1/3}e^x}\right) = e^x\sqrt[3]{x}\left(x^{1/2-1/3} + x^{2/3-1/3}e^{-2x}\right) = e^x\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x}\,e^{-2x}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x^3 - x = 0$$

✎

$$x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\left(\ln x\right)^2 \leq 1$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. Poi la disequazione equivale a

$$-1 \leq \ln x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-1} \leq x \leq e \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

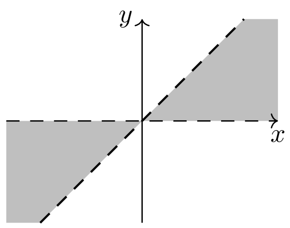
Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{x}{y} - 1 > 0$

✎

Con la condizione di esistenza $y \neq 0$, la disequazione equivale a

$$\frac{x-y}{y} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x - y < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y < x \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y > x \\ y < 0. \end{cases}$$

La regione è rappresentata in grigio qui sotto.



Domanda 6. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1-x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)}{1-x} = \frac{\ln\left(1^+ - 1^-\right)}{1-1^+} = \frac{\ln\left(0^+\right)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

✎

$$f'(x) = 2\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

✎

Si tratta di un integrale quasi immediato del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ con $f(x) = \ln x$. Si ha

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\big|\ln x\big| + c.$$

Domanda 9. Calcolare il prodotto tra matrici $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

✎

Con il prodotto righe per colonne si ha

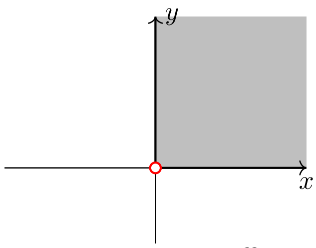
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2+y^2}$

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$



Le prime due definiscono il primo quadrante, compresi gli assi cartesiani. La terza condizione equivale a $(x,y) \neq (0,0)$ dato che l'unico modo per annullare la somma dei quadrati è che entrambi siano nulli. Quindi dal primo quadrante occorre escludere l'origine. La regione è raffigurata in grigio qui sopra.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 30/08/2017

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

si determini il suo dominio e si calcolino i limiti significativi. Si trovino i punti in cui la funzione si annulla. Si calcoli la derivata di f e si stabilisca dove la funzione è crescente/decrescente. Si disegni quindi un possibile grafico di f. Utilizzando le trasformazioni elementari si disegni infine il grafico della funzione $|f(x)| = \left|\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)\right|$.

✎

Le condizioni di esistenza per la funzione sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x - \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2-1}{x} > 0. \end{cases}$$

La disequazione equivale al doppio sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < 0. \end{cases}$$

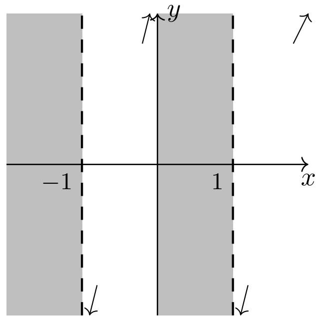
Le soluzioni sono per $x > 1$ oppure $-1 < x < 0$. Il dominio di f è quindi l'insieme $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

I limiti significativi sono pertanto: $(-1)^+$, 0^-, 1^+ e $+\infty$. Calcoliamoli.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(+\infty - \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(+\infty - 0) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to1^+} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1^+ - 1^-\right) = \ln\left(0^+\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to0^-} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(0^- - \frac{1}{0^-}\right) = \ln(0 + \infty) = +\infty.$$



Per ultimo quello che presenta una difficoltà. Sostituendo con l'algebra dei limiti si ottiene

$$\lim_{x\to(-1)^+} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln\left((-1)^+ - \frac{1}{(-1)^+}\right) = \ln\left((-1)^+ + 1^+\right)$$

e quindi l'argomento del logaritmo tende sicuramente a zero, ma non si può ancora stabilire che tipo di zero. In realtà però questo è un falso problema, o meglio un problema che si può agevolmente aggirare. Infatti, nel dominio sappiamo che l'argomento del logaritmo è positivo (lo abbiamo posto nelle condizioni di esistenza) e quindi, se l'argomento tende a zero, sicuramente è uno 0^+. Pertanto il limite a $(-1)^+$ è $-\infty$.

Ora i punti in cui la funzione si annulla. Poniamo

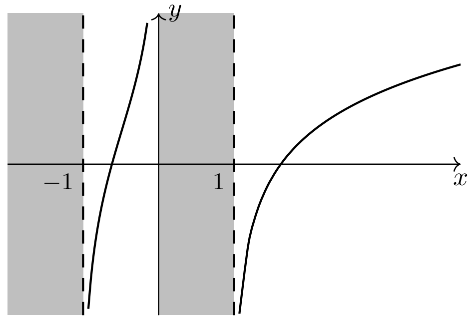
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sono $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ oppure $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Entrambi i valori appartengono agli intervalli che formano il dominio della funzione.[4]

Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Non conviene trasformare l'espressione della derivata: è più semplice studiare il suo segno attraverso l'espressione appena trovata. Infatti il termine tra parentesi è sempre strettamente positivo e anche la frazione è positiva dato che il denominatore era l'argomento del logaritmo. Pertanto possiamo affermare che $f'(x)$ è positiva per ogni x in cui esiste e che quindi la funzione f è crescente nell'intervallo $(-1, 0)$ e crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$.

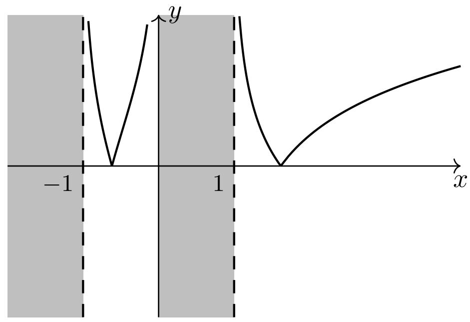


Un possibile grafico della funzione f è pertanto quello qui sotto.[5]

Infine disegniamo il grafico di $|f(x)| = \left|\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)\right|$. Sappiamo che il valore assoluto mantiene inalterati i valori positivi o nulli e cambia di segno quelli negativi. Ricordo che la definizione di valore assoluto di x porta a scrivere:

$$\left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Quindi il grafico cercato è quello raffigurato qui sotto.



ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Si determinino la dimensione e una base dell'immagine di T. Si dica se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ appartiene all'immagine di T. Che cosa possiamo dire sulla dipendenza delle righe della matrice di rappresentazione di T e sul sottospazio da esse generato?

✎

La trasformazione T è evidentemente definita in $\mathbb{R}^4$ e ha i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, quindi scriviamo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. La sua matrice di rappresentazione è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La dimensione dell'immagine di T è uguale al rango di A. Calcoliamolo.

Possiamo osservare che la terza colonna è la somma delle prime due. Possiamo quindi limitarci al solo calcolo del determinante della sottomatrice 3×3 che si ottiene eliminando la terza colonna. Si ha

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{(dalla terza riga) } 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) = 0.$$

[4]Infatti $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in (-1, 0)$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

[5]La forma del grafico nell'intervallo $(1, +\infty)$, cioè la sua concavità, non è deducibile da quanto trovato in precedenza, dato che non abbiamo studiato la derivata seconda. Ho ottenuto il grafico con un software che considera l'effettiva espressione di f e quindi fornisce il "vero" grafico. Un altro tipo di grafico, ad esempio prima concavo e poi convesso sarebbe stato comunque corretto in base ai risultati dei limiti e della derivata prima.

Possiamo dire allora che tutti i minori del terzo ordine sono nulli e che quindi il rango di A non è 3, ma 2, grazie ad esempio alla sottomatrice formata dalle prime due righe e prime due colonne (il minore corrispondente è -3).

Possiamo indicare una base dell'immagine di T scegliendo allora due colonne indipendenti della matrice A. Ad esempio le prime due colonne, coerentemente con il minore indicato in precedenza. Quindi possiamo scrivere che

$$\text{una base di Im}T \text{ è } \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cerchiamo ora di capire se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$, cioè il vettore $(1, 0, 0)$, appartiene all'immagine di T. Possiamo cercare di scriverlo come combinazione lineare dei due vettori che formano la base, e in questo modo trovare anche gli eventuali coefficienti della c.l., oppure possiamo limitarci a dire se dipende linearmente dai due vettori della base. In questo secondo caso basta calcolare il determinante

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\text{dalla terza colonna})\ 1.$$

Questo dice che il vettore fondamentale non dipende linearmente dagli altri due e quindi non sta nell'immagine di T.

Infine, sulla dipendenza delle righe della matrice di rappresentazione di T e sul sottospazio da esse generato possiamo affermare questo: dato che il rango di A è 2, le sue tre righe sono linearmente dipendenti e il sottospazio da esse generato è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

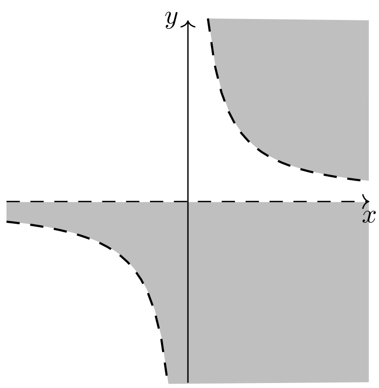
$$f(x, y) = \ln\left(x - \frac{1}{y}\right)$$

si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari per la funzione. Si determini per tentativi un punto del dominio in cui la funzione si annulla e si determinino infine tutti i punti in cui la funzione si annulla.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ x - \frac{1}{y} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{xy-1}{y} > 0. \end{cases}$$



La disequazione equivale al doppio sistema

$$\begin{cases} xy - 1 > 0 \\ y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} xy - 1 < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} xy > 1 \\ y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} xy < 1 \\ y < 0. \end{cases}$$

Ricordando che l'equazione $xy = 1$ definisce un'iperbole con centro nell'origine, asintoti dati dagli assi cartesiani e rami nel primo e terzo quadrante, il dominio di f è costituito dalla regione raffigurata in grigio qui a fianco.

Calcoliamo il gradiente di f. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - \frac{1}{y}} \cdot 1 = \frac{y}{xy - 1}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x - \frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{y}{xy - 1} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y(xy - 1)}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{xy - 1}\ ,\ \frac{1}{y(xy - 1)}\right) = \frac{1}{xy - 1}\left(y\ ,\ \frac{1}{y^2}\right).$$

Il gradiente non può annullarsi, dato che ad esempio non si annulla la seconda derivata parziale.[6]

[6]Non si può annullare nemmeno la prima, dato che nel dominio $y \neq 0$.

Ora dobbiamo determinare per tentativi un punto del dominio in cui la funzione si annulla, cioè un punto in cui

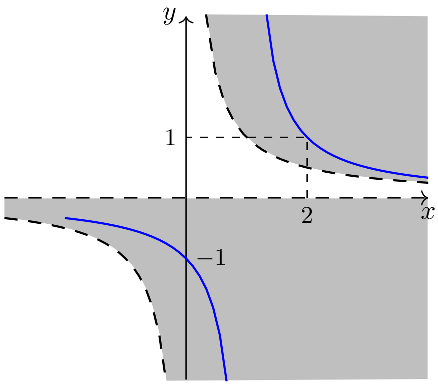
$$\ln\left(x - \frac{1}{y}\right) = 0 \quad \text{ossia} \quad x - \frac{1}{y} = 1.$$

Non è difficile osservare che con $x = 2$ e $y = 1$ l'equazione è soddisfatta. Anche con $x = 0$ e $y = -1$ e tanti altri.

Determiniamo infine tutti i punti in cui la funzione si annulla. Occorre trovare tutte le soluzioni dell'ultima equazione qui sopra. Si ha ad esempio

$$x - \frac{1}{y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)y = 1.$$ [7]

La geometria analitica dice che questa è l'equazione di un'iperbole di centro $(1, 0)$, asintoti dati dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$ e rami nei corrispondenti del primo e terzo quadrante. Non è difficile capire che si tratta dell'iperbole che formava la frontiera del dominio di f, traslata a destra di 1. Il tutto è raffigurato qui sotto.



[7] Si poteva equivalentemente trasformare l'equazione con

$$x - \frac{1}{y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x-1}$$

e ottenere l'iperbole con le trasformazioni grafiche elementari: l'espressione $\frac{1}{x-1}$ si ottiene dalla $\frac{1}{x}$ sostituendo $x - 1$ al posto di x e quindi si tratta di una traslazione a destra di 1 del grafico elementare di $\frac{1}{x}$.