# Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
# Anno Accademico 2017/18

**Alberto Peretti**

**Settembre 2018**

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 07/11/2017**

---

**Domanda 1**. Scomporre in fattori non più scomponibili il polinomio $x^7 - x^3$

✎

Con un raccoglimento di $x^3$ e successivamente con la scomposizione delle differenze di quadrati. Si ottiene

$$x^7 - x^3 = x^3(x^4 - 1) = x^3(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^3(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

**Domanda 2**. Nell'espressione $x \cdot 2^{-x} + \sqrt{x}\, 6^x$ raccogliere $\sqrt{x}\, 2^x$ e semplificare

✎

$$x \cdot 2^{-x} + \sqrt{x}\, 6^x = \sqrt{x}\, 2^x \left( \frac{x \cdot 2^{-x}}{\sqrt{x}\, 2^x} + \frac{\sqrt{x}\, 6^x}{\sqrt{x}\, 2^x} \right) = \sqrt{x}\, 2^x \left( \sqrt{x}\, 2^{-2x} + 3^x \right).$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$1 + \ln(1 + 3x) = 0$$

✎

Anzitutto dobbiamo scrivere la condizione di esistenza, che è $1 + 3x > 0$, cioè $x > -\frac{1}{3}$. Poi l'equazione equivale a

$$\ln(1 + 3x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 3x = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{e^{-1} - 1}{3} = \frac{1 - e}{3e}.$$

La soluzione è accettabile nell'insieme di esistenza poiché per questo valore l'argomento del logaritmo è uguale a $\frac{1}{e}$ e quindi positivo.

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$x - \frac{2}{x} > 1$$

✎

La condizione di esistenza è $x \neq 0$. Poi la disequazione equivale a

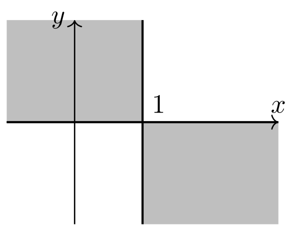
$$x - \frac{2}{x} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 2}{x} > 0.$$

Questa ora equivale al doppio sistema

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x < 0. \end{cases}$$

I valori che annullano il numeratore sono $-1$ oppure 2. Le soluzioni del primo sistema sono le $x > 2$, le soluzioni del secondo sono le $x$ comprese tra $-1$ e 0. Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da $S = (-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

**Domanda 5**. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy - y \leq 0$




✎

La disequazione equivale a

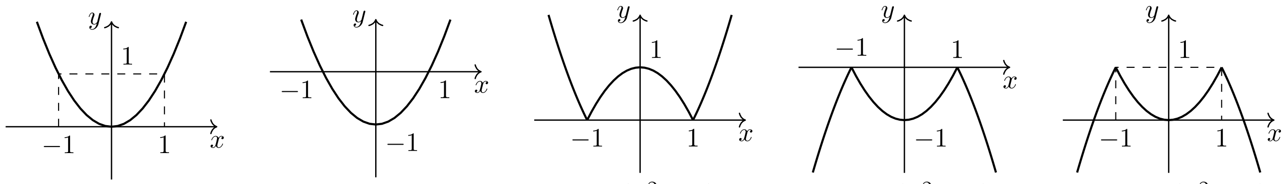
$$(x - 1)y \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

L'insieme è rappresentato qui a fianco in grigio.

**Domanda 6**. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - |x^2 - 1|$

✎

Ecco la sequenza delle trasformazioni.

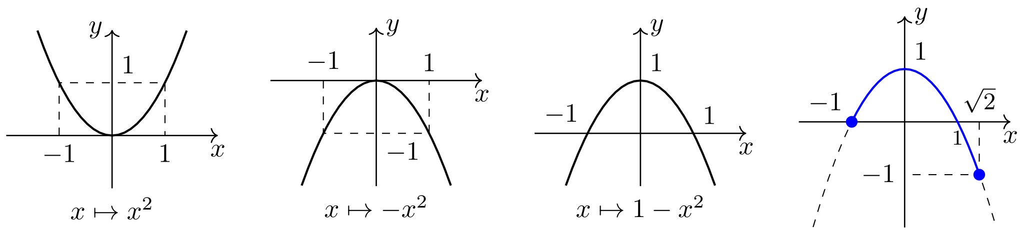


$x \mapsto x^2$ $\quad x \mapsto x^2 - 1$ $\quad x \mapsto |x^2 - 1|$ $\quad x \mapsto -|x^2 - 1|$ $\quad x \mapsto 1 - |x^2 - 1|$

**Domanda 7**. Si determinino il massimo e il minimo e i relativi punti di massimo e di minimo della funzione $f : [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = 1 - x^2$

✎

Conviene disegnare il grafico di $f$ nell'intervallo $[-1, \sqrt{2}]$. Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$, con le successive trasformazioni qui sotto riportate.



$x \mapsto x^2$ $\quad x \mapsto -x^2$ $\quad x \mapsto 1 - x^2$

Dal grafico si rileva che:

$$\max f = 1, \text{ con punto di massimo } x_M = 0;$$

e

$$\min f = -1, \text{ con punto di minimo } x_m = \sqrt{2}.$$

**Domanda 8**. Si calcoli il $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{-x}}{1 - x^2}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{-x}}{1 - x^2} = \frac{e^{-1}}{1 - 1^+} = \frac{1/e}{0^-} = -\infty.$$

**Domanda 9**. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x \ln\left(1 - x^2\right)$

✎

$$f'(x) = \ln\left(1 - x^2\right) + x \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x).$$

**Domanda 10**. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^3$

✎

I punti stazionari sono i punti che annullano la derivata. Abbiamo $f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x$ e quindi i punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione $3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 0$, che sono

$$x = 0 \ \vee \ (x^2 - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 07/11/2017**

---

**Domanda 1**. Scomporre in fattori non più scomponibili il polinomio $x^5 - x^9$

✎

Con un raccoglimento di $x^5$ e successivamente con la scomposizione delle differenze di quadrati. Si ottiene

$$x^5 - x^9 = x^5(1 - x^4) = x^5(1 - x^2)(1 + x^2) = x^5(1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

**Domanda 2**. Nell'espressione $\sqrt{x}\,6^x + x \cdot 3^{-x}$ raccogliere $\sqrt{x}\,3^x$ e semplificare

✎

$$\sqrt{x}\,6^x + x \cdot 3^{-x} = \sqrt{x}\,3^x \left( \frac{\sqrt{x}\,6^x}{\sqrt{x}\,3^x} + \frac{x \cdot 3^{-x}}{\sqrt{x}\,3^x} \right) = \sqrt{x}\,3^x \left( 2^x + \sqrt{x}\,3^{-2x} \right).$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$\ln(2x + 1) + 1 = 0$$

✎

Anzitutto dobbiamo scrivere la condizione di esistenza, che è $2x + 1 > 0$, cioè $x > -\frac{1}{2}$. Poi l'equazione equivale a

$$\ln(2x + 1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{e^{-1} - 1}{2} = \frac{1 - e}{2e}.$$

La soluzione è accettabile nell'insieme di esistenza poiché per questo valore l'argomento del logaritmo è uguale a $\frac{1}{e}$ e quindi positivo.

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$x - \frac{2}{x} > -1$$

✎

La condizione di esistenza è $x \neq 0$. Poi la disequazione equivale a

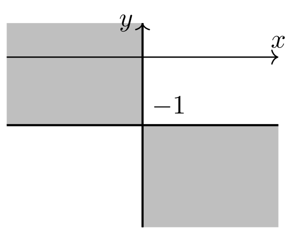
$$x - \frac{2}{x} + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + x - 2}{x} > 0.$$

Questa ora equivale al doppio sistema

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ x < 0. \end{cases}$$

I valori che annullano il numeratore sono $-2$ oppure $1$. Le soluzioni del primo sistema sono le $x > 1$, le soluzioni del secondo sono le $x$ comprese tra $-2$ e $0$. Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da $S = (-2, 0) \cup (1, +\infty)$.

**Domanda 5**. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + x \leq 0$




✎

La disequazione equivale a

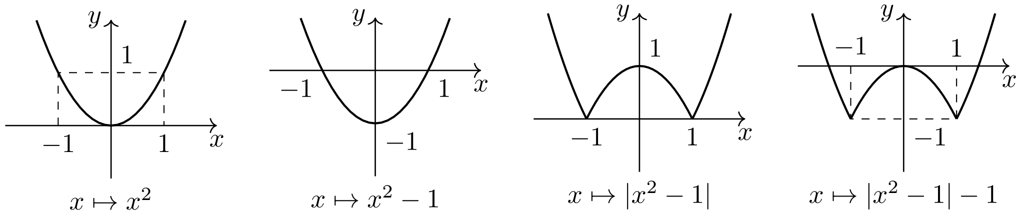
$$x(y+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y + 1 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq -1. \end{cases}$$

L'insieme è rappresentato qui a fianco in grigio.

**Domanda 6**. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 1| - 1$

✎

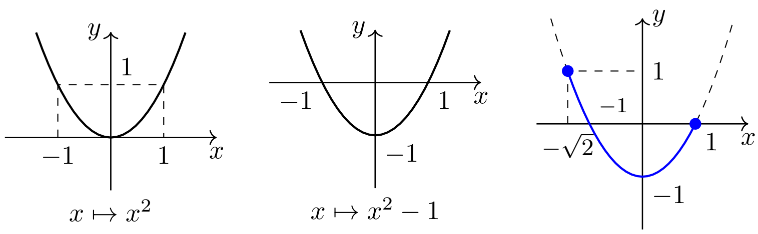
Ecco la sequenza delle trasformazioni.




**Domanda 7**. Si determinino il massimo e il minimo e i relativi punti di massimo e di minimo della funzione $f : \big[-\sqrt{2}, 1\big] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2 - 1$

✎

Conviene disegnare il grafico di $f$ nell'intervallo $\big[-\sqrt{2}, 1\big]$. Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$, con le successive trasformazioni qui sotto riportate.




Dal grafico si rileva che:

$$\max f = 1, \text{ con punto di massimo } x_M = -\sqrt{2};$$

e

$$\min f = -1, \text{ con punto di minimo } x_m = 0.$$

**Domanda 8**. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln x}{4 - x^2}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln x}{4 - x^2} = \frac{\ln 2}{4 - 4^+} = \frac{\ln 2}{0^-} = -\infty.$$

**Domanda 9**. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$

✎

$$f'(x) = \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

**Domanda 10**. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = \left(x^2 - 4\right)^3$

✎

I punti stazionari sono i punti che annullano la derivata. Abbiamo $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 \cdot 2x$ e quindi i punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione $3(x^2 - 4)^2 \cdot 2x = 0$, che sono

$$x = 0 \ \vee \ (x^2 - 4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 2 \ \vee \ x = -2.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 10/11/2017**

---

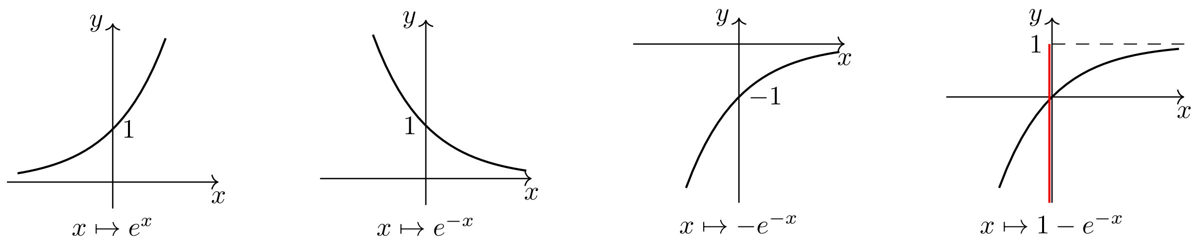
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

se ne disegni un grafico, servendosi delle trasformazioni elementari. Si determinino l'immagine di $f$, il $\sup f$, l'$\inf f$ e si dica se ci sono punti di massimo o di minimo. Si dimostri che $x$ è trascurabile rispetto a $f(x)$ per $x \to -\infty$. Si provi infine che la funzione $f(-\ln x)$ ha per grafico un retta.

✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono le seguenti.




Osservando il grafico possiamo affermare che l'immagine di $f$ è l'intervallo $(-\infty, 1)$ (indicato in rosso nella figura). L'estremo superiore di $f$ è il sup dell'immagine di $f$ e quindi $\sup f = 1$; l'estremo inferiore di $f$ è l'inf dell'immagine di $f$ e quindi $\inf f = -\infty$ (oppure possiamo dire che $f$ non è inferiormente limitata). Non ci sono punti di massimo o di minimo (la funzione è crescente).

La richiesta successiva è di dimostrare che $x$ è trascurabile rispetto a $f(x)$ per $x \to -\infty$.

Anzitutto osserviamo che la funzione $f$ tende a $x \to -\infty$ per $x \to -\infty$, come $x$. È quindi un confronto tra infiniti. Occorre dimostrare che il limite del quoziente delle due funzioni è 0. Calcoliamo quindi il

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Il risultato è quindi dimostrato. Anziché utilizzare il teorema di De l'Hôpital si poteva osservare che a denominatore la costante è trascurabile rispetto alla funzione esponenziale, che tende all'infinito. Quindi, per il principio di eliminazione, il limite è uguale a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-e^{-x}} = \Big(\text{c.v. } -x = t;\ x = -t\Big) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{-e^{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t}} = 0, \text{ in quanto confronto standard.}$$

Infine, proviamo che la funzione $f(-\ln x)$ ha per grafico un retta. Si ha

$$f(-\ln x) = 1 - e^{-(-\ln x)} = 1 - e^{\ln x} = 1 - x, \text{ e quindi è dimostrato.}$$

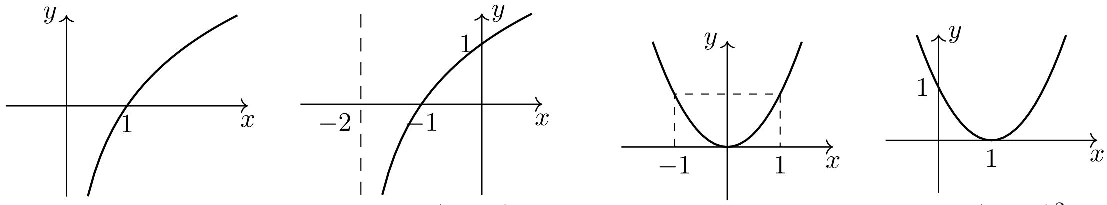
**ESERCIZIO 2**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2) & -1 \le x \le 0 \\ (x-1)^2 & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si provi che alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 2]$ e si verifichi, graficamente, la validità della tesi. Si stabilisca infine se ad $f$ è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 2]$.

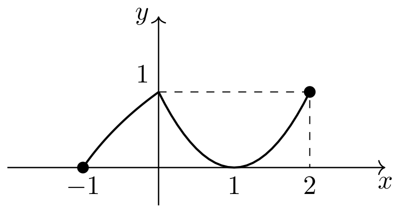
✎

Le trasformazioni della funzione logaritmica e della funzione polinomiale sono riportate nella pagina seguente.




$x \mapsto \log_2 x$ $\quad x \mapsto \log_2(x+2)$ $\quad x \mapsto x^2$ $\quad x \mapsto (x-1)^2$

Il grafico della funzione $f$ è quindi il seguente.




Proviamo che alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 2]$. Le ipotesi del teorema sono che la funzione sia anzitutto definita in un intervallo chiuso e limitato, cosa che nel nostro caso è vera per la definizione di $f$, che è definita nell'intervallo $[-1, 2]$.

Inoltre la funzione deve essere continua nell'intervallo. Possiamo affermare che $f$ è certamente continua negli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, 2]$, dato che in questi è una trasformazione di funzioni elementari. Occorre verificare la continuità in $x = 0$. Il grafico ci dice che $f$ è continua in 0, ma facciamolo con la definizione. Possiamo affermare che $f$ è continua da sinistra in 0, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione logaritmica. Quindi è sufficiente verificare la continuità in zero da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso il logaritmo, mentre a destra è una funzione polinomiale.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(0) = \log_2(0+2) = \log_2 2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)^2 = (0-1)^2 = 1.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo $[-1, 2]$ e pertanto il teorema di Weierstrass è applicabile.

Esso garantisce che la funzione $f$ ha massimo e minimo nell'intervallo $[-1, 2]$ e quindi esistono almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. La richiesta è di verificare questo graficamente, cioè sulla base del grafico che abbiamo ottenuto in precedenza.

Dal grafico possiamo affermare che il massimo di $f$ è il valore 1 e che ci sono due punti in cui la funzione assume questo valore, e cioè $x = 0$ e $x = 2$; il minimo di $f$ è il valore 0 e ci sono due punti in cui la funzione assume questo valore, e cioè $x = -1$ e $x = 1$.

Ultima domanda: stabilire se ad $f$ è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 2]$. Le ipotesi del teorema sono che la funzione sia definita e continua in un intervallo chiuso e limitato, e inoltre sia derivabile nei punti interni di questo. Nel nostro caso abbiamo già provato le prime ipotesi e resta da verificare l'ultima.

In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione $f$ è certamente derivabile negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 2)$, dato che in questi è trasformazione di funzioni elementari. Ricordando che $D \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)\ln 2} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2(x-1) & \text{se } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Pertanto si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(x+2)\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2} \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Pertanto $f$ non è derivabile in $x = 0$ e quindi il teorema di Lagrange non è applicabile.

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x) = 2x - \ln(x+1)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di $f$ e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di $f$. È vero che la retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante?

✎

La condizione per l'esistenza della funzione $f$ è data da $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$.

I limiti significativi sono pertanto $-1$ da destra e $+\infty$. Si ha, con l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \big(2x - \ln(x+1)\big) = -2 - \ln(-1 + (-1)^+) = -2 - \ln(0^+) = -2 - (-\infty) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(2x - \ln(x+1)\big) = +\infty - \ln(+\infty + 1) = +\infty - \ln(+\infty) = +\infty - \infty,$$

che è invece una forma indeterminata. Possiamo fare in molti modi. Il più semplice è trascurare l'infinito di tipo logaritmico.[1] Il limite è quindi $+\infty$. Alternativamente si poteva fare un raccoglimento

$$\lim_{x\to+\infty} \big(2x - \ln(x+1)\big) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right).$$

Ora il limite della frazione si può calcolare facilmente con il teorema di De l'Hôpital.[2]

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di $f$ è

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x+1}.$$

I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 - \frac{1}{x+1} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x+1} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x + 1 = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{1}{2}.$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione. Per studiare l'andamento della funzione, cioè dove essa cresce o decresce, studiamo il segno della derivata.

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 - \frac{1}{x+1} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x+2-1}{x+1} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x+1}{x+1} > 0.$$

Considerando che nel dominio il denominatore è positivo, la disequazione nel dominio equivale a $2x + 1 > 0$, cioè $x > -\frac{1}{2}$. Pertanto la funzione $f$ è decrescente in $\big(-1, -\frac{1}{2}\big]$ e crescente in $\big[-\frac{1}{2}, +\infty\big)$. Quindi $x_m = -\frac{1}{2}$ è punto di minimo, e possiamo dire di minimo globale.

Per disegnare un grafico più preciso, è utile calcolare

$$f(-\tfrac{1}{2}) = 2(-\tfrac{1}{2}) - \ln(-\tfrac{1}{2} + 1) = -1 - \ln\tfrac{1}{2} = -1 + \ln 2,$$

che è un valore negativo. Un possibile grafico di $f$ è riportato nella pagina seguente a sinistra.

L'ultima domanda è di verificare se la retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante. L'equazione della retta tangente in un punto di ascissa $x_0$ è in generale

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e quindi nel nostro caso è

$$y = f(0) + f'(0)x.$$

Si ha $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$ e $f'(0) = 2 - \frac{1}{0+1} = 1$. Pertanto l'equazione della retta tangente è

$y = x$, che è appunto la bisettrice del primo e terzo quadrante.

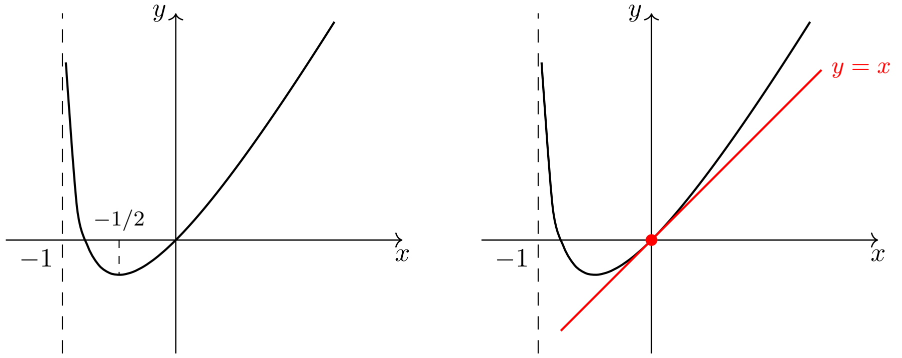
La retta tangente è tracciata in rosso nella figura a destra nella pagina seguente.

[1] Per essere rigorosi si dovrebbe provare che $\ln(x+1)$ è trascurabile rispetto a $2x$, cioè che $\frac{\ln(x+1)}{2x}$ tende a zero per $x \to +\infty$. Faccio notare che non si tratta di un confronto standard nella forma che abbiamo studiato, che è il confronto tra $\ln x$ e $x$. Possiamo fare così

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{2x} \Big(\text{c.v. } x+1 = t;\ x = t-1\Big) = \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t-1} \text{ equivalente a } \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

[2]

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x+1)}{1} = 0.$$


y
x
−1
−1/2
y
x
−1
y = x

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 10/11/2017**

---

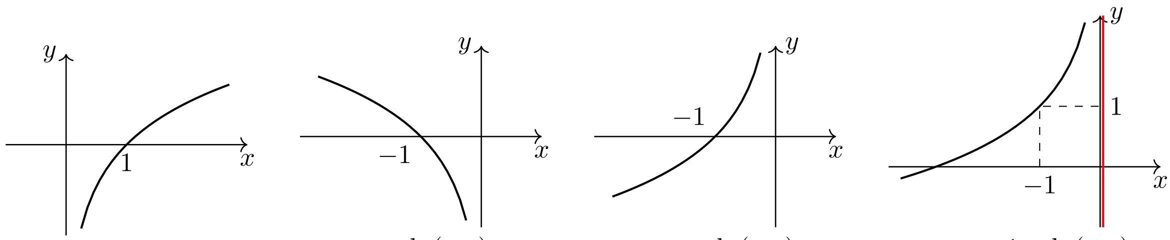
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = 1 - \ln(-x)$$

se ne disegni un grafico, servendosi delle trasformazioni elementari. Si determinino l'immagine di $f$, il $\sup f$, l'$\inf f$ e si dica se ci sono punti di massimo o di minimo. Si dimostri che $f(x)$ è trascurabile rispetto ad $x$ per $x \to -\infty$. Si provi infine che la funzione $f(-e^x)$ ha per grafico un retta.

✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione logaritmica sono le seguenti.




$x \mapsto \ln x$ $\qquad x \mapsto \ln(-x)$ $\qquad x \mapsto -\ln(-x)$ $\qquad x \mapsto 1 - \ln(-x)$

Osservando il grafico possiamo affermare che l'immagine di $f$ è l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, cioè tutto $\mathbb{R}$ (indicato in rosso nella figura). L'estremo superiore di $f$ è il sup dell'immagine di $f$ e quindi $\sup f = +\infty$ (oppure possiamo dire che $f$ non è superiormente limitata); l'estremo inferiore di $f$ è l'inf dell'immagine di $f$ e quindi $\inf f = -\infty$ (oppure possiamo dire che $f$ non è inferiormente limitata). Non ci sono punti di massimo o di minimo (la funzione è crescente).

La richiesta successiva è di dimostrare che $f(x)$ è trascurabile rispetto ad $x$ per $x \to -\infty$.

Anzitutto osserviamo che la funzione $f$ tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, come $x$. È quindi un confronto tra infiniti. Occorre dimostrare che il limite del quoziente delle due funzioni è 0. Calcoliamo quindi il

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\ln(-x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{-x}(-1)}{1} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{-\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Il risultato è quindi dimostrato. Anziché utilizzare il teorema di De l'Hôpital si poteva osservare che a numeratore la costante è trascurabile rispetto alla funzione logaritmica, che tende all'infinito. Quindi, per il principio di eliminazione, il limite è uguale a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\ln(-x)}{x} = \Big(\text{c.v. } -x = t;\ x = -t\Big) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0, \text{ in quanto confronto standard.}$$

Infine, proviamo che la funzione $f(-e^x)$ ha per grafico un retta. Si ha

$$f(-e^x) = 1 - \ln\big(-(-e^x)\big) = 1 - \ln(e^x) = 1 - x, \text{ e quindi è dimostrato.}$$

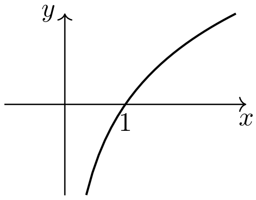
**ESERCIZIO 2**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x+1) & 0 \le x \le 1 \\ (x-2)^2 & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

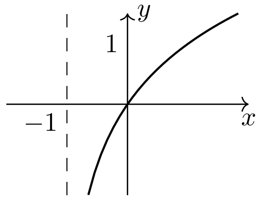
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si provi che alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0,3]$ e si verifichi, graficamente, la validità della tesi. Si stabilisca infine se ad $f$ è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,3]$.

✎

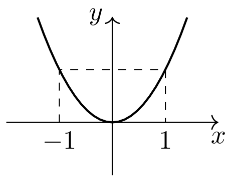
Le trasformazioni della funzione logaritmica e della funzione polinomiale sono riportate nella pagina seguente.



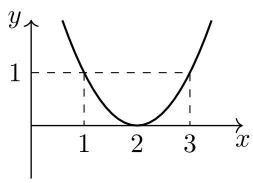

$x \mapsto \log_2 x$




$x \mapsto \log_2(x+1)$

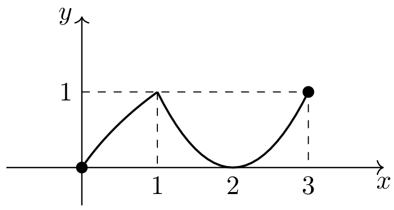



$x \mapsto x^2$




$x \mapsto (x-2)^2$

Il grafico della funzione $f$ è quindi il seguente.




Proviamo che alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0,3]$. Le ipotesi del teorema sono che la funzione sia anzitutto definita in un intervallo chiuso e limitato, cosa che nel nostro caso è vera per la definizione di $f$, che è definita nell'intervallo $[0,3]$.

Inoltre la funzione deve essere continua nell'intervallo. Possiamo affermare che $f$ è certamente continua negli intervalli $[0,1)$ e $(1,3]$, dato che in questi è una trasformazione di funzioni elementari. Occorre verificare la continuità in $x=1$. Il grafico ci dice che $f$ è continua in 1, ma facciamolo con la definizione. Possiamo affermare che $f$ è continua da sinistra in 1, dato che in $x=1$ e in un intorno sinistro di 1 coincide con la funzione logaritmica. Quindi è sufficiente verificare la continuità in 1 da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x=1$ la funzione assume il suo valore attraverso il logaritmo, mentre a destra è una funzione polinomiale.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(1) = \log_2(1+1) = \log_2 2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-2)^2 = (1-2)^2 = 1.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo $[0,3]$ e pertanto il teorema di Weierstrass è applicabile.

Esso garantisce che la funzione $f$ ha massimo e minimo nell'intervallo $[0,3]$ e quindi esistono almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. La richiesta è di verificare questo graficamente, cioè sulla base del grafico che abbiamo ottenuto in precedenza.

Dal grafico possiamo affermare che il massimo di $f$ è il valore 1 e che ci sono due punti in cui la funzione assume questo valore, e cioè $x=1$ e $x=3$; il minimo di $f$ è il valore 0 e ci sono due punti in cui la funzione assume questo valore, e cioè $x=0$ e $x=2$.

Ultima domanda: stabilire se ad $f$ è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,3]$. Le ipotesi del teorema sono che la funzione sia definita e continua in un intervallo chiuso e limitato, e inoltre sia derivabile nei punti interni di questo. Nel nostro caso abbiamo già provato le prime ipotesi e resta da verificare l'ultima.

In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione $f$ è certamente derivabile negli intervalli $(0,1)$ e $(1,3)$, dato che in questi è trasformazione di funzioni elementari. Ricordando che $D\log_2 x = \frac{1}{x\ln 2}$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)\ln 2} & \text{se } 0<x<1 \\ 2(x-2) & \text{se } 1<x<3. \end{cases}$$

Pertanto si ha

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x+1)\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2} \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2(x-2) = -2.$$

Pertanto $f$ non è derivabile in $x=1$ e quindi il teorema di Lagrange non è applicabile.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x) = \ln(x+1) - 2x$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di $f$ e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di $f$. È vero che la retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è la bisettrice del secondo e quarto quadrante?

✎

La condizione per l'esistenza della funzione $f$ è data da $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$.

I limiti significativi sono pertanto $-1$ da destra e $+\infty$. Si ha, con l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \big(\ln(x+1) - 2x\big) = \ln(-1 + (-1)^+) + 2 = \ln(0^+) + 2 = -\infty + 2 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(x+1) - 2x\big) = \ln(+\infty + 1) - \infty = \ln(+\infty) - \infty = +\infty - \infty,$$

che è invece una forma indeterminata. Possiamo fare in molti modi. Il più semplice è trascurare l'infinito di tipo logaritmico.[3] Il limite è quindi $-\infty$. Alternativamente si poteva fare un raccoglimento

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\ln(x+1) - 2x\big) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x+1)}{x} - 2\right).$$

Ora il limite della frazione si può calcolare facilmente con il teorema di De l'Hôpital.[4]

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di $f$ è

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 2.$$

I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x+1} - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x+1} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x + 1 = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{1}{2}.$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione. Per studiare l'andamento della funzione, cioè dove essa cresce o decresce, studiamo il segno della derivata.

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x+1} - 2 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1-2x-2}{x+1} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2x-1}{x+1} > 0.$$

Considerando che nel dominio il denominatore è positivo, la disequazione nel dominio equivale a $-2x - 1 > 0$, cioè $x < -\frac{1}{2}$. Pertanto la funzione $f$ è crescente in $\big(-1, -\frac{1}{2}\big]$ e decrescente in $\big[-\frac{1}{2}, +\infty\big)$. Quindi $x_M = -\frac{1}{2}$ è punto di massimo, e possiamo dire di massimo globale.

Per disegnare un grafico più preciso, è utile calcolare

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \ln(-\tfrac{1}{2} + 1) - 2(-\tfrac{1}{2}) = \ln\tfrac{1}{2} + 1 = 1 - \ln 2,$$

che è un valore positivo. Un possibile grafico di $f$ è riportato nella pagina seguente a sinistra.

L'ultima domanda è di verificare se la retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è la bisettrice del secondo e quarto quadrante. L'equazione della retta tangente in un punto di ascissa $x_0$ è in generale

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e quindi nel nostro caso è

$$y = f(0) + f'(0)x.$$

Si ha $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$ e $f'(0) = \frac{1}{0+1} - 2 = -1$. Pertanto l'equazione della retta tangente è

$y = -x$, che è appunto la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

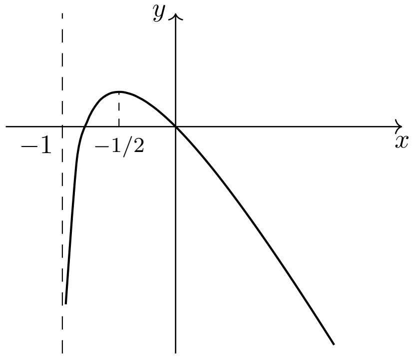
La retta tangente è tracciata in rosso nella figura a destra nella pagina seguente.

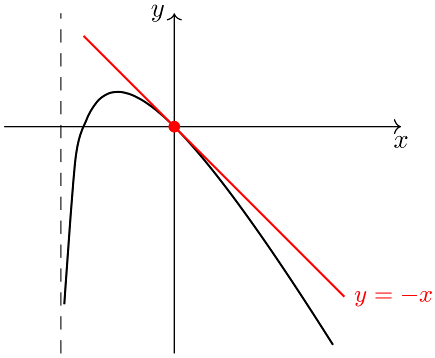
[3] Per essere rigorosi si dovrebbe provare che $\ln(x+1)$ è trascurabile rispetto a $2x$, cioè che $\frac{\ln(x+1)}{2x}$ tende a zero per $x \to +\infty$. Faccio notare che non si tratta di un confronto standard nella forma che abbiamo studiato, che è il confronto tra $\ln x$ e $x$. Possiamo fare così

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{2x} \Big(\text{c.v. } x+1 = t;\ x = t-1\Big) = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t-1} \text{ equivalente a } \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

[4]

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x+1)}{1} = 0.$$


$y$
$x$
$-1$
$-1/2$


$y$
$x$
$y = -x$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 15/01/2018**

---

**Domanda 1**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1+\sqrt{x}+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + 2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

**Domanda 2**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big(x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x\Big|_{-1}^{1} = \Big(-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = (-e^{-1}-e^{-1}) - (e-e) = -\frac{2}{e}.$$

**Domanda 3**. Calcolare il prodotto $A^T \cdot A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

✎

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 4**. Scrivere un vettore non nullo che sia ortogonale al vettore $(-2, 1, -1, 3)$

✎

Ad esempio il vettore $(1, 0, 1, 1)$, dato che $\langle (1,0,1,1), (-2,1,-1,3) \rangle = -2 - 1 + 3 = 0$.

**Domanda 5**. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

✎

Sviluppando i calcoli rispetto alla terza colonna, si ha $\det = -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) = 6$.

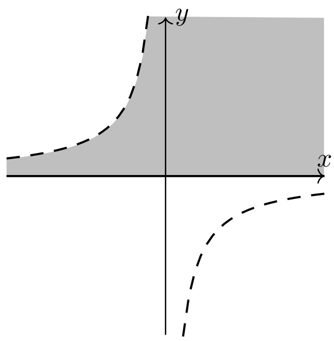
**Domanda 6**. Disegnare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{y} \cdot \ln\big(1 + xy\big)$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ xy + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ xy > -1. \end{cases}$$

Il dominio è raffigurato qui a fianco in grigio.



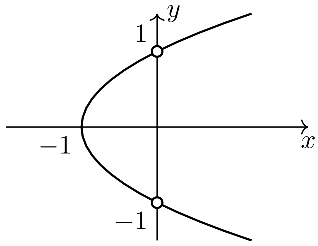

**Domanda 7**. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{y^2-1}{x}$

✎

La curva è data dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{y^2-1}{x} = 1 \text{ che, con } x \neq 0, \text{ equivale alla } y^2 - 1 = x.$$

Questa individua la parabola rappresentata qui sotto. Sono esclusi i punti sull'asse verticale.




**Domanda 8**. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -x^2 + xy - 2y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di NO della matrice sono $-1$ e $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, negativo quello di ordine dispari e positivo quello di ordine pari. Quindi la forma è definita negativa.

**Domanda 9**. Calcolare la derivata parziale rispetto ad $y$ della funzione $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \ln\big(1 + y^2\big)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot \frac{2y}{1 + y^2}.$$

**Domanda 10**. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2y + x - y$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy + 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -1/(2x) \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

I punti stazionari sono quindi i due punti $(1, -\frac{1}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2})$.

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 19/01/2018**

---

**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = x^2 \ln x$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si calcoli poi l'integrale di $f$ nell'intervallo $[1, \sqrt[3]{e}]$. Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

✎

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

L'integrale di $f$ nell'intervallo $[1, \sqrt[3]{e}]$ è dato da

$$\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right|_1^{\sqrt[3]{e}} = \left(\frac{e}{3}\ln\sqrt[3]{e} - \frac{e}{9}\right) - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}.$$

Vediamo ora l'integrale generalizzato.

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{x^2\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Possiamo concludere che l'integrale diverge osservando che nell'intervallo $(1, +\infty)$ si ha, definitivamente, $\frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x}$.[5] Dato che l'integrale generalizzato di $\frac{1}{x}$ diverge, allora diverge anche il nostro.[6]

**ESERCIZIO 2**. Dati i tre vettori

$$v^1 = (0, 1, -1) \quad , \quad v^2 = (-1, 0, 1) \quad , \quad v^3 = (1, -1, 0)$$

si dica se sono generatori di $\mathbb{R}^3$ e se formano una base di $\mathbb{R}^3$. Si determini la dimensione del sottospazio $S$ di $\mathbb{R}^3$ da essi generato. Si dica se il vettore $(-18, 17, 1)$ appartiene o no ad $S$. Si dica infine se $S$ contiene uno dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$.

✎

La prima domanda si può affrontare in modi diversi. Un modo potrebbe essere quello che utilizza la definizione dei due concetti di vettori generatori e di base di uno spazio vettoriale. Ne parlo brevemente, anche se non è questo il modo più conveniente per rispondere. I tre vettori dati sono generatori di $\mathbb{R}^3$ se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come loro combinazione lineare. Sono una base se, oltre ad essere generatori, sono anche linearmente indipendenti. Per verificare la prima proprietà occorre verificare se, preso un qualunque vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si può scrivere

$$(x, y, z) = a(0, 1, -1) + b(-1, 0, 1) + c(1, -1, 0) \quad \text{per qualche scelta dei coefficienti } a, b, c.$$

L'equazione vettoriale equivale alla

$$(x, y, z) = (-b + c, a - c, -a + b)$$

e questa equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} -b + c = x \\ a - c = y \\ -a + b = z \end{cases} \quad \text{nelle variabili (attenzione!) } a, b, c.$$

---

[5] Ricordo che *definitivamente* significa "da un certo punto in poi". Nel nostro caso abbiamo che $\ln x > 1$ per $x > e$.

[6] Si poteva anche calcolare l'integrale generalizzato con la definizione, dato che siamo in grado di calcolare una primitiva della funzione integranda:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln^2 b}{2} = +\infty.$$

Si tratta di stabilire se è vero oppure no che per ogni scelta di $x, y, z$ il sistema ha soluzioni. È un sistema quadrato e non sarebbe così difficile rispondere se il determinante della matrice delle variabili fosse diverso da zero.[7] Purtroppo il determinante è nullo e quindi le cose non sono così semplici per questa via.[8]

Il modo più conveniente per affrontare le prime due domande è però quello di utilizzare il concetto di rango e le tante informazioni che esso può dare. Costruiamo con i tre vettori la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di $V$ ci dice subito se i vettori sono dipendenti o indipendenti e ci fornisce la dimensione del sottospazio da essi generato. Il determinate di $V$ è nullo e il minore principale di NO del secondo ordine è 1. Quindi il rango di $V$ è 2. Pertanto possiamo dire che i vettori non sono una base, in quanto dipendenti e che non sono nemmeno generatori di $\mathbb{R}^3$, dato che il sottospazio $S$ da essi generato ha dimensione 2.

Anche per stabilire se il vettore $v = (-18, 17, 1)$ appartiene o no ad $S$ ci sono vari modi. Si può cercare di scrivere questo vettore $v$ come combinazione lineare dei tre vettori dati, ma c'è un modo più veloce: basta identificare una base di $S$ (non servono tutti e tre i vettori, ne bastano due) e stabilire se il vettore $v$ dipende o no dai due vettori di base, con il solo calcolo di un determinante.

Una base di $S$ è data da due righe indipendenti della matrice $V$, quindi ad esempio da $v^1$ e $v^2$, dato che, come già osservato, il minore principale di NO del secondo ordine è diverso da zero. Ora basta formare la matrice con righe $v^1$, $v^2$ e $v$ e calcolare il suo determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -18 & 17 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1 + 18) - 1 \cdot (-17) = -17 + 17 = 0.$$

Questo ci dice che il vettore $v$ dipende dagli altri due (si ricordi che $v^1$ e $v^2$ sono indipendenti). Quindi $v$ appartiene al sottospazio $S$.

Per dire infine se $S$ contiene uno dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ si può seguire un procedimento analogo a quello appena visto. Basta considerare le tre matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove ho posto come terza riga i tre vettori fondamentali, e calcolare i tre determinanti. Si trova che sono tutti e tre uguali a 1. Quindi i tre vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ sono indipendenti da $v^1$ e $v^2$ e pertanto $S$ non contiene nessuno dei vettori fondamentali.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 - xy}$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si trovi l'espressione di $f$ lungo gli assi cartesiani. Si dica infine se l'origine è punto stazionario per la funzione $f$.

✎

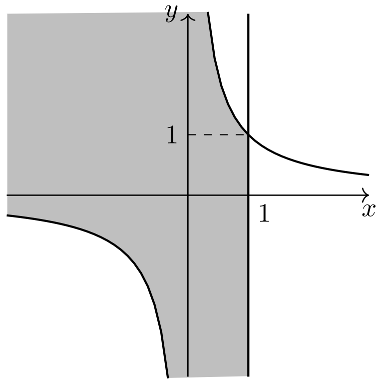
Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono espresse dal sistema

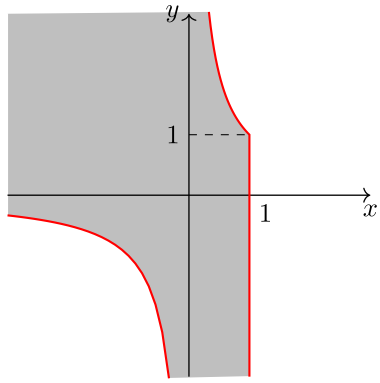
$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 - xy \geq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ xy \leq 1. \end{cases}$$

Il dominio di $f$ è rappresentato alla pagina seguente a sinistra, con la precisazione che tutti i punti di frontiera appartengono al dominio. Quindi l'insieme è chiuso.

[7] In questo caso infatti sarebbe un "sistema di Cramer" (sistema quadrato con determinante diverso da zero) e quindi in base al teorema di Cramer avremmo una sola soluzione qualunque sia il vettore dei termini noti.

[8] Si intuisce forse che, dato che la scelta di $x, y, z$ è arbitraria, è possibile fare in modo che il rango della matrice completa del sistema sia 3 a fronte di un rango della matrice incompleta che è 2. La conseguenza è che il sistema non sempre è possibile e quindi che i tre vettori non sono generatori di $\mathbb{R}^3$.




La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-xy}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-x=0 \quad \vee \quad 1-xy=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=1 \quad \vee \quad xy=1.$$

Si tratta dei punti di frontiera del dominio, raffigurati in rosso nella figura qui sopra a destra.

L'espressione di $f$ lungo gli assi cartesiani è data da

$$f(x,y)\Big|_{y=0}=\sqrt{1-x} \qquad \text{e} \qquad f(x,y)\Big|_{x=0}=1.$$

Ultima domanda: stabilire se l'origine è punto stazionario per la funzione. La derivata parziale di $f$ rispetto ad $y$ (più semplice dell'altra) è:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{1-x}\cdot\frac{-x}{2\sqrt{1-xy}} \quad \text{e si ha} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Siamo costretti a calcolare anche l'altra derivata:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\cdot\sqrt{1-xy}+\sqrt{1-x}\cdot\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}}.$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-\frac{1}{2} \quad \text{e quindi l'origine non è un punto stazionario.}$$

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 15/01/2018**

---

**Domanda 1**. Nell'espressione $x\sqrt[3]{y}+\sqrt{x^3}y$ raccogliere $xy$ e se possibile semplificare

✎

$$x\sqrt[3]{y}+\sqrt{x^3}y = xy\left(\frac{xy^{1/3}}{xy}+\frac{x^{3/2}y}{xy}\right) = xy\left(y^{1/3-1}+x^{3/2-1}\right) = xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+\sqrt{x}\right).$$

**Domanda 2**. Semplificare l'espressione $2\ln\left(e\sqrt{e}\right)-\log_3\frac{1}{3}$

✎

$$2\ln\left(e\sqrt{e}\right)-\log_3\frac{1}{3} = 2\ln e^{3/2}-(-1) = 2\cdot\frac{3}{2}+1 = 3+1 = 4.$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$\log_2\left(1-x^2\right)+1=0$$

✎

L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \text{ (C.E.)} \\ \log_2\left(1-x^2\right)=-1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2<1 \\ 1-x^2=\frac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -1<x<1 \\ x^2=\frac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$x\big(1-e^{-x}\big)>0$$

✎

La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-e^{-x}>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ 1-e^{-x}<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ e^{-x}<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ e^{-x}>1 \end{cases}$$

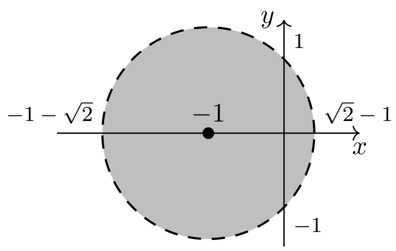
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ -x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ -x>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<0. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $x<0$ oppure $x>0$, cioè $x\neq 0$.

**Domanda 5**. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $(x+1)^2+y^2-2<0$

✎

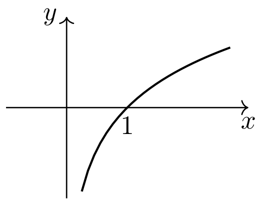
La disequazione equivale a $(x+1)^2+y^2<2$, e quindi si tratta dei punti interni al cerchio di centro $(-1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, rappresentato in grigio a fianco.



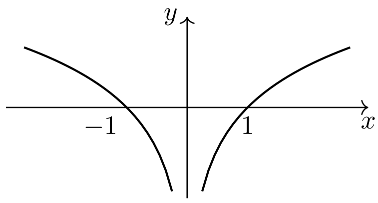

**Domanda 6**. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x)=-\ln|x+1|$

✎

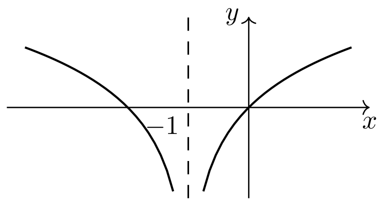
Le trasformazioni sono riportate alla pagina seguente.



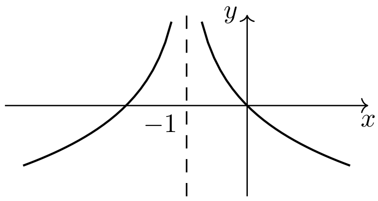

$x \mapsto \ln x$




$x \mapsto \ln|x|$




$x \mapsto \ln|x+1|$




$x \mapsto -\ln|x+1|$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-1/x}}{\ln x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-1/x}}{\ln x} = \frac{1-e^{-\infty}}{\ln 0^+} = \frac{1-0}{-\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x(1-\ln x)^3$

✎

$$f'(x) = (1-\ln x)^3 + x \cdot 3(1-\ln x)^2 \left(-\frac{1}{x}\right).$$

**Domanda 9**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = -e^{1/x} + c. \qquad \left(\int e^f \cdot f' = e^f + c\right).$$

**Domanda 10**. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y + x - y$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy + 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -1/(2x) \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

I punti stazionari sono quindi i due punti $(1, -\frac{1}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2})$.

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 19/01/2018**

---

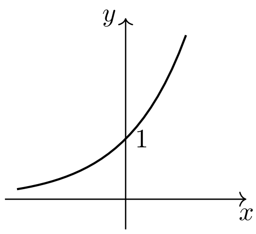
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & -\ln 2 \le x \le 0 \\ (x-1)^2 - 1 & 0 < x \le 2, \end{cases}$$

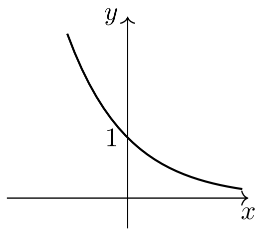
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se $f$ è continua e derivabile nell'intervallo $(-\ln 2, 2)$ (si verifichi anche con la definizione se c'è la continuità nel punto critico). Si dica se è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione $f$ nell'intervallo $[-\ln 2, 2]$ e si dica comunque, sulla base del grafico, se la tesi è vera.

✎

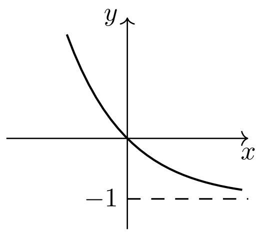
Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono riportate qui sotto.




$x \mapsto e^x$

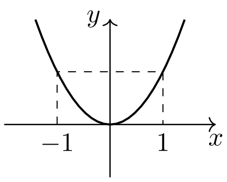



$x \mapsto e^{-x}$

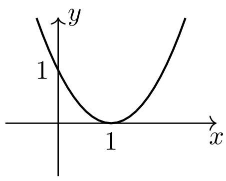



$x \mapsto e^{-x} - 1$

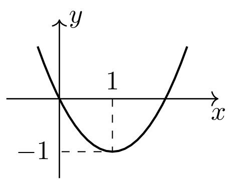
Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.




$x \mapsto x^2$

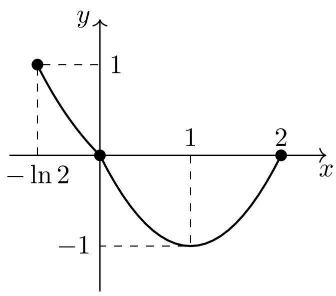



$x \mapsto (x-1)^2$




$x \mapsto (x-1)^2 - 1$

Il grafico della funzione $f$, definita nell'intervallo $[-\ln 2, 2]$, è pertanto quello qui sotto.




Studiamo la continuità della funzione. Possiamo affermare che $f$ è certamente continua in ogni $x$ diverso da 0, in quanto coincide in tutto un intorno di questi punti con trasformazioni di funzioni elementari.

Dobbiamo ora verificare la continuità solo in $x = 0$. Il grafico ci dice che $f$ è continua in 0, ma è richiesta anche la verifica con la definizione. Possiamo affermare che $f$ è continua da sinistra in 0, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione polinomiale.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(0) = e^0 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \big((x-1)^2 - 1\big) = 1 - 1 = 0.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo in cui è definita.

Passiamo alla derivabilità. In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione $f$ è certamente derivabile negli intervalli $(-\ln 2, 0)$ e $(0, 2)$, cioè per $x \neq 0$, dato che coincide con funzioni elementari in tutto un intorno di questi punti. Sfruttando la derivabilità nei punti $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & -\ln 2 < x < 0 \\ 2(x-1) & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \big( -e^{-x} \big) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Pertanto $f$ non è derivabile in $x = 0$.

Passiamo alle domande sul teorema di Weierstrass. Il teorema è applicabile alla funzione $f$ nell'intervallo $[-\ln 2, 2]$ dato che la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato.

La tesi del teorema è quindi certamente vera e dunque esistono almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Sulla base del grafico possiamo dire che c'è un punto di massimo in $x_{\max} = -\ln 2$, con valore massimo $f(-\ln 2) = 1$ e c'è un punto di minimo in $x_{\min} = 1$, con valore minimo $f(1) = -1$.

**ESERCIZIO 2**. Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+z \\ x-y \end{pmatrix}$$

si provi che essa è invertibile e si trovi l'espressione della trasformazione inversa. Si trovino tutti i vettori $v$ tali che $T(v) = u^1$, dove $u^1$ è il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$. Si dica se esistono in $\mathbb{R}^3$ vettori non nulli che $T$ trasforma nel vettore nullo.

✎

La matrice di rappresentazione della trasformazione $T$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $A$ vale 3 e quindi $T$ è invertibile.

Per trovare l'espressione della trasformazione inversa conviene ottenerla dalla matrice inversa di $A$. Con i calcoli dei complementi algebrici si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'espressione della trasformazione inversa di $T$ è (uso le variabili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)

$$T^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 \\ -\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo trovare ora tutti i vettori $v$ tali che $T(v) = u^1$, dove $u^1$ è il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$, cioè $u^1 = (1, 0, 0)$. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $T(v) = u^1$, che equivale a (pensando $v = (x, y, z)$)

$$\begin{pmatrix} x+y-z \\ x+z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y=x \\ z=-x \\ x+x+x=1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=1/3 \\ y=1/3 \\ z=-1/3. \end{cases}$$

C'è quindi un solo vettore con la proprietà richiesta, il vettore $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.[9]

[9] Si poteva dire che certamente il vettore è unico dato che la trasformazione è invertibile. Il vettore $v$ che la $T$ trasforma nel vettore fondamentale $u^1$ è il valore della trasformazione inversa $T^{-1}$ in $u^1$. A verifica di questo si ha infatti, usando l'espressione di $T^{-1}$ trovata prima,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Ultima domanda: si dica se esistono in $\mathbb{R}^3$ vettori non nulli che $T$ trasforma nel vettore nullo. L'equazione da risolvere è ora $T(v) = 0$. Qui si potrebbe procedere come appena fatto, risolvendo il sistema corrispondente. Ma si può concludere in modo più rapido. Sappiamo che il determinante della matrice del sistema, che è la matrice $A$, è diverso da zero. Quindi il teorema di Cramer garantisce che il sistema ha una sola soluzione, che deve necessariamente essere la soluzione banale dato che il sistema è omogeneo. Quindi la risposta è no, non ci sono vettori non nulli che $T$ trasforma nel vettore nullo.[10]

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\big(1-y\big)\cdot\ln\big(1-xy\big)$$

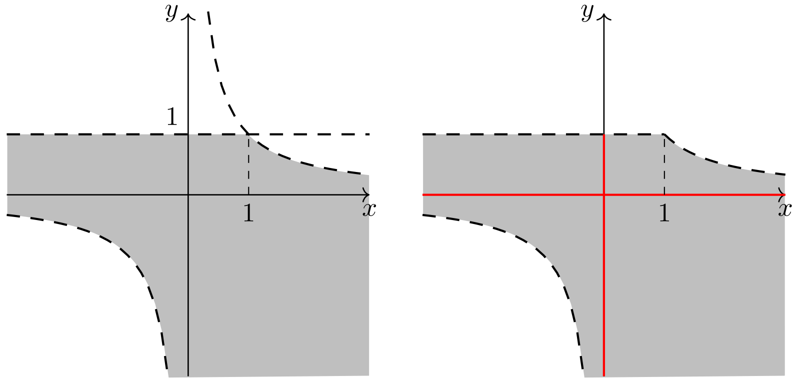
si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla e in quali è positiva. Si dica infine se l'origine è punto stazionario per la funzione $f$.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1-y>0 \\ 1-xy>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y<1 \\ xy<1. \end{cases}$$

Il dominio di $f$ è rappresentato qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.




La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione

$$\ln\big(1-y\big)\cdot\ln\big(1-xy\big)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\big(1-y\big)=0 \;\vee\; \ln\big(1-xy\big)=0,$$

che equivalgono a

$$1-y=1 \;\vee\; 1-xy=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=0 \;\vee\; xy=0.$$

Si tratta degli assi cartesiani, o meglio della parte di questi contenuta nel dominio. I punti in cui la funzione si annulla sono raffigurati in rosso nella figura qui sopra a destra.

I punti in cui la funzione è positiva sono le soluzioni della disequazione

$$\ln\big(1-y\big)\cdot\ln\big(1-xy\big)>0,$$

che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} \ln\big(1-y\big)>0 \\ \ln\big(1-xy\big)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} \ln\big(1-y\big)<0 \\ \ln\big(1-xy\big)<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1-y>1 \\ 1-xy>1 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-y<1 \\ 1-xy<1. \end{cases}$$

Questo equivale a

$$\begin{cases} y<0 \\ xy<0 \end{cases} \vee \begin{cases} y>0 \\ xy>0. \end{cases}$$

[10] Anche qui si poteva rispondere utilizzando l'invertibilità. Se una trasformazione è invertibile vi è un solo vettore che viene trasformato nel vettore nullo (la trasformazione è iniettiva), ed è necessariamente il vettore nullo, dato che *sempre* $T(0)=0$ quando $T$ è lineare.

Il primo sistema individua il quarto quadrante (esclusi gli assi cartesiani). Il secondo sistema individua la parte del primo quadrante contenuta nel dominio (sempre esclusi gli assi cartesiani). In pratica la funzione è positiva nei punti del dominio a destra dell'asse verticale.

Ultima domanda: stabilire se l'origine è punto stazionario per la funzione. La derivata parziale di $f$ rispetto ad $x$ (più semplice dell'altra) è:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln\big(1-y\big) \cdot \frac{-y}{1-xy} \quad \text{e si ha} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Siamo costretti a calcolare anche l'altra derivata:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{1-y} \cdot \ln\big(1-xy\big) + \ln\big(1-y\big) \cdot \frac{-x}{1-xy}.$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{e quindi l'origine è un punto stazionario.}$$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 29/01/2018**

---

**Domanda 1**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c.$$

**Domanda 2**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 e^{x/2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_0^1 e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{2}e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 2e^{x/2}\Big|_0^1 = 2\left(\sqrt{e}-1\right).$$

**Domanda 3**. Dire se l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge

✎

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$

Integrale del tipo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. L'integrale converge.

**Domanda 4**. Dati i vettori $v^1 = (1,-1,0)$, $v^2 = (0,2,1)$ e $v^3 = (-1,1,2)$ scrivere la loro combinazione lineare $2v^1 - v^2 + v^3$

✎

$$2v^1 - v^2 + v^3 = 2(1,-1,0) - (0,2,1) + (-1,1,2) = (2,-2,0) + (0,-2,-1) + (-1,1,2) = (1,-3,1).$$

**Domanda 5**. Calcolare il prodotto interno (scalare) dei due vettori $(-1,3,2)$ e $(2,1,-1)$

✎

$$\big\langle(-1,3,2),(2,1,-1)\big\rangle = -2+3-2 = -1.$$

**Domanda 6**. Calcolare la matrice dei complementi algebrici di $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

✎

La matrice dei complementi algebrici di $A$ è la matrice

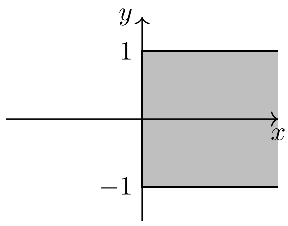
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 7**. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{1-y^2}$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$




Il dominio è raffigurato qui sopra in grigio.

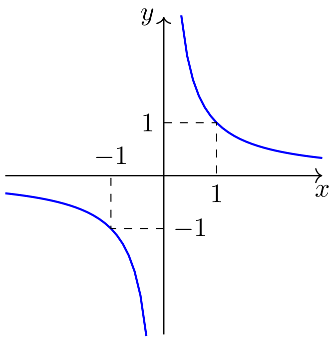
**Domanda 8**. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x, y) = 1 + \ln(xy)$

✎

La curva è data dalle soluzioni dell'equazione

$$1 + \ln(xy) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(xy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy = 1.$$

Questa individua l'iperbole rappresentata in blu qui sotto.




**Domanda 9**. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = \dfrac{x^2}{2} - 2xy + 3y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di NO della matrice sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, entrambi positivi. Quindi la forma è definita positiva.

**Domanda 10**. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = \ln y + \dfrac{\ln x}{y}$

✎

Le due derivate parziali di $f$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{\ln x}{y^2}. \qquad \text{Il gradiente è quindi } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{y} - \frac{\ln x}{y^2}\right).$$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 05/02/2018**

---

**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = x\, e^{-x^2}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Si calcoli poi l'integrale di $f$ nell'intervallo $[-1,1]$. Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

✎

$$\int x\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2x)\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

L'integrale di $f$ nell'intervallo $[-1,1]$ è dato da

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-1}) = 0.$$

Lo si poteva dire subito osservando che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine e la funzione è dispari.
Vediamo ora l'integrale generalizzato.

$$\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Possiamo cercare di confrontare la funzione $x^2e^{-x^2}$ con $\frac{1}{x^2}$ all'infinito. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^{x^2}}.$$

Con il cambio di variabile $x^2 = t$ il limite diventa

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0 \quad \text{(confronto standard potenza/esponenziale)}.$$

Questo significa che la funzione $x^2e^{-x^2}$ è trascurabile rispetto a $\frac{1}{x^2}$, per $x \to +\infty$. Dato che l'integrale generalizzato di $\frac{1}{x^2}$ converge, allora converge anche l'integrale proposto.

**ESERCIZIO 2**. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema, con la solita notazione, sono

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Il teorema di Rouché–Capelli afferma che un sistema lineare ha almeno una soluzione se e solo se i ranghi delle matrici incompleta e completa del sistema sono uguali, cioè se e solo se $rA = r(A|b)$. Calcoliamo quindi i ranghi delle due matrici. Conviene iniziare dal determinante di $A$ (rispetto ad esempio alla seconda riga):

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0.$$

Il rango di $A$ quindi non è 3, ed è certamente 2 osservando che il minore principale di NO di ordine 2 vale 1. Passiamo al rango della matrice completa. O calcoliamo i tre determinanti delle sottomatrici $3 \times 3$ che contengono i termini noti, oppure cerchiamo di scoprire qualche eventuale dipendenza. Si può osservare che $r^3 = 2r^2 - r^1$ (indicando con $r^1, r^2, r^3$ le righe della matrice completa). Pertanto, essendo le righe dipendenti, il rango di $A|b$ non è 3 e quindi è 2 grazie allo stesso minore di prima.

I due ranghi sono uguali e possiamo affermare che il sistema ha almeno una soluzione.

Dobbiamo ora risolvere il sistema stesso. Si tratta di un sistema di tre equazioni e tre incognite con rango 2. Possiamo eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e avremo una variabile che diventa parametro. Avendo osservato che il rango è 2 grazie al minore principale di NO del secondo ordine, eliminiamo la terza equazione e trasformiamo in parametro la variabile $z$.

Il sistema equivalente è quindi

$$\begin{cases} x - y = 2 - z \\ x = 1 + z \end{cases} \quad \text{cioè}^{11} \quad \begin{cases} x = 1 + z \\ 1 + z - y = 2 - z \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 + 2z. \end{cases}$$

Possiamo scrivere le soluzioni, in funzione del parametro $z$, date dall'insieme

$$S = \Big\{ (1 + z, -1 + 2z, z) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Riscriviamo ora le soluzioni indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Basta "scomporre" il vettore soluzione in

$$(1 + z, -1 + 2z, z) = (1, -1, 0) + z(1, 2, 1),$$

e quindi $(1, -1, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e

$$\Big\{ z(1, 2, 1) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\}$$

sono le soluzioni del sistema omogeneo associato. La dimensione di tale sottospazio di $\mathbb{R}^3$ è 1 (vi è un solo generatore indipendente) e una sua base è data dal vettore $(1, 2, 1)$.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\big(1 - x^2 + y^2\big) + \ln\big(y - 2x\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si dica se nel punto $(-1, -1)$ la funzione si annulla e se il punto è stazionario. Si scriva infine la restrizione di $f$ alla parte di assi cartesiani contenuti nel dominio.

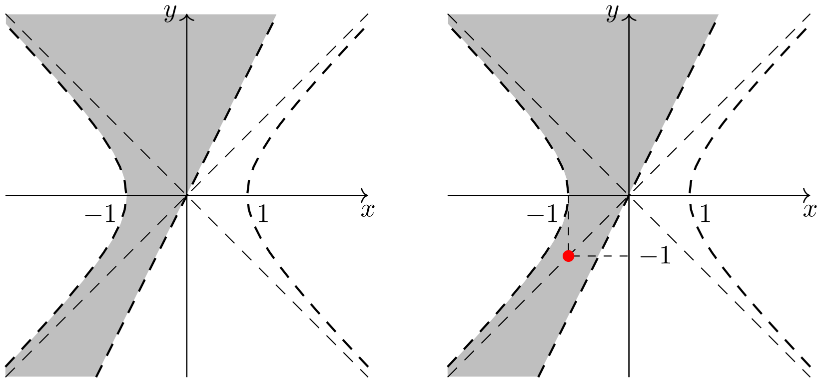
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 > 0 \\ y - 2x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 < 1 \\ y > 2x. \end{cases}$$

L'equazione associata alla prima disequazione definisce un'iperbole con centro l'origine e rami che stanno a sinistra e a destra del centro. L'equazione associata alla seconda disequazione definisce una retta. Si noti (particolare importante) che la pendenza della retta ($m = 2$) è maggiore della pendenza dell'asintoto dell'iperbole (gli asintoti dell'iperbole sono le bisettrici fondamentali). Il dominio di $f$ è rappresentato alla pagina seguente nella figura a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.

[11] In questo caso è molto più rapido risolvere il sistema per sostituzione anziché ricorrere alla regola di Cramer.




Calcoliamo la funzione nel punto $(-1,-1)$, rappresentato in rosso nella figura a destra.

$$f(-1,-1) = \ln\big(1-1+1\big) + \ln\big(-1+2\big) = 0, \text{ quindi } f \text{ si annulla nel punto indicato.}$$

Vediamo se è anche stazionario. Le derivate parziali di $f$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1-x^2+y^2} + \frac{-2}{y-2x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1-x^2+y^2} + \frac{1}{y-2x}.$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{2}{1} + \frac{-2}{1} = 0 \qquad \text{ma} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = \frac{-2}{1} + \frac{1}{1} = -1 \neq 0.$$

Pertanto il punto $(-1,-1)$ non è stazionario.

Ultima domanda: la restrizione di $f$ alla parte di assi cartesiani contenuti nel dominio.

$$f\Big|_{y=0} = f(x,0) = \ln\big(1-x^2\big) + \ln\big(-2x\big) \qquad \text{e} \qquad f\Big|_{x=0} = f(0,y) = \ln\big(1+y^2\big) + \ln y.$$

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 29/01/2018**

---

**Domanda 1**. Semplificare l'espressione $\frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

✎

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

**Domanda 2**. Usando le proprietà di potenze e logaritmi calcolare $\log_2 4\sqrt{2} + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$

✎

$$\log_2 4\sqrt{2} + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{9} = \log_2 2^{5/2} + \log_3 3^{-3/2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$3^{2/x} - \frac{1}{3} = 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$, l'equazione equivale a

$$3^{2/x} = 3^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2}{x} = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2 \text{ (accettabile)}.$$

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$\ln^2 x + 2\ln x > 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $x > 0$, ponendo $\ln x = t$ la disequazione diventa

$$t^2 + 2t > 0, \text{ che ha per soluzioni } t < -2 \text{ oppure } t > 0. \text{ Pertanto si ha}$$

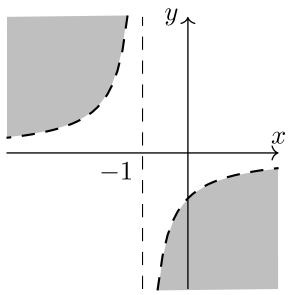
$$\ln x < -2 \text{ oppure } \ln x > 0 \quad \text{cioè} \quad x < e^{-2} \text{ oppure } x > 1.$$

Per la condizione di esistenza le soluzioni sono $0 < x < e^{-2}$ oppure $x > 1$.

**Domanda 5**. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + y + 1 < 0$

✎

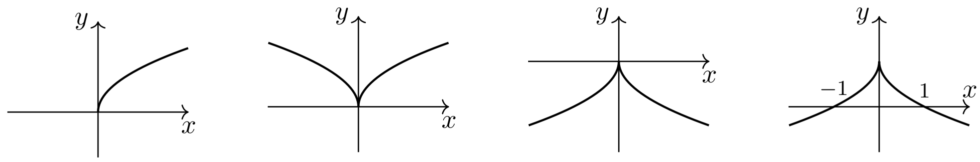
La disequazione si può riscrivere nella forma $(x+1)y < -1$. L'equazione associata individua l'iperbole di centro $(-1, 0)$, con rami nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. L'insieme è rappresentato in grigio nella figura qui sotto.



**Domanda 6**. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.




$x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto 1 - \sqrt{|x|}$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + xe^{-1/x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + xe^{-1/x}\right) = \left(\frac{1}{0^+} + 0 \cdot e^{-1/0^+}\right) = +\infty + 0 \cdot e^{-\infty} = +\infty + 0 \cdot 0 = +\infty.$

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = xe^{1/x^2}$

✎

$$f'(x) = e^{1/x^2} + x \cdot e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right).$$

**Domanda 9**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c. \qquad \left(\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right).$$

**Domanda 10**. Calcolare la matrice dei complementi algebrici di $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

✎

La matrice è

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 05/02/2018**

---

**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = 2x + \ln(1-x)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di $f$ e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di $f$. È vero che la retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante?

✎

La condizione di esistenza per la funzione è

$$1 - x > 0 \qquad \text{cioè} \qquad x < 1.$$

I limiti significativi sono per $x \to 1^-$ e per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-} \big(2x + \ln(1-x)\big) = 1 + \ln(1-1^-) = 1 + \ln 0^+ = 1 - \infty = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} \big(2x + \ln(1-x)\big) = -\infty + \ln(1+\infty) = -\infty + \infty \quad \text{(forma indeterminata)}.$$

La forma si può risolvere in vari modi: ne propongo due.
Raccogliendo $x$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{\ln(1-x)}{x}\right).$$

Il limite del quoziente (forma $\infty/\infty$) si può calcolare con il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{\ln(1-x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty.$$

Oppure, con il cambio di variabile $1 - x = t$, da cui $x = 1 - t$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \big(2x+\ln(1-x)\big) = \lim\limits_{t\to+\infty} \big(2(1-t)+\ln t\big)$. Il logaritmo è trascurabile rispetto al polinomio. Quindi il limite è $-\infty$.

Possiamo anche osservare che il grafico passa per l'origine, in quanto $f(0) = 0$. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{1-x}.$$

I punti stazionari si trovano annullando la derivata.

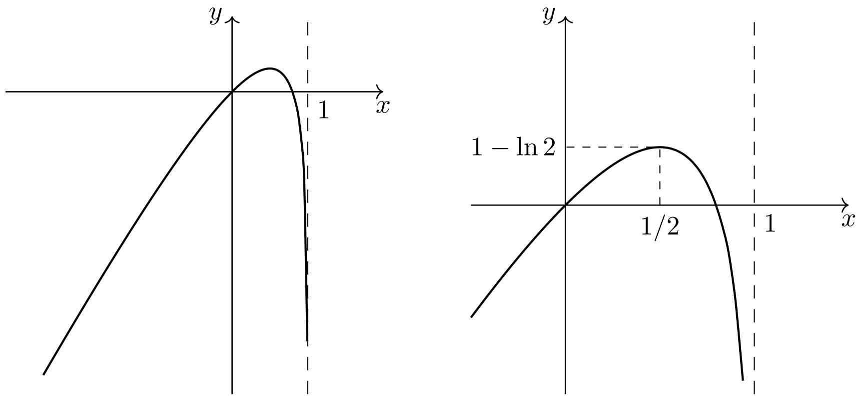
$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 - \frac{1}{1-x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1-x} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - x = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{2}.$$

L'unico punto stazionario è $x = \frac{1}{2}$.
Per studiare l'andamento della funzione e trovare eventuali punti di massimo o minimo locali e globali dobbiamo studiare il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 - \frac{1}{1-x} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1-x} < 2 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - x > \frac{1}{2} \text{ [12]} \quad\Leftrightarrow\quad x < \frac{1}{2}.$$

In base al segno della derivata possiamo pertanto affermare che la funzione $f$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, \frac{1}{2}]$ e quindi decrescete nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1)$. In $x = \frac{1}{2}$ c'è dunque un punto di massimo, che sarà certamente globale, visto l'andamento della funzione. Il valore della funzione nel punto di massimo (cioè il massimo della funzione) è $f(\frac{1}{2}) = 1 + \ln(1 - \frac{1}{2}) = 1 - \ln 2$.

Siamo ora in grado di disegnare un possibile grafico di $f$, nella figura qui sotto a sinistra. Nella figura a destra è ingrandito il dettaglio del punto di massimo.




Veniamo all'ultima domanda: è vero che la retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante?

La prima condizione, cioè che il grafico passi per l'origine, è verificata. Occorre verificare la condizione sulla pendenza, che nell'origine deve essere 1. Si ha infatti

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{1-0} = 1.$$

L'equazione della retta tangente è quindi

$$y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) \quad \text{cioè} \quad y = 0 + 1 \cdot (x - 0) \quad \text{cioè} \quad y = x, \text{ equazione della bisettrice.}$$

**ESERCIZIO 2**. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema, con la solita notazione, sono

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

[12]Attenzione, questo passaggio è delicato e merita un commento adeguato. Nel caso dell'equazione, ad esempio con $\frac{1}{x} = a$, questa equivale, se $x \neq 0$, a $x = \frac{1}{a}$ (i reciproci di due numeri non nulli sono uguali se e solo se i due numeri stessi sono uguali). Il segno non è rilevante. Con la disequazione le cose non sono così semplici. Infatti ad esempio $2 < 3$ (vera) equivale a $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ (vera), ma $-2 < 3$ (vera) non equivale a $-\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ (falsa). Non è difficile convincersi che i problemi nascono quando ci sono quantità negative. Se le quantità sono positive passando ai reciproci e cambiando il verso si ottiene una disequazione equivalente alla data.

Nella risoluzione della disequazione $\frac{1}{x} > a$ il modo corretto di procedere è passare alla $\frac{1}{x} - a > 0$, quindi alla $\frac{1-ax}{x} > 0$ e via di seguito .... Nel nostro caso $\frac{1}{1-x} < 2$ il modo "sicuro" di procedere sarebbe quindi passare alla $\frac{1}{1-x} - 2 < 0$, quindi $\frac{1-2+2x}{1-x} < 0$, etc. Però il passaggio proposto, certamente più semplice, si può fare tenendo conto che il segno delle quantità è positivo: basta considerare che la condizione di esistenza ha posto $1 - x > 0$.

Il teorema di Rouché–Capelli afferma che un sistema lineare ha almeno una soluzione se e solo se i ranghi delle matrici incompleta e completa del sistema sono uguali, cioè se e solo se $rA = r(A|b)$. Calcoliamo quindi i ranghi delle due matrici. Conviene iniziare dal determinante di $A$ (rispetto ad esempio alla seconda riga):

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0.$$

Il rango di $A$ quindi non è 3, ed è certamente 2 osservando che il minore principale di NO di ordine 2 vale 1. Passiamo al rango della matrice completa. O calcoliamo i tre determinanti delle sottomatrici $3 \times 3$ che contengono i termini noti, oppure cerchiamo di scoprire qualche eventuale dipendenza. Si può osservare che $r^3 = 2r^2 - r^1$ (indicando con $r^1, r^2, r^3$ le righe della matrice completa). Pertanto, essendo le righe dipendenti, il rango di $A|b$ non è 3 e quindi è 2 grazie allo stesso minore di prima.

I due ranghi sono uguali e possiamo affermare che il sistema ha almeno una soluzione.

Dobbiamo ora risolvere il sistema stesso. Si tratta di un sistema di tre equazioni e tre incognite con rango 2. Possiamo eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e avremo una variabile che diventa parametro. Avendo osservato che il rango è 2 grazie al minore principale di NO del secondo ordine, eliminiamo la terza equazione e trasformiamo in parametro la variabile $z$.

Il sistema equivalente è quindi

$$\begin{cases} x - y = 2 - z \\ x = 1 + z \end{cases} \quad \text{cioè}^{13} \quad \begin{cases} x = 1 + z \\ 1 + z - y = 2 - z \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 + 2z. \end{cases}$$

Possiamo scrivere le soluzioni, in funzione del parametro $z$, date dall'insieme

$$S = \Big\{(1 + z, -1 + 2z, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Riscriviamo ora le soluzioni indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Basta "scomporre" il vettore soluzione in

$$(1 + z, -1 + 2z, z) = (1, -1, 0) + z(1, 2, 1),$$

e quindi $(1, -1, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e

$$\Big\{z(1, 2, 1) \ : \ z \in \mathbb{R}\Big\}$$

sono le soluzioni del sistema omogeneo associato. La dimensione di tale sottospazio di $\mathbb{R}^3$ è 1 (vi è un solo generatore indipendente) e una sua base è data dal vettore $(1, 2, 1)$.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\big(1 - x^2 + y^2\big) + \ln\big(y - 2x\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si dica se nel punto $(-1, -1)$ la funzione si annulla e se il punto è stazionario. Si scriva infine la restrizione di $f$ alla parte di assi cartesiani contenuti nel dominio.

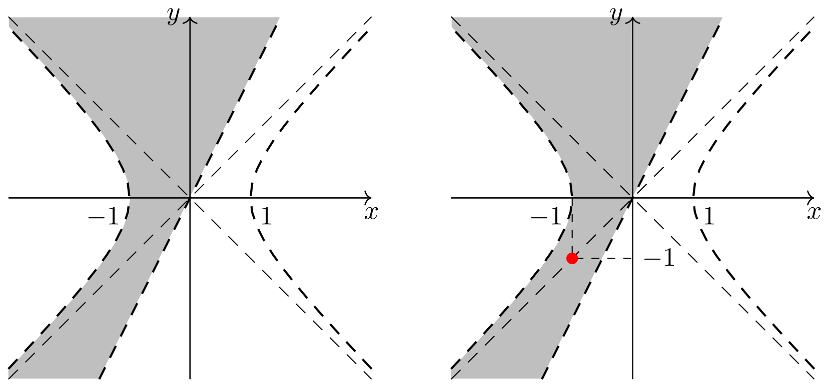
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 > 0 \\ y - 2x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 < 1 \\ y > 2x. \end{cases}$$

L'equazione associata alla prima disequazione definisce un'iperbole con centro l'origine e rami che stanno a sinistra e a destra del centro. L'equazione associata alla seconda disequazione definisce una retta. Si noti (particolare importante) che la pendenza della retta ($m = 2$) è maggiore della pendenza dell'asintoto dell'iperbole (gli asintoti dell'iperbole sono le bisettrici fondamentali). Il dominio di $f$ è rappresentato alla pagina seguente nella figura a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.

[13] In questo caso è molto più rapido risolvere il sistema per sostituzione anziché ricorrere alla regola di Cramer.




Calcoliamo la funzione nel punto $(-1,-1)$, rappresentato in rosso nella figura a destra.

$$f(-1,-1) = \ln\big(1-1+1\big) + \ln\big(-1+2\big) = 0, \text{ quindi } f \text{ si annulla nel punto indicato.}$$

Vediamo se è anche stazionario. Le derivate parziali di $f$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1-x^2+y^2} + \frac{-2}{y-2x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1-x^2+y^2} + \frac{1}{y-2x}.$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{2}{1} + \frac{-2}{1} = 0 \qquad \text{ma} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = \frac{-2}{1} + \frac{1}{1} = -1 \neq 0.$$

Pertanto il punto $(-1,-1)$ non è stazionario.

Ultima domanda: la restrizione di $f$ alla parte di assi cartesiani contenuti nel dominio.

$$f\Big|_{y=0} = f(x,0) = \ln\big(1-x^2\big) + \ln\big(-2x\big) \qquad \text{e} \qquad f\Big|_{x=0} = f(0,y) = \ln\big(1+y^2\big) + \ln y.$$

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 22/06/2018**

---

**Domanda 1**. Semplificare l'espressione $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x-1}\cdot\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}$

✎

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x-1}\cdot\frac{x}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x-1}\cdot\frac{x}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\cdot x\cdot\frac{x}{x+1}=x.$$

**Domanda 2**. Usando le proprietà di potenze e logaritmi calcolare $\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}}+2\ln\sqrt[3]{e}$

✎

$$\ln\frac{1}{\sqrt{e}}+2\ln\sqrt[3]{e}=\ln e^{-1/2}+2\ln e^{1/3}=-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$2\log_3^2 x+\log_3 x=0$$

✎

Con la condizione di esistenza $x>0$, ponendo $\log_3 x=t$ l'equazione diventa

$2t^2+t=0$, cioè $t(2t+1)=0$, che ha per soluzioni $t=0$ oppure $t=-\dfrac{1}{2}$. Pertanto si ha

$$\log_3 x=0 \text{ oppure } \log_3 x=-\frac{1}{2}\quad\text{cioè}\quad x=1 \text{ oppure } x=3^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\text{(accettabili)}.$$

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{e}-e^{1/x}>0$$

✎

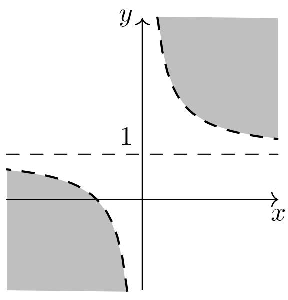
Con la condizione di esistenza $x\neq 0$, la disequazione equivale a

$$e^{1/x}<e^{-1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{x}<-1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{x}+1<0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1+x}{x}<0\quad\Leftrightarrow\quad -1<x<0.$$

**Domanda 5**. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy-x-1>0$

✎

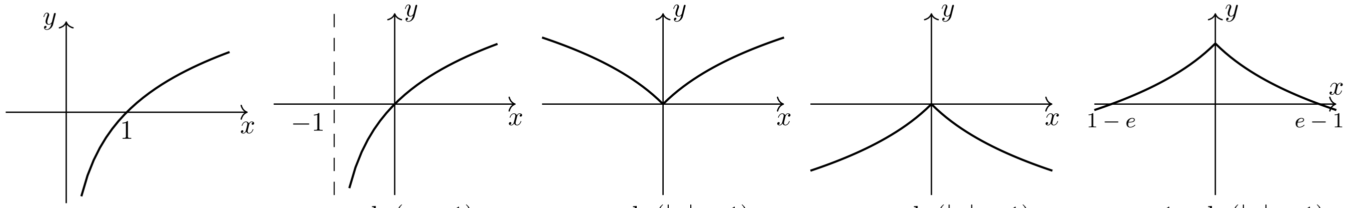
La disequazione si può riscrivere nella forma $x(y-1)>1$. L'equazione associata individua l'iperbole di centro $(0,1)$, con rami nei corrispondenti del primo e terzo quadrante. L'insieme è rappresentato in grigio nella figura qui sotto.



**Domanda 6**. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - \ln\big(|x| + 1\big)$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.




$x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln(x+1)$ $\quad$ $x \mapsto \ln(|x|+1)$ $\quad$ $x \mapsto -\ln(|x|+1)$ $\quad$ $x \mapsto 1 - \ln(|x|+1)$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^+} \cdot \ln\left(0 + \frac{1}{0^+}\right) = +\infty \cdot \ln(0 + \infty) = +\infty \cdot \ln(+\infty) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty.$$

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

✎

$$f'(x) = \frac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot x^2 - e^{1/x} \cdot 2x}{x^4} = -e^{1/x} \cdot \frac{1+2x}{x^4}.$$

**Domanda 9**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x = \int (1+e^x)^{-1/2} e^x\,\mathrm{d}x = \frac{(1+e^x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+e^x} + c. \qquad \left(\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right).$$

**Domanda 10**. Calcolare la matrice Hessiana (gradiente secondo) della funzione $f(x,y) = xy\ln x$

✎

Le derivate parziali prime sono (derivo la funzione pensandola come prodotto $xy \cdot \ln x$)

$$f'_x = y\ln x + xy \cdot \frac{1}{x} = y\ln x + y \qquad \text{e} \qquad f'_y = x\ln x.$$

Le derivate parziali seconde sono allora

$$f''_{xx} = \frac{y}{x} \quad , \quad f''_{xy} = \ln x + 1 \quad , \quad \left(f''_{yx} = \ln x + 1\right) \quad , \quad f''_{yy} = 0.$$

La matrice Hessiana (gradiente secondo) di $f$ è quindi

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & \ln x + 1 \\ \ln x + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 27/06/2018**

---

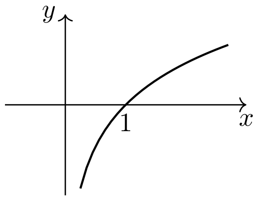
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(1+x) & -1 < x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

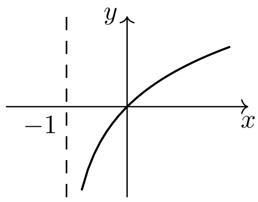
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si dica quali sono l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $f$ e se esistono punti di massimo o di minimo. Si dica poi se $f$ è continua e derivabile in $\big(-1, +\infty\big)$.

✎

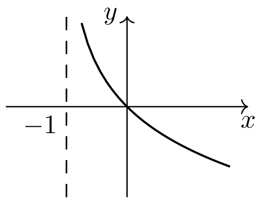
Le trasformazioni della funzione logaritmica sono le seguenti.



$x \mapsto \ln x$

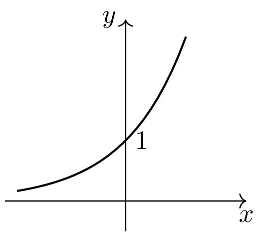


$x \mapsto \ln(x+1)$

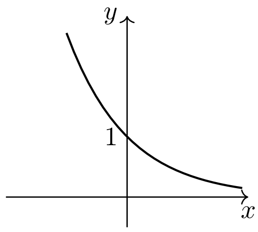


$x \mapsto -\ln(x+1)$

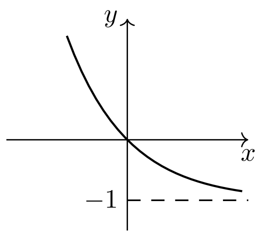
Le trasformazioni della funzione esponenziale sono le seguenti.



$x \mapsto e^x$

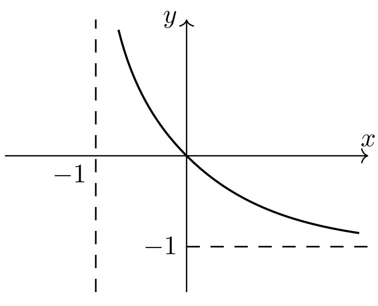


$x \mapsto e^{-x}$



$x \mapsto e^{-x} - 1$

Pertanto il grafico della funzione $f$ è il seguente.




Sulla base del grafico possiamo affermare che la funzione non è superiormente limitata e invece è inferiormente limitata, con estremo inferiore $-1$. Quindi

$$\sup f = +\infty \qquad \text{e} \qquad \inf f = -1.$$

La funzione $f$ è chiaramente decrescente in un intervallo aperto e quindi non esistono punti di massimo o di minimo.

Passiamo a studiare la continuità e la derivabilità in $(-1, +\infty)$.

La continuità è evidente dal grafico. Con la definizione, in $x = 0$, possiamo verificare che

$$f(0) = -\ln(1+0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^{-x} - 1) = e^0 - 1 = 0.$$

Studiamo ora la derivabilità. Possiamo affermare che la funzione $f$ è certamente derivabile negli intervalli $(-1,0)$ e $(0,+\infty)$, dato che coincide con funzioni elementari in tutto un intorno di questi punti. Resta da analizzare l'esistenza della derivata in $x=0$. Sfruttando la derivabilità nei punti $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1+x} & -1 < x < 0 \\ -e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{1+x}\right) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(-e^{-x}\big) = -1.$$

Pertanto $f$ è derivabile anche in $x=0$ e $f'(0)=-1$.

**ESERCIZIO 2**. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = (0,1,1,0) \quad , \quad v^2 = (-1,0,-1,0) \quad , \quad v^3 = (1,0,1,-1).$$

Si stabilisca se i tre vettori sono linearmente indipendenti oppure no. Indicata poi con $A$ la matrice formata con i tre vettori disposti in riga, si risolva il sistema lineare omogeneo $Ax=0$, indicando anche la dimensione e una base delle sue soluzioni.

✎

Per stabilire se i tre vettori sono linearmente indipendenti si potrebbe usare la definizione, ma come sempre conviene utilizzare il concetto di rango. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo affermate che $v^1, v^2, v^3$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango di $A$ è 3, cioè è uguale al numero dei vettori. Si vede facilmente che il determinante della sottomatrice evidenziata in grigio è diverso da zero e che quindi il rango di $A$ è 3. Si faccia attenzione! Il fatto che il determinante delle prime 3 colonne si annulla (la terza colonna è la somma delle prime 2) non permette di dire che il rango è 2.

Ora è richiesta la soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax=0$, dove $A$ è la stessa matrice appena utilizzata. Il sistema è

$$\begin{cases} y+z=0 \\ -x-z=0 \\ x+z-t=0. \end{cases}$$ [14]

Indicando con $S$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle sue soluzioni, possiamo subito dire che $\dim S = 4 - rA = 1$ e che quindi $S$ è generato da un unico vettore non nullo.

Per risolvere il sistema, coerentemente con il fatto che il rango è stato calcolato mediante il minore che esclude la terza colonna, possiamo utilizzare come parametro la variabile $z$. Il sistema, dopo aver portato $z$ con i termini noti, diventa

$$\begin{cases} y=-z \\ x=-z \\ t=0. \end{cases}$$

Pertanto possiamo scrivere direttamente le soluzioni:

$$S = \big\{(-z,-z,z,0) \ : \ z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{z(-1,-1,1,0) \ : \ z \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'ultima scrittura trovata dice che le soluzioni sono tutti i vettori multipli del vettore $(-1,-1,1,0)$. Questo vettore è quindi una base di $S$. Si noti che il numero dei vettori che formano una base (cioè 1) coincide con la dimensione del sottospazio, trovata prima.

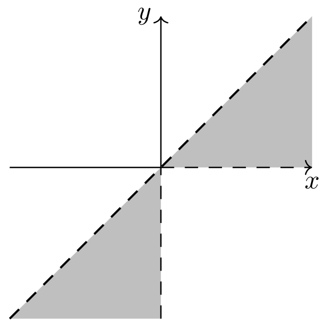
[14] Come spesso accade, in queste scritture c'è una certa ambiguità. Quando scriviamo il sistema nella forma matriciale $Ax=0$ la $x$ è un vettore, cioè il vettore delle variabili (incognite); quando scriviamo il sistema "per esteso" la $x$ è la prima variabile. Per questo motivo sarebbe in effetti preferibile, anche se un po' più pesante in termini di notazioni, continuare a scrivere $Ax=0$ come forma matriciale, ma scrivere per esteso le variabili come $x_1$, $x_2$, ....

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione
$$f(x,y) = \ln\big(xy\big) - \ln\big(x-y\big),$$
si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di $f$ e si dica se ci sono punti stazionari per la funzione. Si determini infine in quali punti la funzione si annulla.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} xy > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy > 0 \\ y < x. \end{cases}$$




La prima condizione ha per soluzioni i punti del primo o del terzo quadrante; la seconda i punti che stanno al di sotto della bisettrice del primo e terzo quandrante. Pertanto il dominio di $f$ è quindi costituito dai punti del primo o terzo quadrante al di sotto della retta. L'insieme è aperto, cioè tutti i punti di frontiera non fanno parte del dominio. L'insieme è raffigurato in grigio qui a fianco.

Calcoliamo il gradiente di $f$. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy}\cdot y - \frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy}\cdot x - \frac{1}{x-y}\cdot(-1) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x-y}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}\ ,\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x-y}\right).$$

Cerchiamo eventuali punti stazionari annullando le due derivate parziali. Possiamo scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-y} = 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x-y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{x-y} \\ \frac{1}{y} = -\frac{1}{x-y} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = x \\ x - y = -y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

che però non è accettabile in quanto non appartiene al dominio della funzione. Quindi non ci sono punti stazionari.

L'ultima domanda chiede di determinare in quali punti la funzione si annulla. Consideriamo l'equazione

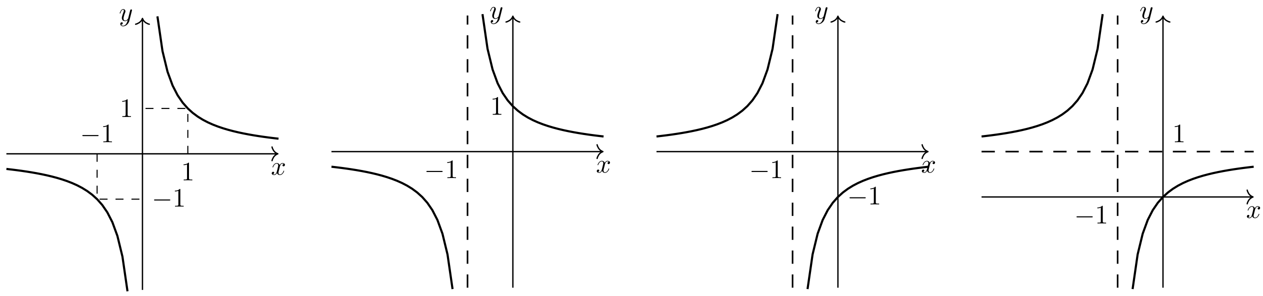
$$\ln\big(xy\big) - \ln\big(x-y\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln\big(xy\big) = \ln\big(x-y\big) \qquad \Leftrightarrow \qquad xy = x - y.$$

Propongo due modi per trovare le soluzioni di quest'ultima.

*Primo modo.* Cerchiamo di ricavare la $y$.

$$xy + y = x \quad ; \quad y(x+1) = x \quad ; \quad y = \frac{x}{x+1} \quad ; \quad y = \frac{x+1-1}{x+1} \quad ; \quad y = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Siamo in grado di disegnare il grafico della funzione $x \mapsto 1 - \frac{1}{x+1}$ usando, ad esempio, le trasformazioni elementari.



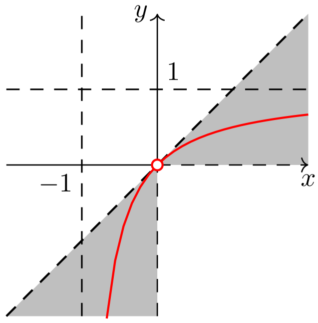

$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ $\quad$ $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$ $\quad$ $x \mapsto 1 - \frac{1}{x+1}$

*Secondo modo.* Trasformiamo l'equazione iniziale in modo da poter fare un raccoglimento:

$$xy - x + y = 0 \quad ; \quad x(y-1) + y - 1 = -1 \text{ [15]} \quad ; \quad (x+1)(y-1) = -1.$$

Qui possiamo disegnare la curva ricordando la geometria analitica. Si tratta dell'iperbole di centro $(-1, 1)$ con rami che stanno nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante, cioè la curva data dal grafico che abbiamo ottenuto poco fa.

La figura qui sotto evidenzia in rosso i punti del dominio in cui la funzione s annulla. Si noti che l'origine non appartiene al dominio e quindi non fa parte della curva rossa.




[15] Ho aggiunto $-1$ a destra e a sinistra per creare un fattore da poter raccogliere.

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 31/08/2018**

---

**Domanda 1**. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^4 - 2x^3 + x^2$

✎

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2.$$

**Domanda 2**. Nell'espressione $3^{2x}\sqrt{x} + \dfrac{x}{3^x}$ raccogliere $3^x\sqrt{x}$ e semplificare

✎

$$3^{2x}\sqrt{x} + \frac{x}{3^x} = 3^x\sqrt{x}\left(\frac{3^{2x}\sqrt{x}}{3^x\sqrt{x}} + \frac{x}{3^x}\cdot\frac{1}{3^x\sqrt{x}}\right) = 3^x\sqrt{x}\left(3^x + \sqrt{x}\,3^{-2x}\right).$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$e^{1-x} = \frac{2}{e}$$

✎

L'equazione equivale a

$$e\cdot e^{1-x} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{2-x} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 - x = \ln 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2 - \ln 2.$$

Ma si poteva anche prendere subito i logaritmi di entrambi i termini e fare

$$1 - x = \ln\frac{2}{e} \quad \text{cioè} \quad x = 1 - \ln 2 + \ln e = 2 - \ln 2.$$

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$x > 1 + \frac{2}{x}$$

✎

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $-1$ | $-$ | | $-$ | $2$ | $+$ |
| $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| | | | $0$ | | | |

La condizione di esistenza è $x \neq 0$. La disequazione equivale a

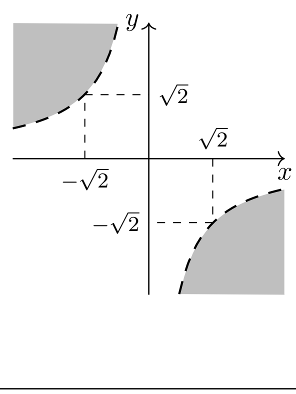
$$\frac{x^2 - x - 2}{x} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{(x+1)(x-2)}{x} > 0.$$

Riportando il segno del numeratore e del denominatore in uno schema, come qui a sinistra, si trova che le soluzioni sono quindi $-1 < x < 0$ oppure $x > 2$.

**Domanda 5**. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{xy}{2} + 1 < 0$

✎

La disequazione si può riscrivere come $xy < -2$. L'equazione associata individua un'iperbole di centro $(0,0)$, con rami nel secondo e quarto quadrante. L'origine non soddisfa l'equazione ($0 < -2$ è falso). L'insieme è rappresentato in grigio nella figura qui a destra.




**Domanda 6**. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1 - e^x}$

✎

Con l'algebra dei limiti

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1 - e^x} = \frac{-\infty}{1 - 1^+} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

**Domanda 7**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

✎

$$f'(x) = 2\,\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = 2\,\frac{\ln x(1 - \ln x)}{x^3}.$$

**Domanda 8**. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1+x}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1+x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + x + c.$$ [16]

**Domanda 9**. Calcolare la matrice dei complementi algebrici di $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

La matrice risulta la seguente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ [17]

**Domanda 10**. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{x} + \ln x$

✎

Le derivate parziali sono

$$f'_x = -\frac{\ln y}{x^2} + \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad f'_y = \frac{1}{xy}.\quad \text{Il gradiente è poi il vettore} \quad \nabla f = \left(f'_x, f'_y\right).$$

[16] Il valore assoluto sul logaritmo è opportuno in quanto la funzione $\frac{1+x}{x}$ è definita anche per $x$ negativo.

[17] Ricordo che il complemento algebrico dell'elemento di posto $(i,j)$ si ottiene calcolando il minore complementare dell'elemento di posto $(i,j)$ (cioè il determinante della sottomatrice ottenuta eliminando la $i$-ma riga e la $j$-ma colonna) e moltiplicando questo per la quantità $(-1)^{i+j}$. Quest'ultimo passaggio equivale a cambiare il segno del minore complementare calcolato quando l'elemento è "di posto dispari".

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 03/09/2018**

---

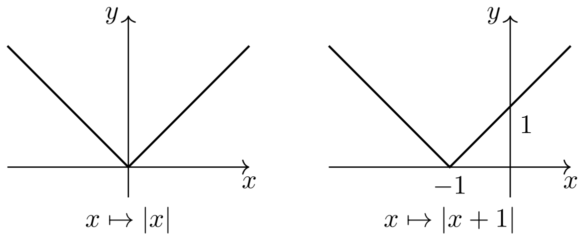
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & -2 \le x \le 0 \\ e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

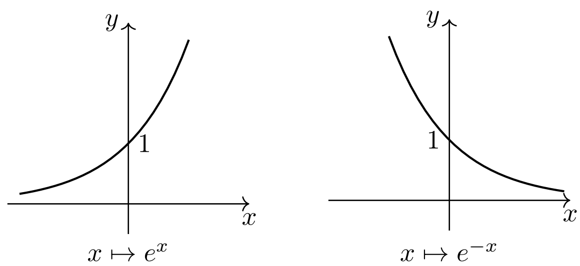
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari e si dica qual è l'immagine della funzione. Si indichino i possibili punti in cui la funzione non è derivabile e lo si dimostri analiticamente. Si dica infine, sulla base del grafico, quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ e le si determinino analiticamente.

✎

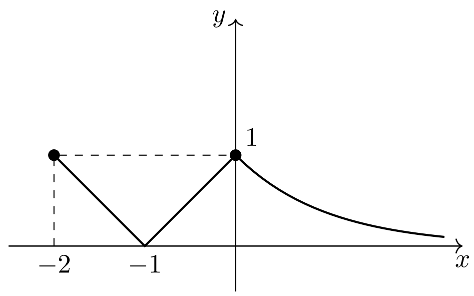
Le trasformazioni della funzione $x \mapsto |x+1|$ sono le seguenti.




Le trasformazioni della funzione esponenziale sono le seguenti.




Pertanto il grafico della funzione $f$ è il seguente.




Sulla base del grafico possiamo affermare che l'immagine della funzione, cioè i valori che essa assume, sono dati dall'intervallo $[0, 1]$. (0 è il valore assunto in $x = -1$ e 1 è il valore assunto in $x = -2$ e in $x = 0$).

Il grafico suggerisce che possibili punti di non derivabilità (punti angolosi in particolare) sono $x = -1$ e $x = 0$. Dimostriamolo ora analiticamente.

Il grafico indica chiaramente che la funzione risulta continua.[18]

Prima di calcolare la derivata è bene riscrivere la funzione senza il valore assoluto. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) & -2 \le x \le -1 \\ x+1 & -1 \le x \le 0 \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

[18]Quindi in nessuno dei due punti possiamo dire che la non derivabilità è dovuta alla non continuità.

Pertanto la derivata, dove è possibile calcolarla, è

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ -e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

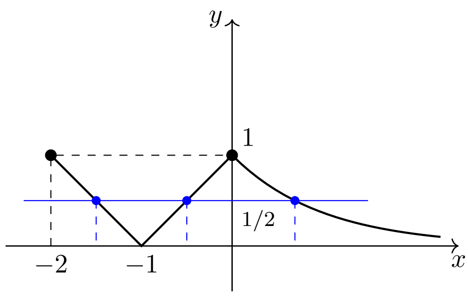
Quindi

$$f'_-(-1) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(-1) = 1$$

La funzione non è quindi derivabile in $x = -1$. Poi

$$f'_-(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}(-e^{-x}) = -1.$$

La funzione non è derivabile nemmeno in $x = 0$.
Le ultime due domande: dire sulla base del grafico quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$. Si tratta dei punti in cui la funzione assume il valore $\frac{1}{2}$. Quello che dobbiamo fare è tracciare sulla figura la retta di equazione $y = \frac{1}{2}$ e vedere in quanti punti interseca il grafico di $f$.




Evidentemente sono tre punti. Determiniamoli analiticamente. Sono evidentemente tre le equazioni da considerare:

$$-(x+1) = \frac{1}{2}, \text{ che dà la soluzione } x = -\frac{3}{2},$$

poi

$$x + 1 = \frac{1}{2}, \text{ che dà la soluzione } x = -\frac{1}{2}$$

e infine

$$e^{-x} = \frac{1}{2}, \text{ che equivale a } -x = \ln\frac{1}{2} \text{ e quindi } x = \ln 2.$$

**ESERCIZIO 2**. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = \big(1, 0, -1, 0\big) \quad , \quad v^2 = \big(-1, 1, 0, 0\big) \quad \text{e} \quad v^3 = \big(0, 1, -1, 1\big).$$

Si verifichi, usando la definizione, che essi sono linearmente indipendenti. Si trovi conferma del risultato precedente utilizzando il concetto di rango. Detto $S$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori, si dica qual è la dimensione di $S$. Si dica infine se il vettore $v = (1, 0, -1, 1)$ appartiene o no ad $S$.

✎

Per verificare che i tre vettori sono linearmente indipendenti attraverso la definizione dobbiamo provare che l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli. Scriviamo allora la generica combinazione lineare di $v^1$, $v^2$ e $v^3$ e poniamola uguale al vettore nullo:

$$a\big(1, 0, -1, 0\big) + b\big(-1, 1, 0, 0\big) + c\big(0, 1, -1, 1\big) = \big(0, 0, 0, 0\big).$$

Questo significa

$$\big(a - b, b + c, -a - c, c\big) = \big(0, 0, 0, 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b = 0 \\ b + c = 0 \\ -a - c = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione del sistema è la soluzione banale, cioè $a = b = c = 0$. Quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Utilizzando il concetto di rango dobbiamo verificare che la matrice formata dai tre vettori ha rango 3. La matrice è (è indifferente disporre i vettori in riga o in colonna)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A$ ha rango 3 in quanto la sottomatrice evidenziata in grigio ha determinante diverso da zero.

Se indichiamo con $S$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori, la dimensione di $S$ è uguale al rango della matrice $A$ e quindi $\dim S = 3$.

Per dire infine se il vettore $v = (1, 0, -1, 1)$ appartiene o no ad $S$ cerchiamo di scrivere $v$ come combinazione lineare di $v^1$, $v^2$ e $v^3$. Utilizzando quanto già trovato prima possiamo scrivere che questo equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ b + c = 0 \\ -a - c = -1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 1 \\ a - b = 1 \\ b + 1 = 0 \\ -a - 1 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \\ a = 0. \end{cases}$$

Pertanto $v$ appartiene ad $S$ e si ha in particolare $v = v^3 - v^2$.

Per rispondere all'ultima domanda si poteva alternativamente "completare" la matrice $A$ con la quarta riga data dal vettore $v$ e verificare che la matrice (quadrata) così ottenuta ha determinante nullo. Dato che le prime tre righe di $A$, cioè i vettori $v^1$, $v^2$ e $v^3$, sono linearmente indipendenti e che invece i vettori $v^1$, $v^2$, $v^3$ e $v$ sono quindi dipendenti, certamente $v$ dipende linearmente dagli altri tre, cioè è una loro combinazione lineare.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

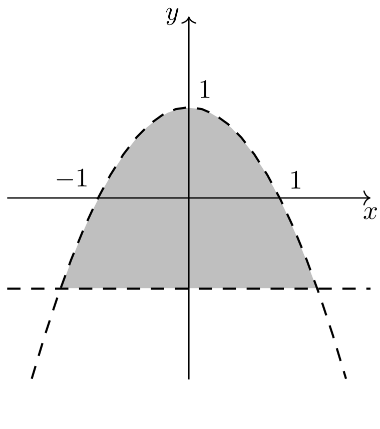
$$f(x, y) = \ln\big(1 - x^2 - y\big) + \ln\big(y + 1\big),$$

si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si trovi il punto stazionario di $f$. Si verifichi che $f$ non è mai positiva sugli assi cartesiani. (Suggerimento: si scrivano le restrizioni di $f$ agli assi e si ricordi che $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.) Si dimostri che $f$ non è positiva in nessun punto del dominio.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y < 1 - x^2 \\ y > -1. \end{cases}$$




La prima condizione ha per soluzioni i punti al di sotto della parabola di equazione $y = 1 - x^2$ e la seconda i punti che stanno alla destra della retta (verticale) $y = -1$. L'insieme è raffigurato in grigio qui a fianco.

Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1 - x^2 - y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{1 - x^2 - y} + \frac{1}{y + 1}.$$

Il punto stazionario si trova annullando le due derivate parziali. Dobbiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} \frac{-2x}{1 - x^2 - y} = 0 \\ \frac{-1}{1 - x^2 - y} + \frac{1}{y+1} = 0. \end{cases}$$

Questo equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{-1}{1-y} + \frac{1}{y+1} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ -y - 1 + 1 - y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario è l'origine.

Per verificare che $f$ non è mai positiva sugli assi cartesiani scriviamo anzitutto, come suggerito, la restrizione di $f$ sugli assi.

$$f\Big|_{x=0} = \ln\big(1-y\big) + \ln\big(y+1\big) = \ln\big(1-y^2\big).$$

Questa è certamente non positiva dato che l'argomento del logaritmo è minore o uguale ad 1, qualunque sia il valore di $y$. Poi

$$f\Big|_{y=0} = \ln\big(1-x^2\big).$$

Anche questa è non positiva, per lo stesso motivo, qualunque sia il valore di $x$.
Ora l'ultima domanda: dimostrare che $f$ non è positiva in nessun punto del dominio. Vogliamo provare che

$$\ln\big(1-x^2-y\big) + \ln\big(y+1\big) \le 0 \text{ in tutto il dominio.}$$

Questa equivale, con la solita proprietà dei logaritmi, a

$$\ln\big((1-x^2-y)(y+1)\big) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big(y+1-x^2y-x^2-y^2-y\big) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big(1-x^2y-x^2-y^2\big) \le 0.$$

Questo equivale a

$$1-x^2y-x^2-y^2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2y+x^2+y^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y+1)+y^2 \ge 0.$$

Questa è certamente vera nel dominio in quanto i due quadrati sono non negativi e nel dominio $y+1>0$, per le condizioni di esistenza.