Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2019/20

Alberto Peretti

Agosto 2020

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/11/2019

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $3x^4 - x^2 + 2x - 1$ per $x + 2$

✎

Possiamo usare la divisione di Ruffini, dato che il divisore è del tipo $x + a$.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & & -6 & 12 & -22 & 40 \\ \hline & 3 & -6 & 11 & -20 & 39 \end{array}$$

Pertanto il quoziente è $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 11x - 20$ e il resto è $R = 39$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{1-x}{\frac{2}{x}-2}$

✎

$$\frac{1-x}{\frac{2}{x}-2} = \frac{x-1}{\frac{2-2x}{x}} = (1-x)\frac{x}{2(1-x)} = \frac{x}{2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\frac{e^{x^2-x}}{e^2} - 1 = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$e^{x^2-x-2} = 1 \quad ; \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad ; \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad ; \quad x = -1 \ \vee x = 2.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln(2 + 3x) - 1 < 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $2 + 3x > 0$, cioè $x > -\frac{2}{3}$, la disequazione equivale a

$$\ln(2+3x) < 1 \quad ; \quad 2 + 3x < e \quad ; \quad x < \frac{e-2}{3}.$$

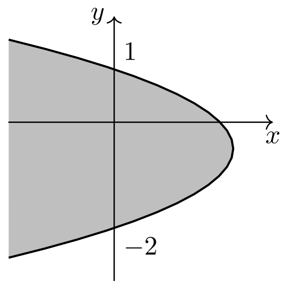
Dato che $\frac{e-2}{3} > 0$, le soluzioni sono $-\frac{2}{3} < x < \frac{e-2}{3}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y^2 + x + y - 2 \leq 0$

✎

La disequazione si può scrivere come

$$x \leq -y^2 - y + 2 \quad ; \quad x \leq -(y^2 + y - 2) \quad ; \quad x \leq -(y-1)(y+2).$$

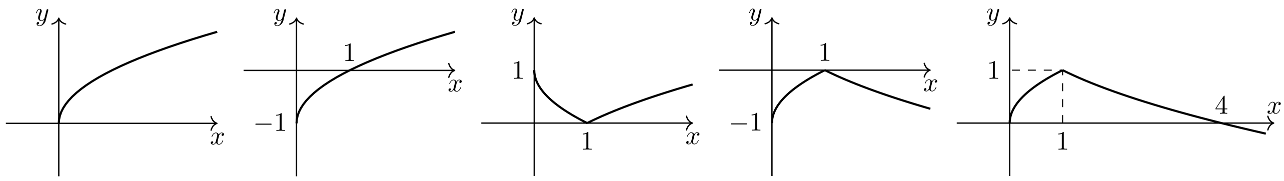


Si tratta della regione che sta a sinistra della parabola di equazione $x = -(y-1)(y+2)$. La parabola ha asse orizzontale e interseca l'asse y in -2 e 1. La regione è rappresentata in grigio e il bordo della regione è compreso.

Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - \left|\sqrt{x} - 1\right|$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.

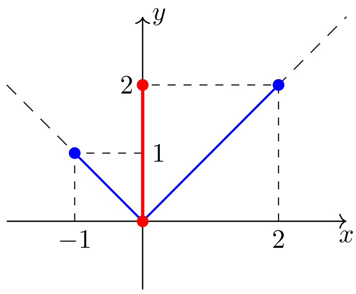


$x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ $\quad$ $x \mapsto |\sqrt{x} - 1|$ $\quad$ $x \mapsto -|\sqrt{x} - 1|$ $\quad$ $x \mapsto 1 - |\sqrt{x} - 1|$

Domanda 7. Si determini l'immagine (cioè l'insieme dei valori) della funzione $f : \big[-1, 2\big] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = |x|$

✎

Qui conviene intanto disegnare il grafico della funzione $|x|$. Il grafico della funzione è rappresentato in blu.



La funzione assume agli estremi dell'intervallo i valori 1 e 2, ma può assumere anche valori minori di 1. L'immagine è data dall'intervallo $[0, 2]$.

Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{\ln x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{\ln x} = \frac{e^{-1/0^+}}{\ln 0^+} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x\, e^{1-\sqrt{x}}$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-\sqrt{x}} + x \cdot e^{1-\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = e^{1-\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right).$$

Domanda 10. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x) = 2x \ln(3x)$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = 2\ln(3x) + 2x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = 2\ln(3x) + 2$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$2\ln(3x) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3e} \text{ (accettabile perché } > 0).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/11/2019

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $2x^4 - 3x^2 + x + 1$ per $x + 2$

Possiamo usare la divisione di Ruffini, dato che il divisore è del tipo $x + a$.

	2	0	−3	1	1
−2		−4	8	−10	18
	2	−4	5	−9	19

Pertanto il quoziente è $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 9$ e il resto è $R = 19$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{2 - \frac{2}{x}}{x - 1}$

$$\frac{2 - \frac{2}{x}}{x - 1} = \frac{\frac{2x-2}{x}}{x - 1} = \frac{2(x-1)}{x} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$1 - \frac{e^{x^2+x}}{e^2} = 0$$

L'equazione equivale a

$$e^{x^2+x-2} = 1 \quad ; \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad ; \quad (x-1)(x+2) = 0 \quad ; \quad x = -2 \ \vee x = 1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

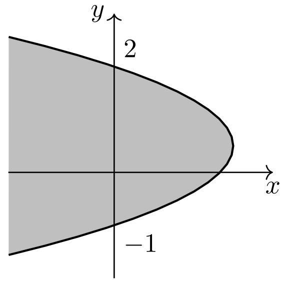
$$\ln(3 + 2x) - 1 < 0$$

Con la condizione di esistenza $3 + 2x > 0$, cioè $x > -\frac{3}{2}$, la disequazione equivale a

$$\ln(3 + 2x) < 1 \quad ; \quad 3 + 2x < e \quad ; \quad x < \frac{e-3}{2}.$$

Dato che $\frac{e-3}{2} \simeq -0.14$, le soluzioni sono $-\frac{3}{2} < x < \frac{e-3}{2}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y^2 + x - y - 2 \leq 0$



La disequazione si può scrivere come

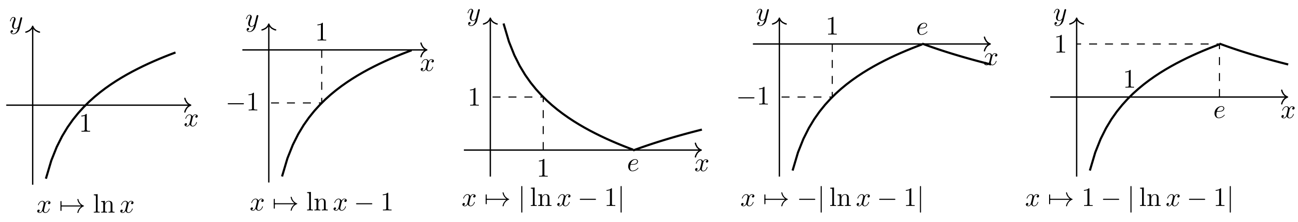
$$x \leq -y^2 + y + 2 \quad ; \quad x \leq -(y^2 - y - 2) \quad ; \quad x \leq -(y+1)(y-2).$$

Si tratta della regione che sta a sinistra della parabola di equazione $x = -(y + 1)(y - 2)$. La parabola ha asse orizzontale e interseca l'asse y in -1 e 2. La regione è rappresentata in grigio e il bordo della regione è compreso.

Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - \big|\ln x - 1\big|$

✎

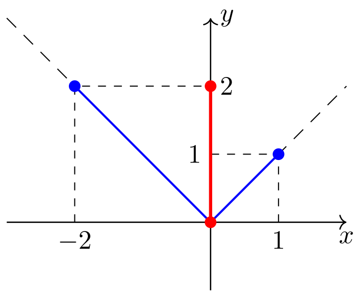
Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Domanda 7. Si determini l'immagine (cioè l'insieme dei valori) della funzione $f : \big[-2, 1\big] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = |x|$

✎

Qui conviene intanto disegnare il grafico della funzione $|x|$. Il grafico della funzione è rappresentato in blu.



La funzione assume agli estremi dell'intervallo i valori 1 e 2, ma può assumere anche valori minori di 1. L'immagine è data dall'intervallo $[0, 2]$.

Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Big(e^{-1/x} + \ln x\Big)$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad e^{-1/0^+} + \ln 0^+ = e^{-\infty} + (-\infty) = 0 - \infty = -\infty.$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{1-x} + \sqrt{x} \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

Domanda 10. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x) = 3x \ln(2x)$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = 3\ln(2x) + 3x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = 3\ln(2x) + 3$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$3\ln(2x) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2e} \text{ (accettabile perché} > 0).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/11/2019

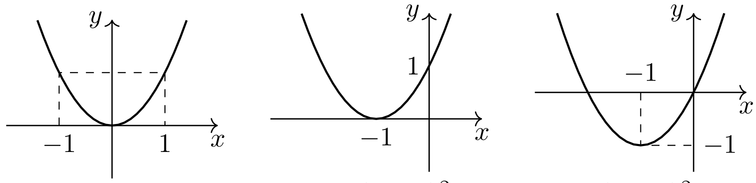
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & -2 \le x \le 0 \\ \ln(x+1) & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si provi che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $\big[-2,1\big]$ e si trovi in quali punti è verificata la tesi del teorema. Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $\big[-2,1\big]$.

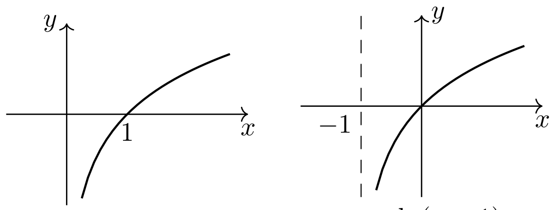
✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione polinomiale sono le seguenti.



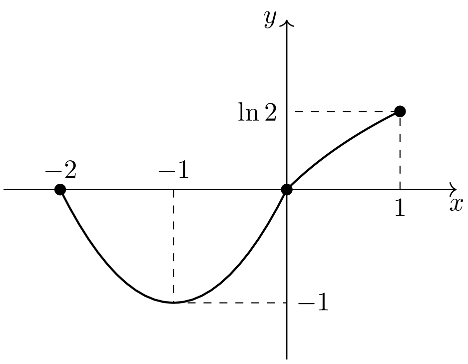
$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto (x+1)^2$ $\quad$ $x \mapsto (x+1)^2 - 1$

Per la funzione logaritmica invece semplicemente



$x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln(x+1)$

Il grafico della funzione f è pertanto questo:



Dobbiamo provare che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2,1]$. Si tratta di verificare che le ipotesi sono vere. Le ipotesi del teorema di Weierstrass sono che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato, e questo è vero per definizione, e che sia continua in tale intervallo.

Nell'intervallo $[-2,1]$ possiamo affermare che f è certamente continua in $[-2,0)$ e $(0,1]$, dato che in questi è una trasformazione di funzioni elementari. Occorre verificare la continuità in $x=0$. Il grafico ci dice che f è continua in 0, ma facciamolo anche con la definizione. La funzione è continua da sinistra in 0, dato che in $x=0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione polinomiale. Quindi è sufficiente verificare la continuità in zero da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x=0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra è una funzione logaritmica.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(0) = (0+1)^2 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo $[-2, 1]$.

Troviamo ora in quali punti è verificata la tesi del teorema. La tesi del teorema di Weierstrass è che esistono nell'intervallo almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo per la funzione. Possiamo rispondere sulla base del grafico. C'è un solo punto di massimo ($x_{\max} = 1$, con valore massimo $\ln 2$) e un solo punto di minimo ($x_{\min} = -1$, con valore minimo -1).

L'ultima domanda è dire se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2, 1]$. Le ipotesi del teorema di Lagrange sono che la funzione sia continua nell'intervallo $[-2, 1]$ (già verificata) e che sia derivabile in tutti i punti interni. Occorre capire se la funzione è derivabile in particolare in zero, dato che certamente in tutti gli altri punti lo è in quanto trasformazione di funzioni elementari.

Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{se } -2 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 2(x+1) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = 0$. Il teorema di Lagrange non è dunque applicabile.

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x) = x - 2\ln(x+1)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino i punti stazionari. Si disegni un possibile grafico di f. Si scriva l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nell'origine. Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $|f(x)| = \frac{1}{3}$.

✎

L'unica condizione di esistenza da porre è che l'argomento del logaritmo sia positivo e quindi $x + 1 > 0$, che vuol dire $x > -1$. La funzione è definita in $(-1, +\infty)$.

I limiti significativi sono pertanto -1 da destra e $+\infty$.

Il primo si può fare con l'algebra dei limiti.

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \big(x - 2\ln(x+1)\big) = -1 - 2\ln\big((-1)^+ + 1\big) = -1 - 2\ln(0^+) = -1 - 2(-\infty) = -1 + \infty = +\infty.$$

Il secondo è una forma indeterminata.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 2\ln(x+1)) = +\infty - \infty.$$

Ricordando che la funzione logaritmica tende all'infinito più lentamente di una potenza, il limite è $+\infty$.

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di f è

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

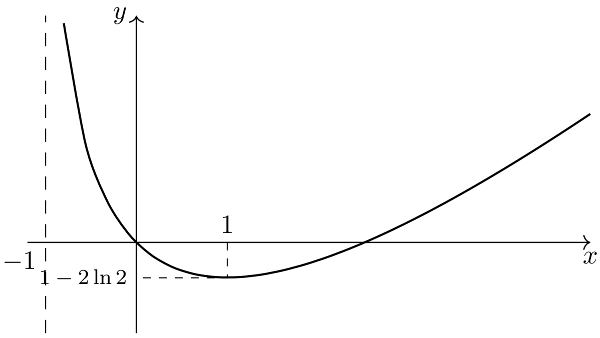
I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

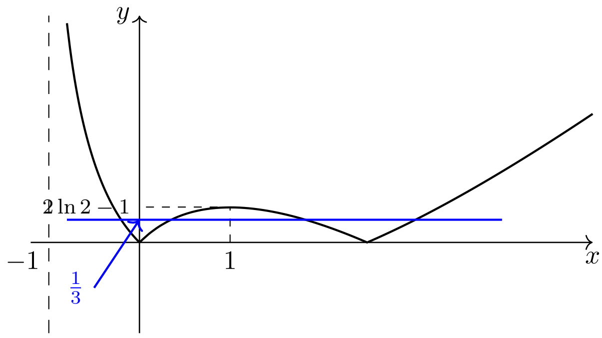
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione. Dato che i limiti sono entrambi $+\infty$ e quello trovato è l'unico punto stazionario, questo non può essere che il punto di minimo globale della funzione. In ogni caso il facile studio del segno della derivata porta a questa conclusione.

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 > 2\ ^{1} \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

La funzione è quindi decrescente fino a 1 e poi crescente. Il valore nel punto di minimo (il minimo di f) è $f(1) = 1-2\ln 2$. Un possibile grafico di f è riportato qui sotto a sinistra.





La domanda successiva è di scrivere l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Dal grafico si vede che i valori sono dati dall'intervallo $[\min f, +\infty) = [1 - 2\ln 2, +\infty)$.

Ora l'equazione della retta tangente al grafico di f nell'origine. L'equazione è in generale

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ci servono il valore della funzione e della derivata in 0. Si ha

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(0) = -1.$$

L'equazione è quindi

$$y = -x.$$

L'ultima domanda è dire quante soluzioni ha l'equazione $|f(x)| = \frac{1}{3}$.

Faccio notare che non viene chiesto di trovare le soluzioni, ma solo di dire quante sono.[2]

Usando la trasformazione grafica elementare che ci permette di avere il valore assoluto di f, otteniamo il grafico qui sopra a destra. Si vede facilmente che le soluzioni sono o due, o tre, o quattro, a seconda che sia rispettivamente $|1 - 2\ln 2| > \frac{1}{3}$, oppure $|1 - 2\ln 2| = \frac{1}{3}$, oppure $|1 - 2\ln 2| < \frac{1}{3}$. Dato che $|1 - 2\ln 2| = 2\ln 2 - 1 \simeq 0.39$, si ha che le soluzioni sono quattro, come rappresentato in figura.

[1] Attenzione che questo passaggio si può fare perché $x + 1$ è positivo nel dominio.

[2] Non siamo in grado di risolvere l'equazione perché non rientra in nessuna delle categorie che abbiano studiato: non è un'equazione intera e non è un'equazione logaritmica dei casi che sappiamo risolvere.

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/11/2019

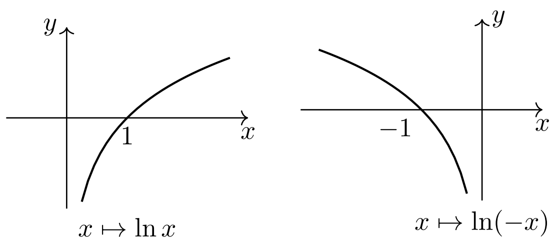
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & -2 \le x \le -1 \\ x^2 - 1 & -1 < x \le 1 \end{cases}$$

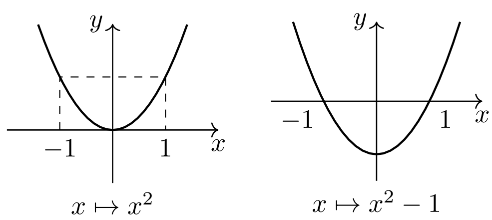
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si provi che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $\big[-2,1\big]$ e si trovi in quali punti è verificata la tesi del teorema. Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $\big[-2,1\big]$.

✎

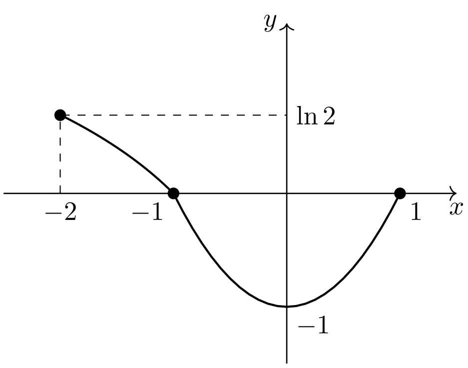
La trasformazione grafica elementare della funzione logaritmica è la seguente.



La trasformazione grafica elementare della funzione polinomiale è la seguente.



Il grafico della funzione f è pertanto questo:



Dobbiamo provare che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2,1]$. Si tratta di verificare che le ipotesi sono vere. Le ipotesi del teorema di Weierstrass sono che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato, e questo è vero per definizione, e che sia continua in tale intervallo.

Nell'intervallo $[-2,1]$ possiamo affermare che f è certamente continua in $[-2,-1)$ e $(-1,1]$, dato che in questi è una trasformazione di funzioni elementari. Occorre verificare la continuità in $x=-1$. Il grafico ci dice che f è continua in -1, ma facciamolo anche con la definizione. La funzione è continua da sinistra in -1, dato che in $x=-1$ e in un intorno sinistro di -1 coincide con la funzione logaritmica. Quindi è sufficiente verificare la continuità in -1 da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x=-1$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione logaritmica, mentre a destra è una funzione polinomiale.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(-1) = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo $[-2, 1]$.

Troviamo ora in quali punti è verificata la tesi del teorema. La tesi del teorema di Weierstrass è che esistono nell'intervallo almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo per la funzione. Possiamo rispondere sulla base del grafico. C'è un solo punto di massimo ($x_{\max} = -2$, con valore massimo $\ln 2$) e un solo punto di minimo ($x_{\min} = 0$, con valore minimo -1).

L'ultima domanda è dire se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2, 1]$. Le ipotesi del teorema di Lagrange sono che la funzione sia continua nell'intervallo $[-2, 1]$ (già verificata) e che sia derivabile in tutti i punti interni. Occorre capire se la funzione è derivabile in particolare in -1, dato che certamente in tutti gli altri punti lo è in quanto trasformazione di funzioni elementari.

Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) & \text{se } -2 < x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } -2 < x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{1}{x} = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} 2x = -2.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = -1$. Il teorema di Lagrange non è dunque applicabile.

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x) = 3\ln(x - 1) - x$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino i punti stazionari. Si disegni un possibile grafico di f. Si scriva l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $|f(x)| = \frac{1}{2}$.

✎

L'unica condizione di esistenza da porre è che l'argomento del logaritmo sia positivo e quindi $x - 1 > 0$, che vuol dire $x > 1$. La funzione è definita in $(1, +\infty)$.

I limiti significativi sono pertanto 1 da destra e $+\infty$.

Il primo si può fare con l'algebra dei limiti.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \big(3\ln(x - 1) - x\big) = 3\ln(1^+ - 1) - 1 = 3\ln 0^+ - 1 = 3(-\infty) - 1 = -\infty.$$

Il secondo è una forma indeterminata.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(3\ln(x - 1) - x\big) = +\infty - \infty.$$

Ricordando che la funzione logaritmica tende all'infinito più lentamente di una potenza, il limite è $-\infty$.

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{3}{x - 1} - 1.$$

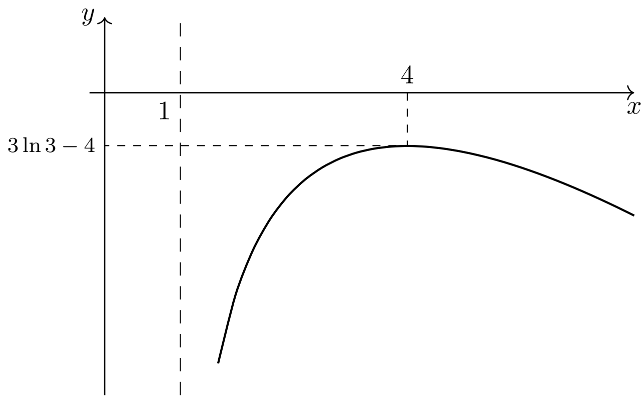
I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

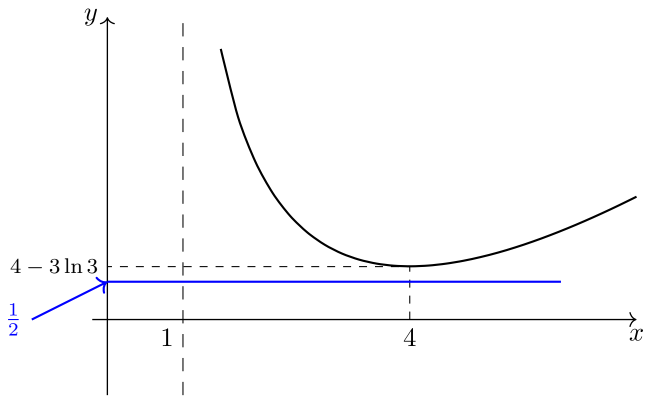
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x - 1} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x - 1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione. Dato che i limiti sono entrambi $-\infty$ e quello trovato è l'unico punto stazionario, questo non può essere che il punto di massimo globale della funzione. In ogni caso il facile studio del segno della derivata porta a questa conclusione.

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x - 1} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x - 1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 < 3\ ^3 \quad \Leftrightarrow \quad x < 4.$$

La funzione è quindi crescente fino a 4 e poi decrescente. Il valore nel punto di massimo (il massimo di f) è $f(4) = 3\ln 3 - 4 < 0$. Un possibile grafico di f è riportato qui sotto a sinistra.





La domanda successiva è di scrivere l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Dal grafico si vede che i valori sono dati dall'intervallo $(-\infty, \max f] = (-\infty, 3\ln 3 - 4]$.

Ora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. L'equazione è in generale

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ci servono il valore della funzione e della derivata in 2. Si ha

$$f(2) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'(2) = 2.$$

L'equazione è quindi

$$y = -2 + 2(x - 2) \quad \text{cioè} \quad y = 2x - 6.$$

L'ultima domanda è dire quante soluzioni ha l'equazione $|f(x)| = \frac{1}{2}$.

Faccio notare che non viene chiesto di trovare le soluzioni, ma solo di dire quante sono.[4]

Usando la trasformazione grafica elementare che ci permette di avere il valore assoluto di f, otteniamo il grafico qui sopra a destra. Si vede facilmente che le soluzioni sono nessuna, una o due, a seconda che sia rispettivamente $|3\ln 3 - 4| < \frac{1}{2}$, oppure $|3\ln 3 - 4| = \frac{1}{2}$, oppure $|3\ln 3 - 4| > \frac{1}{2}$. Dato che $|3\ln 3 - 4| = 4 - 3\ln 3 \simeq 0.7$, si ha che l'equazione non ha soluzioni, come rappresentato in figura.

[3] Attenzione che questo passaggio si può fare perché $x - 1$ è positivo nel dominio.

[4] Non siamo in grado di risolvere l'equazione perché non rientra in nessuna delle categorie che abbiano studiato: non è un'equazione intera e non è un'equazione logaritmica dei casi che sappiamo risolvere.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/01/2020

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{2}\cdot x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(-3)e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cdot e^{-3x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}(e^{-3}-e^{3}) = \frac{1}{3}\left(e^{3}-\frac{1}{e^{3}}\right).$$

Domanda 3. Calcolare il prodotto interno (scalare) dei due vettori $(2,-1,1,-1)$ e $(-1,-2,-1,1)$

✎

$$\langle(2,-1,1,-1),(-1,-2,-1,1)\rangle = -2+2-1-1 = -2.$$

Domanda 4. Calcolare il prodotto $A^T\cdot A$, dove $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

✎

$$A^T\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 2-1\\ -1 & 1\\ 1 & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

✎

$$\det\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} = 2\cdot(-1) - 1\cdot(-2) = 0.$$

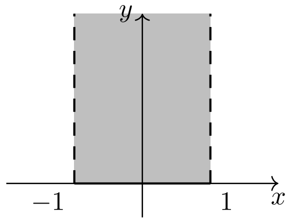
Domanda 6. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{y}\cdot\ln\left(1-x^2\right)$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} y \geq 0\\ 1-x^2 > 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y\geq 0\\ x^2 < 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y \geq 0\\ -1 < x < 1\end{cases}$$

Il dominio è raffigurato in grigio nella pagina seguente.



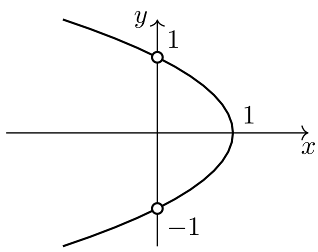
Domanda 7. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{1-y^2}$

✎

La curva di livello 1 di f è definita dall'equazione

$$\frac{x}{1-y^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - y^2 \quad (\text{con } y \neq \pm 1).$$

Attenzione che, per motivi di esistenza della funzione, occorre escludere i due punti $(0,1)$ e $(0,-1)$.



Domanda 8. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x,y) = x^2 + 3xy + \frac{5}{2}y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

I minori principali di Nord-Ovest ($M_1 = a_{11} = 1$ e $M_2 = \det A = 1/4$) sono entrambi positivi e quindi la forma è definita positiva.

Domanda 9. Calcolare la derivata parziale rispetto ad y della funzione $f(x,y) = x^2 \ln\left(x + y^2\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{2y}{x+y^2}.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = 3x - 2y + 4xy$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3 + 4y = 0 \\ -2 + 4x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 16/01/2020

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2x+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Domanda 3. Scrivere un vettore non nullo che sia ortogonale al vettore $(1, -2, 1, -1)$

✎

Ad esempio il vettore $(2, 1, 0, 0)$, dato che $\big\langle(2, 1, 0, 0), (1, -2, 1, -1)\big\rangle = 0$.

Domanda 4. Calcolare il prodotto $A \cdot A^T$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

✎

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = -1.$$

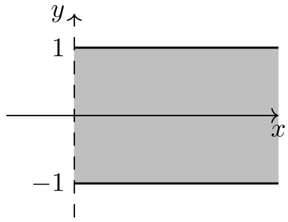
Domanda 6. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2} + \ln x$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} 1 - y^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ x > 0. \end{cases}$$

Il dominio è raffigurato in grigio nella pagina seguente.



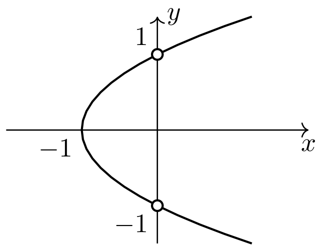
Domanda 7. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{y^2-1}{x}$

✎

La curva di livello 1 di f è definita dall'equazione

$$\frac{y^2-1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = x \quad (\text{con } x \neq 0).$$

Attenzione che, per motivi di esistenza della funzione, occorre escludere i due punti $(0,1)$ e $(0,-1)$.



Domanda 8. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il minore principale di Nord-Ovest del 1° ordine è positivo, ma il determinante è negativo ($\det A = -1/4$) e quindi la forma è indefinita.

Domanda 9. Calcolare la derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x,y) = y^2\, e^{x^2+y}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\, e^{x^2+y} \cdot 2x.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = 3xy - 2x + 4y$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3y - 2 = 0 \\ 3x + 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 15/01/2020

ESERCIZIO 1. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -y+z+t=2 \\ x+y-2t=-1 \\ x+z-t=1 \end{cases}$$

si dica perché, in base al teorema di Rouché–Capelli, esso ha soluzioni. Si dica se il vettore $(-1,0,2,0)$ è oppure no una delle soluzioni. Si trovino tutte le soluzioni del sistema e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema sono

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Possiamo osservare che nella matrice $A|b$ la terza riga è la somma delle altre due. Quindi il rango non può essere 3. Esso è certamente 2 per entrambe le matrici, dato che ad esempio il minore evidenziato in grigio diverso da zero. (Ho scelto questo minore perché nel successivo calcolo delle soluzioni questo risulta particolarmente conveniente.) In base al teorema di Rouché–Capelli, essendo $r(A) = r(A|b)$, il sistema ha almeno una soluzione.

Per dire se il vettore $(-1,0,2,0)$ è oppure no una delle soluzioni basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} 2=2 \\ -1=-1 \\ -1+2=1 \end{cases} \qquad \text{e quindi si tratta di una delle soluzioni.}$$

Troviamo le soluzioni del sistema.

Possiamo eliminare la terza equazione e rendere parametri la y e la t. Questo è coerente con il minore di ordine 2 indicato in precedenza. Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} z = 2+y-t \\ x = -1-y+2t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{\big(-1-y+2t, y, 2+y-t, t\big) \ : \ y,t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere queste come

$$\mathcal{S} = \Big\{(-1,0,2,0) + y\big(-1,1,1,0\big) + t\big(2,0,-1,1\big) \ : \ y,t \in \mathbb{R}\Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big(-1,1,1,0\big)$ e $\big(2,0,-1,1\big)$ formano una base di $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione

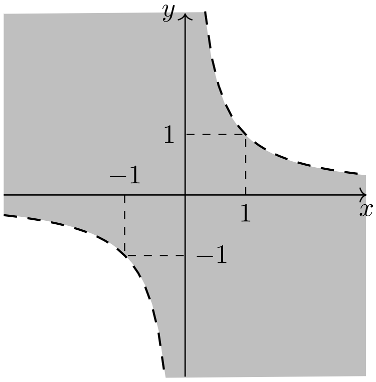
$$f(x,y) = x\ln(1-xy)$$

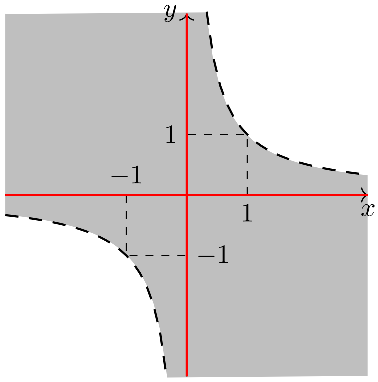
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si trovino tutti i punti stazionari di f. Si dica infine perché un qualunque punto interno al secondo quadrante non può essere punto di massimo o di minimo.

✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$1-xy>0 \quad \text{che equivale a} \quad xy<1.$$





Si tratta della regione che sta tra i due rami di un'iperbole con centro l'origine, asintoti coincidenti con gli assi cartesiani e rami nel primo e terzo quadrante. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura a sinistra qui sopra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.

Un punto interno al dominio è ad esempio l'origine, mentre un punto di frontiera è ad esempio $(1, 1)$.

La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione

$$x\ln(1-xy)=0 \quad \text{cioè} \quad x=0 \quad \vee \quad \ln(1-xy)=0 \quad \text{cioè} \quad x=0 \quad \vee \quad 1-xy=1 \quad \text{cioè} \quad x=0 \quad \vee \quad xy=0.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti degli assi cartesiani, disegnati in rosso nella figura qui sopra a destra, che sono interamente contenuti nel dominio della funzione.

Ora i punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln(1-xy)+x\cdot\frac{-y}{1-xy}=\ln(1-xy)-\frac{xy}{1-xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot\frac{-x}{1-xy}=-\frac{x^2}{1-xy}.$$

Per annullare le due derivate parziali conviene partire dalla seconda, che si annulla se e solo se $x=0$. Sostituendo nella prima si ottiene che questa è comunque nulla, qualunque sia il valore di y. Questo significa che i punti stazionari sono i punti della retta $x=0$, cioè tutto l'asse y.

Veniamo all'ultima domanda: dire perché un qualunque punto interno al secondo quadrante non può essere punto di massimo o di minimo. Se ci fosse un punto di massimo o di minimo all'interno del secondo quadrante questo sarebbe un punto stazionario, ma abbiamo appena trovato che i punti stazionari stanno solo sull'asse verticale. Quindi non ci possono essere punti di massimo o di minimo nel secondo quadrante (all'interno).

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 16/01/2020

ESERCIZIO 1. Dati i tre vettori

$$v^1 = (1,0,-2) \quad , \quad v^2 = (-2,1,0) \quad , \quad v^3 = (0,1,-1)$$

si provi che essi formano una base di $\mathbb{R}^3$. Si provi che il primo vettore fondamentale $u^1 = (1,0,0)$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$ generato dai tre vettori e lo si scriva come combinazione lineare dei tre. Si dica infine se è possibile scrivere u^1 come combinazione lineare di v^1 e v^2.

✎

Tre vettori di $\mathbb{R}^3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti. Vediamo dunque se i tre vettori sono dipendenti o indipendenti. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice quadrata

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di V (calcolato rispetto alla prima riga) è

$$\det V = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = -1 + 4 = 3.$$

I vettori sono quindi linearmente indipendenti e pertanto formano una base di $\mathbb{R}^3$.
La domanda successiva chiede di provare che il primo vettore fondamentale $u^1 = (1,0,0)$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$ generato dai tre vettori. La domanda a questo punto è banale, dato che i tre vettori generano tutto $\mathbb{R}^3$ e di conseguenza qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ appartiene allo spazio generato dai tre vettori.
Dobbiamo ora scrivere esplicitamente $u^1 = (1,0,0)$ come combinazione lineare dei tre vettori dati.

$$(1,0,0) = a(1,0,-2) + b(-2,1,0) + c(0,1,-1) \quad \text{cioè} \quad (1,0,0) = (a,0,-2a) + (-2b,b,0) + (0,c,-c)$$

quindi

$$(1,0,0) = (a-2b, b+c, -2a-c).$$

Questa equazione vettoriale equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} a-2b=1 \\ b+c=0 \\ -2a-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-b \\ a-2b=1 \\ -2a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-b \\ b=2a \\ a-4a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1/3 \\ b=-2/3 \\ c=2/3. \end{cases}$$

La scrittura è quindi

$$(1,0,0) = -\frac{1}{3}v^2 - \frac{2}{3}v^2 + \frac{2}{3}v^3.$$

Ultima domanda: dire se è possibile scrivere u^1 come combinazione lineare dei soli v^1 e v^2. Basta capire se u^1 dipende linearmente da v^1 e v^2 oppure è indipendente da questi.
Consideriamo la matrice

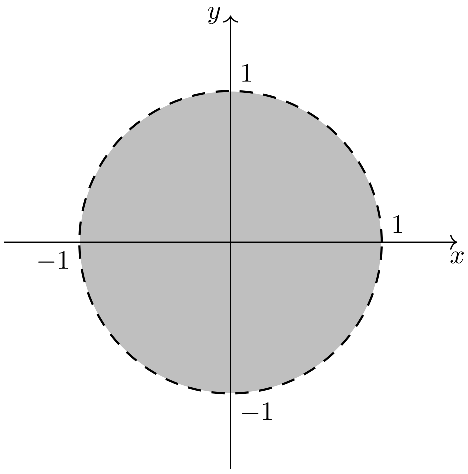
$$V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Il determinante è 2.}$$

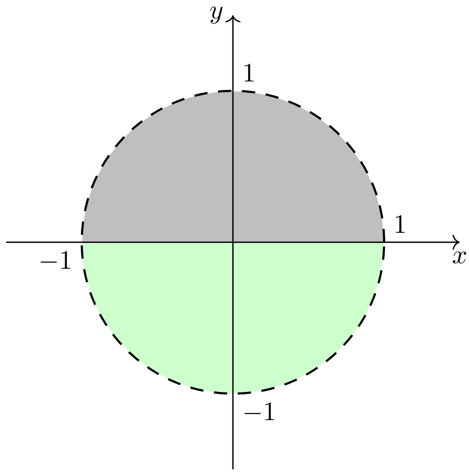
La risposta quindi è no.

ESERCIZIO 2. Data la funzione
$$f(x,y) = y\ln(1-x^2-y^2)$$
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione è positiva. Si trovino tutti i punti stazionari di f.

✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da
$$1-x^2-y^2 > 0 \quad \text{che equivale a} \quad x^2+y^2<1.$$
Si tratta della regione che sta all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.





Un punto interno al dominio è ad esempio l'origine, mentre un punto di frontiera è ad esempio $(1,0)$.

La funzione è positiva nell'insieme delle soluzioni della disequazione
$$y\ln(1-x^2-y^2)>0 \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} y>0 \\ \ln(1-x^2-y^2)>0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y<0 \\ \ln(1-x^2-y^2)<0 \end{cases}$$
che a sua volta equivale a
$$\begin{cases} y>0 \\ 1-x^2-y^2>1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y<0 \\ 1-x^2-y^2<1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y>0 \\ x^2+y^2<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y<0 \\ x^2+y^2>0. \end{cases}$$
Il primo sistema è impossibile (la seconda disequazione non ha soluzioni). Le soluzioni del secondo sistema sono i punti del dominio al di sotto dell'asse x. La regione è indicata in verde nella figura qui sopra a destra.

I punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot\frac{-2x}{1-x^2-y^2} = \frac{-2xy}{1-x^2-y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(1-x^2-y^2) + y\cdot\frac{-2y}{1-x^2-y^2} = \ln(1-x^2-y^2) - \frac{2y^2}{1-x^2-y^2}.$$
Per annullare le due derivate parziali conviene partire dalla prima, che si annulla se $x=0$ oppure se $y=0$. Quindi, sostituendo i due valori nella seconda derivata, abbiamo le due possibilità
$$\begin{cases} x=0 \\ \ln(1-y^2) - \frac{2y^2}{1-y^2} = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y=0 \\ \ln(1-x^2)=0. \end{cases}$$
Il secondo sistema è più facile: si semplifica in
$$\begin{cases} y=0 \\ 1-x^2=1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y=0 \\ x^2=0 \end{cases} \quad \text{, che ha come soluzione l'origine.}$$
Nel primo sistema la seconda equazione ha la soluzione $y=0$ e possiamo dire che per $y\neq 0$ l'equazione è impossibile, dato che nel dominio si ha $-1<y<1$ e quindi il membro di destra è certamente negativo. Pertanto anche il primo sistema ha come unica soluzione l'origine, che è quindi l'unico punto stazionario.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/01/2020

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $x^7 - 2x^5 + x^3$ per $x^2 - 1$

✎

Con la divisione (di Euclide) tra polinomi si ha

$$\begin{array}{ccc|c} x^7 & -2x^5 & +x^3 & x^2-1 \\ \cline{4-4} -x^7 & +x^5 & & x^5 - x^3 \\ \cline{1-3} // & -x^5 & +x^3 & \\ & +x^5 & -x^3 & \\ \cline{2-3} & // & // & \end{array}$$

Pertanto il quoziente è il polinomio $x^5 - x^3$ e il resto è zero.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) + \dfrac{1}{\log_2(\sqrt{2})}$

✎

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{1}{\log_2(\sqrt{2})} = \ln e^{-1/2} + \frac{1}{\log_2 2^{1/2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$e^{2x} - 2e^x = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$e^x(e^x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 0 \quad \vee \quad e^x = 2$$

La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione $x = \ln 2$. L'equazione si può risolvere anche con il cambio di variabile $e^x = t$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{3x}{3x+1} > 1$$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq -\frac{1}{3}$, la disequazione equivale a

$$\frac{3x}{3x+1} - 1 > 0 \quad ; \quad \frac{3x - 3x - 1}{3x+1} > 0 \quad ; \quad \frac{-1}{3x+1} > 0 \quad ; \quad \frac{1}{3x+1} < 0 \quad ; \quad 3x+1 < 0 \quad ; \quad x < -\frac{1}{3}.$$

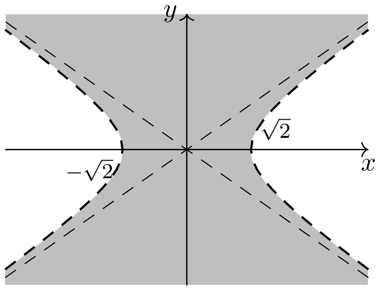
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{x^2}{2} - y^2 - 1 < 0$

✎

La disequazione equivale a

$$\frac{x^2}{2} - y^2 < 1$$

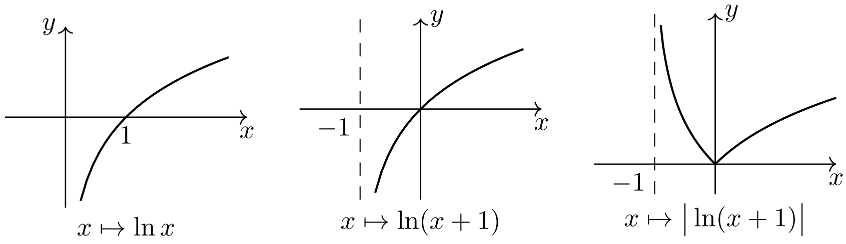
e questa individua la regione che sta tra i rami di un'iperbole con centro nell'origine e asintoti obliqui. La regione è indicata in grigio nella figura della pagina seguente. Gli asintoti hanno equazione $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$ (quindi la pendenza è, in valore assoluto, minore di 1).



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = \big|\ln(x+1)\big|$

✎

Le trasformazioni sono queste:



Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x} = \frac{\ln(1^+-1)}{1-1^+} = \frac{\ln 0^+}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\big(1-\ln x\big)^2$

✎

$$f'(x) = 1\cdot\big(1-\ln x\big)^2 + x\cdot 2\big(1-\ln x\big)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \big(1-\ln x\big)^2 - 2\big(1-\ln x\big) = \ln^2 x - 1.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{3-2x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{3-2x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{x} - 2\ln|x| + c.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x - 2y + 3xy$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1+3y=0 \\ -2+3x=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 16/01/2020

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $x^6 + x^2 + 2$ per $x^2 + 1$

✎

Con la divisione (di Euclide) tra polinomi si ha

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^6 & & +x^2 & +2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-x^6 & -x^4 & & & x^4-x^2+2 \\ \cline{1-4}
// & -x^4 & +x^2 & +2 & \\
 & +x^4 & +x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & // & 2x^2 & +2 & \\
 & & -2x^2 & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

Pertanto il quoziente è il polinomio $x^4 - x^2 + 2$ e il resto è zero.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}{\ln \sqrt{e}}$

✎

$$\frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}{\ln \sqrt{e}} = \frac{\log_2 2^{-2/3}}{\ln e^{1/2}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\log_2^2 x - 2 \log_2 x = 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. L'equazione equivale a

$$\log_2 x(\log_2 x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 x = 0 \quad \vee \quad \log_2 x = 2.$$

La prima fornisce la soluzione $x = 1$ e la seconda la soluzione $x = 4$, entrambe accettabili. L'equazione si può risolvere anche con il cambio di variabile $\log_2 x = t$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{2x}{2x+1} > 1$$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq -\frac{1}{2}$, la disequazione equivale a

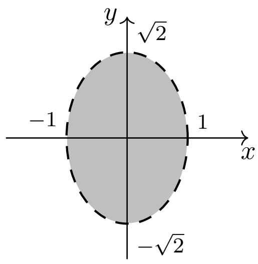
$$\frac{2x}{2x+1} - 1 > 0 \quad ; \quad \frac{2x - 2x - 1}{2x+1} > 0 \quad ; \quad \frac{-1}{2x+1} > 0 \quad ; \quad \frac{1}{2x+1} < 0 \quad ; \quad 2x+1 < 0 \quad ; \quad x < -\frac{1}{2}.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + \dfrac{y^2}{2} - 1 < 0$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 + \frac{y^2}{2} < 1$$

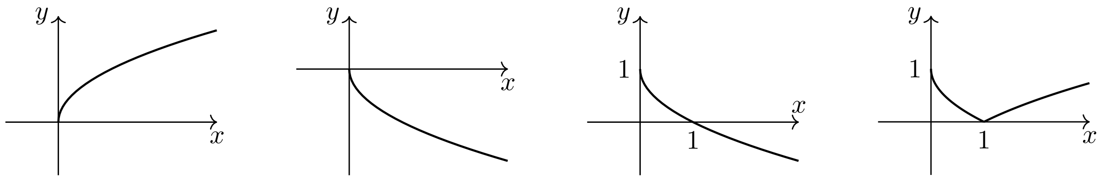


e questa individua la regione interna all'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$. La regione è indicata in grigio nella figura qui sopra.

Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = \left|1 - \sqrt{x}\right|$

✎

Le trasformazioni sono queste:



$x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto -\sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto |1 - \sqrt{x}|$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln(1-x)}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln(1-x)} = \frac{1^- - 1}{\ln(1-1^-)} = \frac{0^-}{\ln 0^+} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\big(1 - \sqrt{x}\big)^2$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \big(1-\sqrt{x}\big)^2 + x \cdot 2\big(1-\sqrt{x}\big) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \big(1-\sqrt{x}\big)^2 - \sqrt{x}\big(1-\sqrt{x}\big).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{3x-2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + \frac{2}{x} + c.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = 2xy - 3x + y$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2y - 3 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 15/01/2020

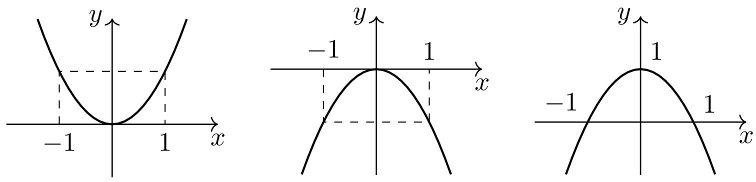
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{-x} & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile nell'intervallo $[-1, 1]$. Si dica perché non è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$ ma si provi che comunque la tesi è vera.

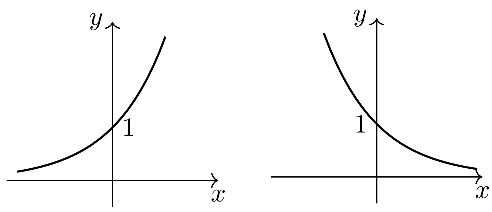
✎

Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.



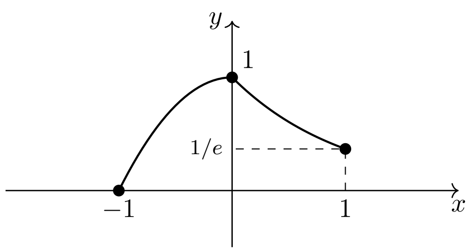
$x \mapsto x^2$ $\qquad$ $x \mapsto -x^2$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - x^2$

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono le seguenti.



$x \mapsto e^x$ $\qquad$ $x \mapsto e^{-x}$

Il grafico della funzione f, nell'intervallo $[-1, 1]$, è pertanto quello qui sotto.



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione polinomiale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra essa è una funzione esponenziale.

Si ha

$$f(0) = 1 - 0^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1.$$

La funzione pertanto è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ -e^{-x} & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(-2x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(-e^{-x}) = -1.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0.

Passiamo all'ultima domanda: il teorema di Lagrange non è applicabile alla funzione f nell'intervallo $[-1,1]$ in quanto la funzione non è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo, e questa è una delle ipotesi del teorema.

È richiesto di provare che comunque la tesi è vera. La tesi del teorema di Lagrange è che ci sia un punto c nell'intervallo $(-1,1)$, in cui

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{1/e-0}{2} = \frac{1}{2e}.$$

Il punto c deve stare nell'intervallo $(-1,0)$, dato che nell'intervallo $(0,1)$ la derivata è negativa. Quindi poniamo

$$-2x = \frac{1}{2e}, \text{ che ha per soluzione } x = -\frac{1}{4e} \ (= c), \text{ che in effetti appartiene a } (-1,0).$$

ESERCIZIO 2. Dati i tre vettori

$$v^1 = (1,0,-2) \quad , \quad v^2 = (-2,1,0) \quad , \quad v^3 = (-1,2,-6)$$

si provi che essi non formano una base di $\mathbb{R}^3$. Si provi che il vettore $(-2,3,-8)$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$ generato dai tre vettori e lo si scriva come combinazione lineare dei tre. Si dica infine se è vero che nessuno dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ appartiene ad $\mathcal{S}$.

✎

Vediamo se i tre vettori sono dipendenti o indipendenti. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice quadrata

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di V (calcolato rispetto alla prima riga) è

$$\det V = 1\cdot(-6) - 2\cdot(-3) = 0.$$

I vettori sono quindi linearmente dipendenti e pertanto non formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Un modo per provare che il vettore $(-2,3,-8)$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$ generato dai tre vettori è questo: dei tre vettori due sono sufficienti per generare lo stesso sottospazio $\mathcal{S}$, dato che uno dipende dagli altri due. Possiamo dire che v^1 e v^2 sono indipendenti, dato che il rango delle prime due righe della matrice V è 2. Consideriamo allora la matrice

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}. \quad \text{Il determinante è } 1\cdot(-8) - 2\cdot(-4) = 0.$$

Il vettore $(-2,3,-8)$ è allora dipendente da v^1 e v^2, cioè si può scrivere come loro combinazione lineare, cioè appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$.

È richiesto ora di scrivere $(-2,3,-8)$ come combinazione lineare dei tre vettori di partenza. Possiamo anche qui considerare soltanto v^1 e v^2 e porre poi uguale a zero il coefficiente di v^3. Poniamo

$$(-2,3,-8) = av^1 + bv^2 \quad \Leftrightarrow \quad (-2,3,-8) = a(1,0,-2) + b(-2,1,0) \quad \Leftrightarrow \quad (-2,3,-8) = (a-2b, b, -2a)$$

Questo equivale a

$$\begin{cases} a - 2b = -2 \\ b = 3 \\ -2a = -8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases}$$

La risposta da dare è quindi

$$(-2,3,-8) = 4v^1 + 3v^2 + 0v^3.$$

Va osservato però che se ci si accorge che il vettore $(-2, 3, -8)$ è la somma dei tre vettori iniziali, si può rispondere più semplicemente che $(-2, 3, -8) = 1v^1 + 1v^2 + 1v^3$. Questo prova contemporaneamente che il vettore sta in $\mathcal{S}$ e trova una combinazione lineare che lo esprime.

Dobbiamo dire infine se è vero che nessuno dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ appartiene ad $\mathcal{S}$, il sottospazio generato dai tre vettori. Basta fare una semplice verifica, molto simile a quanto appena fatto con l'altro vettore. I tre determinanti

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

sono tutti diversi da zero: questo vuol dire che i tre vettori fondamentali non dipendono dai vettori dati e quindi l'affermazione è vera.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{1 + xy}{y}\right)$$

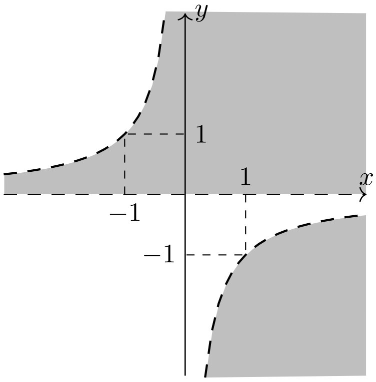
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si trovino gli eventuali punti stazionari di f. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si scriva la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sull'asse y.

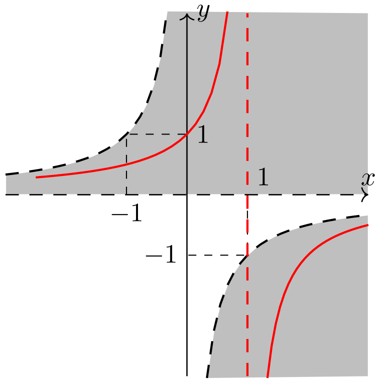
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \dfrac{1 + xy}{y} > 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} 1 + xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 + xy < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} xy > -1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} xy < -1 \\ y < 0. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.





Un punto interno al dominio è ad esempio $(0, 1)$, mentre un punto di frontiera è ad esempio l'origine.

Gli eventuali punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\frac{1+xy}{y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot y = \frac{y}{1 + xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\frac{1+xy}{y}} \cdot \frac{xy - 1 - xy}{y^2} = -\frac{1}{y(1 + xy)}.$$

Nessuna delle due derivate parziali si annulla nel dominio. Quindi non ci sono punti stazionari.

La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione

$$\ln\left(\frac{1 + xy}{y}\right) = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{1 + xy}{y} = 1 \quad \text{cioè} \quad 1 + xy = y \quad \text{cioè} \quad (x - 1)y = -1.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti del dominio che stanno su di un'iperbole con centro $(1, 0)$, asintoti paralleli agli assi cartesiani e rami nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. Si vede facilmente che l'iperbole, disegnata in rosso nella figura qui sopra a destra, è interamente contenuta nel dominio della funzione.

L'ultima domanda richiede di scrivere la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sull'asse y.

$$f\Big|_{\text{asse } y} = f\Big|_{x=0} = \ln\left(\frac{1}{y}\right) \quad , \text{ evidentemente con } y > 0.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 16/01/2020

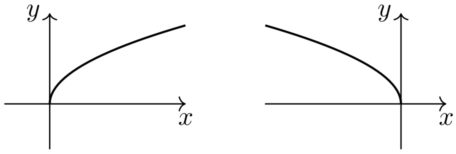
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & -1 \le x \le 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile nell'intervallo $[-1, 1]$. Si dica se è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$ e si dica se la tesi è vera. Si calcoli infine la pendenza della retta che passa per gli estremi del grafico di f.

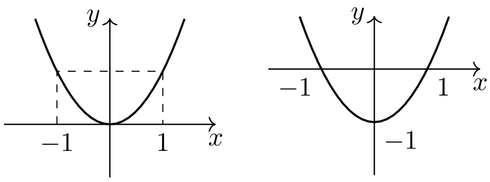
✎

Le trasformazioni della funzione radice sono riportate qui sotto.



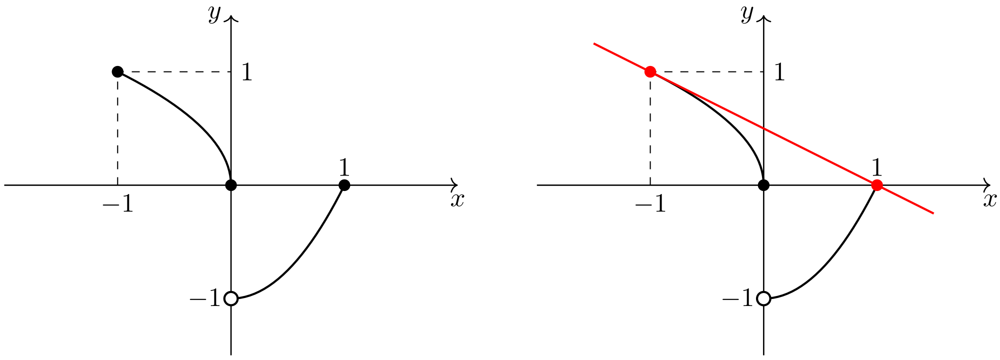
$x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{-x}$

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione polinomiale sono le seguenti.



$x \mapsto x^2$ $\qquad$ $x \mapsto x^2 - 1$

Il grafico della funzione f, nell'intervallo $[-1, 1]$, è pertanto quello qui sotto a sinistra.



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione non è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione radice. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione radice, mentre a destra essa è una funzione polinomiale.

Si ha

$$f(0) = \sqrt{0} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1.$$

La funzione pertanto non è continua in 0.

Non essendo continua la funzione non è nemmeno derivabile in $x = 0$.

Il teorema di Weierstrass non è applicabile alla funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$, dato che la funzione non è continua in tutto l'intervallo. La tesi potrebbe però essere vera ugualmente. Sulla base del grafico possiamo affermare che esiste un punto di massimo ($x_M = -1$) ma non esiste un punto di minino (dato che nell'origine la funzione assume il valore 0 e non -1). Possiamo anche dire che l'immagine di f è l'intervallo $(-1, 1]$, che non ha minimo. La tesi quindi è falsa.

Infine la pendenza della retta che passa per gli estremi del grafico di f. La retta è raffigurata in rosso nella figura a destra della pagina precedente. Gli estremi del grafico di f sono i punti $(-1, 1)$ e $(1, 0)$. La pendenza della retta che passa per questi punti è

$$m = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \text{(Si ricordi la tesi del teorema di Lagrange.)}$$

ESERCIZIO 2. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + z - t = 1 \\ -y + z + t = 2 \\ x + y - 2t = -1 \end{cases}$$

si dica perché, in base al teorema di Rouché–Capelli, esso ha soluzioni. Si dica se il vettore $(-1, 0, 2, 0)$ è oppure no una delle soluzioni. Si trovino tutte le soluzioni del sistema e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema sono

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Possiamo osservare che nella matrice $A|b$ la prima riga è la somma delle altre due. Quindi il rango non può essere 3. Esso è certamente 2 per entrambe le matrici, dato che ad esempio il minore formato dalle prime due righe e prime due colonne è diverso da zero. In base al teorema di Rouché–Capelli, essendo $r(A) = r(A|b)$, il sistema ha almeno una soluzione.

Per dire se il vettore $(-1, 0, 2, 0)$ è oppure no una delle soluzioni basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} -1 + 2 = 1 \\ 2 = 2 \\ -1 = -1 \end{cases} \qquad \text{e quindi si tratta di una delle soluzioni.}$$

Troviamo le soluzioni del sistema. Coerentemente con il minore indicato in precedenza, possiamo eliminare la terza equazione e rendere parametri la z e la t. Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x = 1 - z + t \\ -y = 2 - z - t \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 - z + t \\ y = -2 + z + t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big(1 - z + t, -2 + z + t, z, t\big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere queste come

$$\mathcal{S} = \Big\{ (1, -2, 0, 0) + z\big(-1, 1, 1, 0\big) + t\big(1, 1, 0, 1\big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big(-1, 1, 1, 0\big)$ e $\big(1, 1, 0, 1\big)$ formano una base di $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{1+xy}}$$

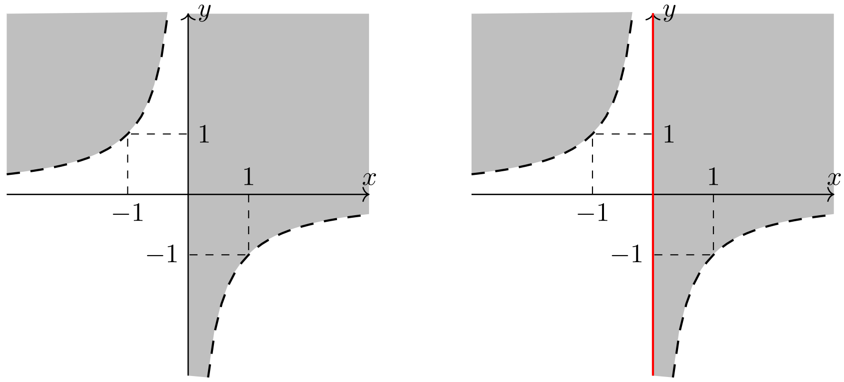
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si trovino gli eventuali punti stazionari di f. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si scriva la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sull'asse x.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1+xy \neq 0 \\ \dfrac{x}{1+xy} \geq 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+xy > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 1+xy < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ xy > -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ xy < -1. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra.



Un punto interno al dominio è ad esempio $(1,0)$, mentre un punto di frontiera è ad esempio l'origine.

Gli eventuali punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+xy}}} \cdot \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+xy}}(1+xy)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+xy}}} \cdot \left(-\frac{x^2}{(1+xy)^2}\right).$$

Nessuna delle due derivate parziali si annulla nel dominio.[5] Quindi non ci sono punti stazionari.

La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{\frac{x}{1+xy}} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{x}{1+xy} = 0 \quad \text{cioè} \quad x = 0.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti dell'asse y, indicati in rosso nella figura qui sopra a destra.

L'ultima domanda richiede di scrivere la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sull'asse x.

$$f\Big|_{\text{asse } x} = f\Big|_{y=0} = \sqrt{x} \quad \text{evidentemente con } x \geq 0.$$

[5]Si noti che $x = 0$ è accettabile per l'esistenza della funzione f, ma non per le sue derivate. Infatti $x = 0$ annulla il denominatore delle derivate parziali.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/02/2020

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2(1+2x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2x)}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+2x} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Domanda 3. Trovare la combinazione lineare dei vettori $(1,-1,2)$ e $(1,0,-1)$ di coefficienti 1 e -1

✎

$$1\cdot(1,-1,2) + (-1)\cdot(1,0,-1) = (1,-1,2) + \cdot(-1,0,1) = (0,-1,3).$$

Domanda 4. Calcolare il prodotto interno dei vettori $(1,0,-1,1)$ e $(2,1,0,-1)$

✎

$$\big\langle(1,0,-1,1),(2,1,0,-1)\big\rangle = 2+0+0-1 = 1.$$

Domanda 5. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

✎

$$\text{Calcolandolo rispetto alla 3° colonna:}\quad \det\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 = -4.$$

Domanda 6. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

✎

Il determinante di A è -2. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}.\quad \text{La matrice aggiunta è}\quad \begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.\quad \text{La matrice inversa è}\quad -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Domanda 7. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x,y) = -2x^2 + 2xy - y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

I minori principali di Nord-Ovest sono $M_1 = a_{11} = -2$ e $M_2 = \det A = 1$, quindi negativo quello di ordine dispari e positivo quello di ordine pari. La forma è definita negativa.

Domanda 8. Calcolare la derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x,y) = x + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = 1 - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x^2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Domanda 9. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = y^2 + xy + x$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(2, -1)$.

Domanda 10. Calcolare la matrice Hessiana della funzione della domanda 9

✎

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y+1) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y+1) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y+x) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2y+x) = 2.$$

Quindi la matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/02/2020

ESERCIZIO 1. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \\ -x + 2z + t = 0 \end{cases}$$

si dica perché il sistema ha certamente soluzioni. Si trovi la dimensione dello spazio S delle sue soluzioni. Si risolva il sistema e si indichi una base di S.

✎

Trattandosi di un sistema omogeneo, possiamo affermare che per questo motivo il sistema ha certamente soluzioni. I sistemi omogenei hanno questa caratteristica, dato che hanno certamente la soluzione banale (il vettore nullo).

La dimensione dello spazio S delle sue soluzioni è data in generale dalla formula $n - r(A)$, dove n è il numero di variabili e $r(A)$ è il rango della matrice del sistema. Tale matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo osservare che nella matrice A la prima riga è la somma delle altre due. Quindi il rango non può essere 3. Esso è certamente 2, dato che ad esempio il minore della sottomatrice evidenziata in grigio è diverso da zero.

Troviamo ora tutte le soluzioni del sistema. Coerentemente con il minore indicato in precedenza, possiamo eliminare la seconda equazione e rendere parametri la z e la t. Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y = -z - 2t \\ -x = -2z - t \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 2z + t \\ y = 3z + 3t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$S = \Big\{ \big(2z + t, 3z + 3t, z, t\big) \;:\; z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere queste come

$$S = \Big\{ z\big(2, 3, 1, 0\big) + t\big(1, 3, 0, 1\big) \;:\; z, t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big(2, 3, 1, 0\big)$ e $\big(1, 3, 0, 1\big)$ formano una base di S.

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x, y) = x + \ln\left(\frac{y-1}{x-1}\right)$$

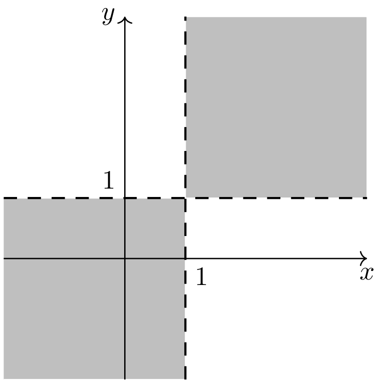
si determini e si disegni il suo dominio. Si provi che non ci sono punti stazionari. Si verifichi (graficamente) che l'iperbole di equazione $(x-1)(y-1) = 1$ è interamente contenuta nel dominio di f. Si scriva infine la restrizione di f ai punti di questa curva.

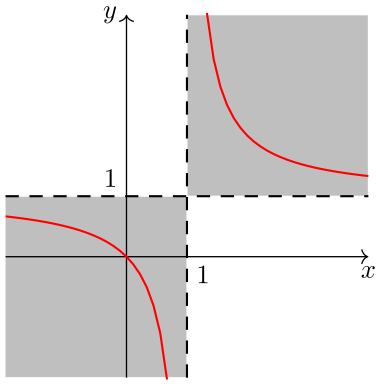
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \dfrac{y-1}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} y - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y - 1 < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y > 1 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y < 1 \\ x < 1. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.





Vediamo se ci sono punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{\frac{y-1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{y-1}{(x-1)^2} \right) = 1 - \frac{x-1}{y-1} \cdot \frac{y-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\frac{y-1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}.$$

La derivata rispetto ad y non si può annullare e quindi è provato che non ci sono punti stazionari.

Verifichiamo ora che l'iperbole di equazione $(x-1)(y-1) = 1$ è interamente contenuta nel dominio di f. Lo possiamo fare sulla base del grafico. Si tratta di un'iperbole di centro $(1, 1)$, asintoti paralleli agli assi cartesiani e rami che stanno nei corrispondenti del primo e terzo quadrante. L'iperbole è raffigurata in rosso nella figura qui sopra a destra ed è evidentemente tutta contenuta nel dominio della funzione.

Passiamo all'ultima domanda: scrivere la restrizione di f ai punti dell'iperbole. Dall'equazione dell'iperbole

$$(x-1)(y-1) = 1 \quad \text{possiamo ricavare} \quad y - 1 = \frac{1}{x-1}$$

e quindi possiamo scrivere

$$f\Big|_{(x-1)(y-1)=1} = f\Big|_{y-1=\frac{1}{x-1}} = x + \ln\left(\frac{\frac{1}{x-1}}{x-1} \right) = x + \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2} \right).$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/02/2020

Domanda 1. Riscrivere l'espressione $xe^{-x} + \sqrt{x}e^{2x}$ raccogliendo $\sqrt{x}e^x$

✎

$$xe^{-x} + \sqrt{x}e^{2x} = \sqrt{x}e^x \left(\frac{xe^{-x}}{\sqrt{x}e^x} + \frac{\sqrt{x}e^{2x}}{\sqrt{x}e^x} \right) = \sqrt{x}e^x \left(\sqrt{x}e^{-2x} + e^x \right).$$

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{1}{\ln(\sqrt[3]{e})} + \log_2 \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \right)$

✎

$$\frac{1}{\ln(\sqrt[3]{e})} + \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) = \frac{1}{\ln e^{1/3}} + \log_2 2^{-2/3} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2^{2x} + 2^x - 2 = 0$$

✎

Con il cambio di variabile $2^x = t$ l'equazione diventa

$$t^2 + t - 2 = 0, \quad \text{cioè} \quad (t-1)(t+2) = 0, \quad \text{che ha le soluzioni} \quad t = -2 \ \vee \ t = 1.$$

Tornando alla variabile x l'equazione $2^x = -2$ non ha soluzioni, mentre la $2^x = 1$ fornisce la soluzione $x = 0$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{x+1}{2x+1} > 2$$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq -\frac{1}{2}$, la disequazione equivale a

$$\frac{x+1}{2x+1} - 2 > 0 \quad ; \quad \frac{x+1-4x-2}{2x+1} > 0 \quad ; \quad \frac{-3x-1}{2x+1} > 0 \quad ; \quad \frac{3x+1}{2x+1} < 0 \quad ; \quad -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 < 0$

✎

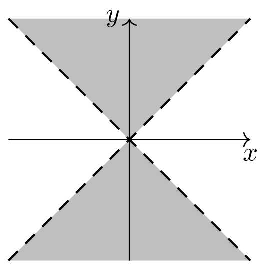
La disequazione equivale a

$$(x-y)(x+y) < 0, \quad \text{che a sua volta equivale al doppio sistema} \quad \begin{cases} x - y > 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Conviene scrivere l'ultimo come

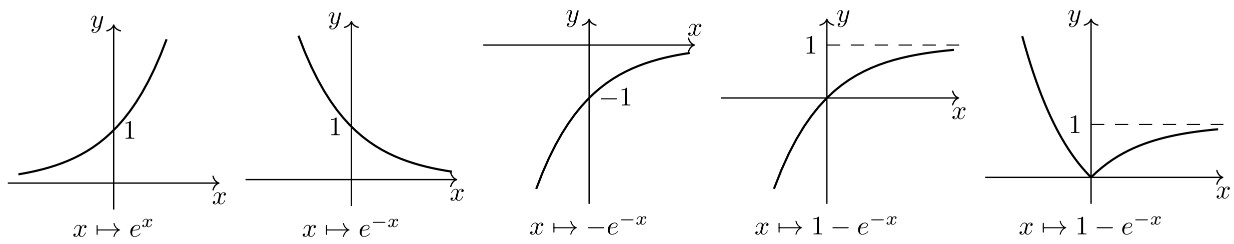
$$\begin{cases} y < x \\ y < -x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y > x \\ y > -x. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato in grigio qui a fianco.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = \left|1 - e^{-x}\right|$

✎



Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to(-1)} \frac{\ln\big((x+1)^2\big)}{x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to(-1)} \frac{\ln\big((x+1)^2\big)}{x} = \frac{\ln\big((-1+1)^2\big)}{-1} = \frac{\ln 0^+}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$

Si noti che l'argomento del logaritmo $(x+1)^2$ tende a 0^+ sia per $x \to (-1)^+$ sia per $x \to (-1)^-$, dato che il quadrato lo rende certamente positivo.

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\big(1 - e^{-x}\big)^2$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \big(1 - e^{-x}\big)^2 + x \cdot 2\big(1 - e^{-x}\big)\big(-e^{-x} \cdot (-1)\big) = \big(1 - e^{-x}\big)^2 + 2x\big(1 - e^{-x}\big)e^{-x}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{-1/2} + x^{1/2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y - xy + x$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy - y + 1 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - y + 1 = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

I punti stazionari sono quindi $(0,1)$ e $(1,-1)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/02/2020

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = x + \ln(1 + x^2)$$
se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di f. Si dica infine, basandosi sul grafico, quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$.

✎

La condizione di esistenza per la funzione è

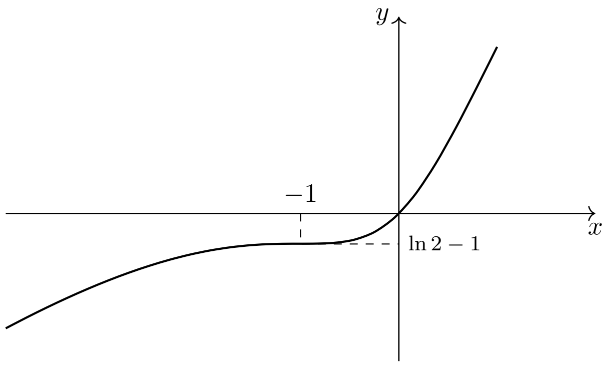
$1 + x^2 > 0$, che è verificata qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Il dominio quindi è tutto $\mathbb{R}$.

I limiti significativi sono pertanto per x che tende a $\pm\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} \big(x + \ln(1 + x^2)\big) = +\infty + \ln(+\infty) = +\infty + \infty = +\infty.$$
$$\lim_{x\to-\infty} \big(x + \ln(1 + x^2)\big) = -\infty + \ln(+\infty) = -\infty + \infty \quad \text{(forma indeterminata)}.$$
La forma si può risolvere in vari modi: ne propongo due.
Raccogliendo x si ha
$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{\ln(1 + x^2)}{x}\right).$$
Il limite del quoziente (forma ∞/∞) si può calcolare con il teorema di De l'Hôpital:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + x} = \frac{2}{0 + \infty} = 0.$$
Quindi
$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{\ln(1 + x^2)}{x}\right) = -\infty \cdot (1 + 0) = -\infty.$$
Oppure, considerando che $\ln(1 + x^2)$, per $x \to -\infty$, è un infinito trascurabile rispetto ad x,[6] possiamo concludere direttamente che
$$\lim_{x\to-\infty} \big(x + \ln(1 + x^2)\big) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$
Possiamo anche osservare che nell'origine la funzione assume il valore $f(0) = 0$. Calcoliamo ora la derivata.
$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 + 2x}{1 + x^2} = \frac{(1 + x)^2}{1 + x^2}.$$
I punti stazionari si trovano annullando la derivata.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1 + x)^2}{1 + x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$$
L'unico punto stazionario è $x = -1$.
Per studiare l'andamento della funzione e trovare eventuali punti di massimo o minimo locali e globali dobbiamo studiare il segno della derivata. Si ha
$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1 + x)^2}{1 + x^2} > 0.$$

---
[6] Si osservi che la dimostrazione che $\ln(1+x^2)$ è un infinito trascurabile rispetto ad x è contenuta nel calcolo, fatto poco fa con il teorema di De l'Hôpital, che $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$.

Evidentemente questa disequazione è vera per ogni $x \neq -1$, dove la derivata si annulla. Siamo quindi in presenza di una funzione sempre strettamente crescente, che ha però (in $x = -1$) un punto stazionario. È un caso interessante, peraltro analogo a quanto succede alla funzione $x \mapsto x^3$, che presenta un andamento crescente ma con un punto stazionario che non è né di massimo né di minimo (si dice anche un flesso orizzontale).

Siamo ora in grado di disegnare un possibile grafico di f, nella figura qui sotto a sinistra. Si osservi che nel punto stazionario il valore della funzione è $f(-1) = \ln 2 - 1 \approx -0.31$.



Veniamo all'ultima domanda: dire, basandosi sul grafico, quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$. Dato l'andamento strettamente crescente della funzione, è evidente che l'equazione ha una sola soluzione, che è $x = 0$.

ESERCIZIO 2. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \\ -x + 2z + t = 0 \end{cases}$$

si dica perché il sistema ha certamente soluzioni. Si trovi la dimensione dello spazio S delle sue soluzioni. Si risolva il sistema e si indichi una base di S.

✎

Trattandosi di un sistema omogeneo, possiamo affermare che per questo motivo il sistema ha certamente soluzioni. I sistemi omogenei hanno questa caratteristica, dato che hanno certamente la soluzione banale (il vettore nullo).

La dimensione dello spazio S delle sue soluzioni è data in generale dalla formula $n - r(A)$, dove n è il numero di variabili e $r(A)$ è il rango della matrice del sistema. Tale matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo osservare che nella matrice A la prima riga è la somma delle altre due. Quindi il rango non può essere 3. Esso è certamente 2, dato che ad esempio il minore della sottomatrice evidenziata in grigio è diverso da zero.

Troviamo ora tutte le soluzioni del sistema. Coerentemente con il minore indicato in precedenza, possiamo eliminare la seconda equazione e rendere parametri la z e la t. Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y = -z - 2t \\ -x = -2z - t \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 2z + t \\ y = 3z + 3t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$S = \Big\{ \big(2z + t, 3z + 3t, z, t\big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere queste come

$$S = \Big\{ z\big(2, 3, 1, 0\big) + t\big(1, 3, 0, 1\big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big(2, 3, 1, 0\big)$ e $\big(1, 3, 0, 1\big)$ formano una base di S.

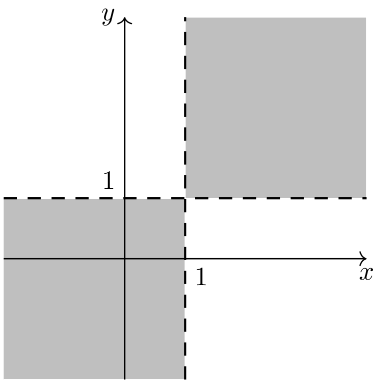
ESERCIZIO 3. Data la funzione
$$f(x,y) = x + \ln\left(\frac{y-1}{x-1}\right)$$
si determini e si disegni il suo dominio. Si provi che non ci sono punti stazionari. Si verifichi che l'iperbole di equazione $(x-1)(y-1) = 1$ è interamente contenuta nel dominio di f. Si scriva infine la restrizione di f ai punti di questa curva.

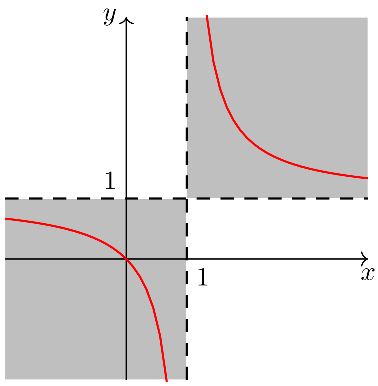
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \dfrac{y-1}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} y-1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-1<0 \\ x-1<0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y>1 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} y<1 \\ x<1. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.





Vediamo se ci sono punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{\frac{y-1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{y-1}{(x-1)^2}\right) = 1 - \frac{x-1}{y-1} \cdot \frac{y-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\frac{y-1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}.$$

La derivata rispetto ad y non si può annullare e quindi è provato che non ci sono punti stazionari.

Verifichiamo ora che l'iperbole di equazione $(x-1)(y-1) = 1$ è interamente contenuta nel dominio di f. Lo possiamo fare sulla base del grafico. Si tratta di un'iperbole di centro $(1,1)$, asintoti paralleli agli assi cartesiani e rami che stanno nei corrispondenti del primo e terzo quadrante. L'iperbole è raffigurata in rosso nella figura qui sopra a destra ed è evidentemente tutta contenuta nel dominio della funzione.

Passiamo all'ultima domanda: scrivere la restrizione di f ai punti dell'iperbole. Dall'equazione dell'iperbole

$$(x-1)(y-1) = 1 \quad \text{possiamo ricavare} \quad y-1 = \frac{1}{x-1}$$

e quindi possiamo scrivere

$$f\Big|_{(x-1)(y-1)=1} = f\Big|_{y-1=\frac{1}{x-1}} = x + \ln\left(\frac{\frac{1}{x-1}}{x-1}\right) = x + \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

PROVA online di MATEMATICA

Vicenza, 26/06/2020

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ per $D(x) = x + 1$.

(i) * $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2$, $R(x) = 1$

(ii) $Q(x) = x^4 + x^3 - x^2$, $R(x) = 1$

(iii) $Q(x) = x^4 - x^2 + x$, $R(x) = 1$

(iv) $Q(x) = x^4 - x^3$, $R(x) = 1$

✎

Possiamo usare la divisione di Ruffini, dato che il divisore è del tipo $x + a$.

	1	0	0	1	0	1
-1		-1	1	-1	0	1
	1	-1	1	0	0	1

Pertanto il quoziente è $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2$ e il resto è $R = 1$.

Domanda 2. L'espressione $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\sqrt{e}$ è uguale a

(i) * -1

(ii) $-1/2$

(iii) $1/2$

(iv) -2

✎

$$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\sqrt{e} = \log_2 2^{-1/2} - \ln e^{1/2} = -1/2 - 1/2 = -1.$$

Domanda 3. Le soluzioni dell'equazione $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$ sono

(i) * $x = \log_2 3$

(ii) $x = \log_2 3$ oppure $x = -\frac{1}{2}$

(iii) $x = -1$ oppure $x = 3$

(iv) $x = \log_2 3$ oppure $x = \frac{1}{2}$

✎

Con il cambio di variabile $2^x = t$ l'equazione diventa

$$t^2 - 2t - 3 = 0, \quad \text{cioè} \quad (t+1)(t-3) = 0, \quad \text{che ha le soluzioni} \quad t = -1 \ \vee \ t = 3.$$

Tornando alla variabile x, l'equazione $2^x = -1$ non ha soluzioni, mentre $2^x = 3$ fornisce la soluzione $x = \log_2 3$.

Domanda 4. Le soluzioni della disequazione $\dfrac{x}{x+1} \geq 2$ sono

(i) * l'intervallo $[-2, -1)$

(ii) l'intervallo $(-2,-1)$

(iii) l'intervallo $(-1,-2]$

(iv) l'insieme $(-\infty,-2] \cup (-1,+\infty)$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq -1$, la disequazione equivale a

$$\frac{x}{x+1} - 2 \geq 0 \quad ; \quad \frac{x-2x-2}{x+1} \geq 0 \quad ; \quad \frac{-x-2}{x+1} \geq 0 \quad ; \quad \frac{x+2}{x+1} \leq 0.$$

Quest'ultima è verificata per valori interni a -2 e -1, con -2 compreso e -1 escluso. Pertanto le soluzioni sono date dall'intervallo $[-2,-1)$.

Domanda 5. Le soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 > 0$ sono

(i) * una regione che ha per frontiera due rette

(ii) una regione al di sopra di una parabola

(iii) una regione che ha per frontiera un'iperbole

(iv) tutto il piano ad eccezione dell'origine

✎

La disequazione equivale a $(x-y)(x+y) > 0$, e quindi ai due sistemi

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y>0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-y<0 \\ x+y<0. \end{cases}$$

Possiamo dire subito che la risposta corretta è "una regione che ha per frontiera due rette".

Domanda 6. Usando le trasformazioni grafiche elementari si arriva a dire che il grafico della funzione $f(x) = |\ln(-x)|$ è

(i) * tutto contenuto nel secondo quadrante

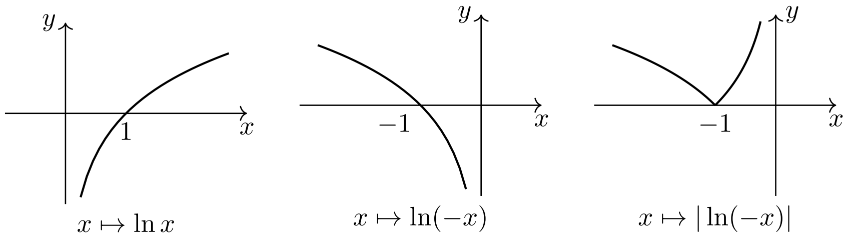
(ii) quello di una funzione monotona

(iii) quello di una funzione definita in tutto $\mathbb{R}$

(iv) privo di punti angolosi

✎

Le trasformazioni sono queste.



Risulta quindi che il grafico della funzione è tutto contenuto nel secondo quadrante.

Domanda 7. L'immagine della funzione $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{-x}$ è

(i) * l'intervallo $(0, e]$

(ii) l'intervallo $[0, e]$

(iii) l'intervallo $(0, 1]$

(iv) l'intervallo $(-\infty, -e]$

✎

Il grafico è quello qui sopra. L'intervallo $[-1, +\infty)$ del dominio è rappresentato in blu sull'asse x. La sua immagine è rappresentata in rosso sull'asse y. Si noti che il valore 0 è da escludere in quanto la funzione non si annulla mai. L'immagine è data quindi dall'intervallo $(0, e]$.

Domanda 8. Il limite $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\ln^2(1 + x)}{x}$ è

(i) * $-\infty$

(ii) $+\infty$

(iii) 1

(iv) -1

✎

Con l'algebra dei limiti $$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{\ln^2(1 + x)}{x} = \frac{\ln^2(1 + (-1)^+)}{-1} = \frac{\ln^2(0^+)}{-1} = \frac{(-\infty)^2}{-1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty.$$

Domanda 9. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è

(i) * continua ma non derivabile in 0

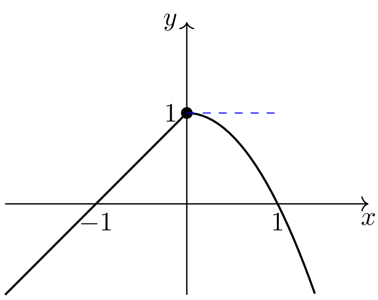
(ii) continua in 0 da destra ma non da sinistra

(iii) derivabile e quindi continua in 0

(iv) invertibile in tutto $\mathbb{R}$

✎

Ecco il grafico della funzione.



La funzione è evidentemente continua in 0. Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo osservare che la derivata sinistra è data dalla pendenza della retta, cioè 1, mentre la derivata destra è zero (come indicato nella figura dalla semitangente destra tratteggiata), dato che il punto $(0, 1)$ è il vertice della parabola (oppure considerando che la derivata di $1 - x^2$ è $-2x$ e questa si annulla in $x = 0$).

Domanda 10. Si dica quale tra i seguenti è un corretto enunciato del teorema degli zeri.

(i) * Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, che assuma valori di segno opposto agli estremi di questo intervallo, si annulla in almeno un punto dell'intervallo

(ii) Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è tale per cui $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui $f(c) = 0$

(iii) Con le stesse ipotesi del teorema di Weierstrass in un intervallo $[a, b]$, se inoltre $f(a) + f(b) < 0$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui $f(c) = 0$

(iv) Se una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è tale per cui $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui $f'(c) = 0$

✎

Osservo solo che nella risposta 2 manca l'ipotesi di continuità; nella risposta 3 è errata l'ipotesi $f(a) + f(b) < 0$; nella risposta 4 è errata la tesi: non si tratta della derivata.

Domanda 11. La derivata della funzione $f(x) = x^2(1 - \ln x)$ è

(i) * $x - 2x \ln x$

(ii) $2x(1 - \ln x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$

(iii) $2x \cdot (-\frac{1}{x})$

(iv) $x - 2 \ln x$

✎

$$f'(x) = 2x(1 - \ln x) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = 2x - 2x \ln x - x = x - 2x \ln x.$$

Domanda 12. Il polinomio $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ è

(i) * crescente nell'insieme $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

(ii) crescente nell'intervallo $(-2, 3)$

(iii) decrescente nell'insieme $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

(iv) crescente in tutto $\mathbb{R}$

✎

La derivata è
$$p'(x) = x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3).$$
Questo dice che i punti stazionari sono -2 e 3. Dato che la derivata è positiva per valori esterni, possiamo affermare che il polinomio è crescente per $x < -2$ e per $x > 3$, quindi nell'insieme $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

Domanda 13. L'integrale $\displaystyle\int \frac{1 + x^2}{x^3} dx$ è

(i) * $-\frac{1}{2x^2} + \ln |x| + c$

(ii) $-\frac{2}{x^2} + \ln |x| + c$

(iii) $-\frac{1}{2x} + \ln |x| + c$

(iv) $-\frac{3}{x^4} + \ln |x| + c$

✎

$$\int \frac{1 + x^2}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \ln |x| + c = -\frac{1}{2x^2} + \ln |x| + c.$$

Domanda 14. L'integrale $\int_{-1}^{1} e^{-2x} dx$ vale

(i) * $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$

(ii) $-\frac{1}{2}(e^{-2} - e^2) + c$

(iii) $\frac{1}{2}(e^{-2} - e^2)$

(iv) $-2(e^{-2} - e^2)$

✎

$$\int_{-1}^{1} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-2e^{-2x})dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(e^{-2} - e^2) = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}).$$

Domanda 15. Si dica quale tra le seguenti è una corretta definizione di vettori linearmente indipendenti (l.i.) (c.l. significa combinazione lineare)

(i) * I vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono l.i. se il vettore nullo si può ottenere come loro c.l. solo se i coefficienti della c.l. sono tutti nulli

(ii) I vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono l.i. se il vettore nullo si può ottenere come loro c.l. solo se i coefficienti della c.l. non sono tutti nulli

(iii) I vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono l.i. se la loro c.l. è banale, cioè ha tutti i coefficienti nulli

(iv) I vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono l.i. se la loro c.l. banale, cioè con tutti i coefficienti nulli, è il vettore nullo

✎

Osservo solo che nella risposta 2 si parla di coefficienti non tutti nulli, anziché tutti nulli; nella risposta 3 si fa riferimento al fatto che la combinazione lineare sia banale, senza dire a che cosa deve essere uguale tale combinazione; la risposta 4 afferma una cosa vera per qualunque insieme di vettori (anche linearmente dipendenti), cioè che se prendo tutti i coefficienti nulli ottengo certamente il vettore nullo.

Domanda 16. Tra le seguenti coppie di vettori indicare quella in cui i due vettori sono ortogonali.

(i) * $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e $(-1, 2, 6)$

(ii) $(1, -2, 3)$ e $(-1, 1, -1)$

(iii) $(1, 2, -3)$ e $(-2, 1, 1)$

(iv) $(0, -1, 1)$ e $(-1, -1, 1)$

✎

Deve annullarsi il prodotto interno dei due vettori. L'unico caso in cui questo avviene è con i vettori $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e $(-1, 2, 6)$. Infatti

$$\langle(1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}), (-1, 2, 6)\rangle = 1 \cdot (-1) + (-\tfrac{1}{2}) \cdot 2 + \tfrac{1}{3} \cdot 6 = -1 - 1 + 2 = 0.$$

Negli altri casi si ha

$$\langle(1, -2, 3), (-1, 1, -1)\rangle = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -1 - 2 - 3 = -6.$$

$$\langle(1, 2, -3), (-2, 1, 1)\rangle = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -2 + 2 - 3 = -3.$$

$$\langle(0, -1, 1), (-1, -1, 1)\rangle = 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 + 1 + 1 = 2.$$

Domanda 17. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è

- risposta corretta 2

✎

Detta A la matrice, risulta (rispetto alla seconda riga) $\det A = -1 \cdot (-1+2) + 1 \cdot (-1+2) = -1+1 = 0$. Pertanto il rango di A non è 3. Osservando che il minore principale di Nord-Ovest di ordine 2 vale 1, possiamo affermare che il rango è 2.

Domanda 18. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta, relativamente al rango di una matrice $m \times n$.

(i) * Il rango della matrice è il massimo numero di righe linearmente indipendenti

(ii) Il rango della matrice è il minimo tra m ed n

(iii) Il rango della matrice è il determinante di ordine massimo presente nella matrice

(iv) Il rango della matrice è l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate della matrice stessa

✎

Osservo che la risposta 2 è errata perché il rango può essere minore del minimo tra m ed n (ad esempio nella matrice della Domanda 17 il minimo tra m ed n è 3, mentre il rango è 2); nella risposta 3: il rango non è un determinante, ma è l'ordine di una sottomatrice; nella risposta 4 manca il riferimento che le sottomatrici devono avere determinante diverso da zero.

Domanda 19. La derivata parziale rispetto ad y della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ è

(i) * $-\frac{2x}{y^3}$

(ii) $-\frac{x}{y^3}$

(iii) $\frac{x}{2y^3}$

(iv) $-\frac{x^2}{2y^3}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot (-2)y^{-3} = -\frac{2x}{y^3}.$$

Domanda 20. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = xy^2 - xy - y$ sono

(i) * $(-1,0) \quad \vee \quad (1,1)$

(ii) $(0,-1) \quad \vee \quad (1,1)$

(iii) $(-1,0) \quad \vee \quad (1,-1)$

(iv) $(-1,0)$

✎

Le due derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x - 1.$$

Pertanto dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y^2 - y = 0 \\ 2xy - x - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y(y-1) = 0 \\ 2xy - x - 1 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $y = 0$ oppure $y = 1$. Sostituendo nella seconda questi valori si trova

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 1 \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari sono $(-1,0)$ e $(1,1)$.

PROVA online di MATEMATICA

Vicenza, 26/08/2020

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. Relativamente ai polinomi $P(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 6$ e $D(x) = x^3 - 3$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(i) * il quoziente è $Q(x) = x^2 + 2$

(ii) il resto è $R(x) = 1$

(iii) il polinomio $P(x)$ non è divisibile per il polinomio $D(x)$

(iv) il resto è nullo in base alla regola di Ruffini

✎

Non possiamo usare la divisione di Ruffini, dato che il divisore non è del tipo $x + a$. Effettuando la divisione con il procedimento di Euclide si ha

$$\begin{array}{cccc|l}
x^5 & +2x^3 & -3x^2 & -6 & x^3-3 \\ \cline{5-5}
-x^5 & & +3x^2 & & x^2+2 \\ \cline{1-4}
// & 2x^3 & & -6 & \\
 & -2x^3 & & +6 & \\ \cline{2-4}
 & // & & // &
\end{array}$$

Pertanto il polinomio è divisibile per $x^3 - 3$ (il resto è zero) e il quoziente è $x^2 + 2$.

Domanda 2. La scrittura $\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \dfrac{a}{\sqrt{a}+a}$ è

(i) * vera per ogni a strettamente positivo

(ii) vera per ogni $a \geq 0$

(iii) vera per ogni a reale

(iv) sempre falsa

✎

Anzitutto deve essere $a \geq 0$ (a è argomento di una radice quadrata) e $a \neq 0$, dato che altrimenti il denominatore della frazione a destra si annullerebbe. Quindi deve essere $a > 0$. Questo esclude le risposte 2 e 3.

Ora si tratta di vedere se l'uguaglianza è vera oppure no. Si può verificare che è vera in quanto, moltiplicando numeratore e denominatore della frazione a sinistra per $\sqrt{a}$ si ottiene

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot(1+\sqrt{a})} = \frac{a}{\sqrt{a}+a}.$$

Domanda 3. Le soluzioni dell'equazione $\dfrac{x}{\ln x} = x \ln x$ sono

(i) * $x = 1/e$ oppure $x = e$

(ii) $x = 0$ oppure $x = 1/e$ oppure $x = e$

(iii) $x = e$

(iv) $x = 0$ oppure $x = 1$

✎

Ci sono anzitutto le condizioni di esistenza: $x > 0$ e $\ln x \neq 0$, e quindi $x \neq 1$. Quindi le soluzioni vanno cercate con x positivo e diverso da 1.

L'equazione equivale a

$$\frac{x}{\ln x} - x\ln x = 0 \quad ; \quad \frac{x - x\ln^2 x}{\ln x} = 0 \quad ; \quad x(1-\ln^2 x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ 1 - \ln^2 x = 0.$$

La soluzione $x = 0$ non è accettabile. La seconda equazione equivale a $\ln^2 x = 1$, cioè $\ln x = \pm 1$, che porta a $x = \frac{1}{e}$ oppure $x = e$, entrambe accettabili.

Domanda 4. Le soluzioni della disequazione $\log_2^2 x \geq 1$ sono

(i) * l'insieme $(0, 1/2] \cup [2, +\infty)$

(ii) l'insieme $(-\infty, 1/2] \cup [2, +\infty)$

(iii) l'intervallo $[1/2, 2]$

(iv) l'intervallo $[2, +\infty)$

✎

La condizione di esistenza è $x > 0$. Poi la disequazione equivale a

$$\log_2 x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad \log_2 x \geq 1 \qquad \text{cioè} \qquad x \leq \frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x \geq 2.$$

Con la condizione di esistenza le soluzioni sono $0 < x \leq \frac{1}{2}$ oppure $x \geq 2$, ossia l'insieme $(0, 1/2] \cup [2, +\infty)$.

Domanda 5. Le soluzioni della disequazione $xy - x - 1 > 0$ sono

(i) * un insieme che sta in tutti i quadranti tranne uno

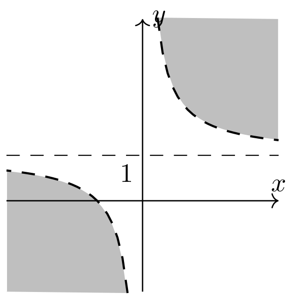
(ii) un insieme che sta in tutti i quadranti

(iii) un insieme che ha per frontiera due rette

(iv) un insieme limitato del piano

✎

La disequazione equivale a $x(y-1) > 1$. L'equazione corrispondente definisce un'iperbole (traslata) con centro in $(0, 1)$, asintoti paralleli agli assi cartesiani e rami che stanno nei corrispondenti del primo e terzo quadrante. Il centro non verifica la disequazione. Le soluzioni sono raffigurate in grigio qui sotto.



Domanda 6. Usando le trasformazioni grafiche elementari si arriva a dire che il grafico della funzione $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ è

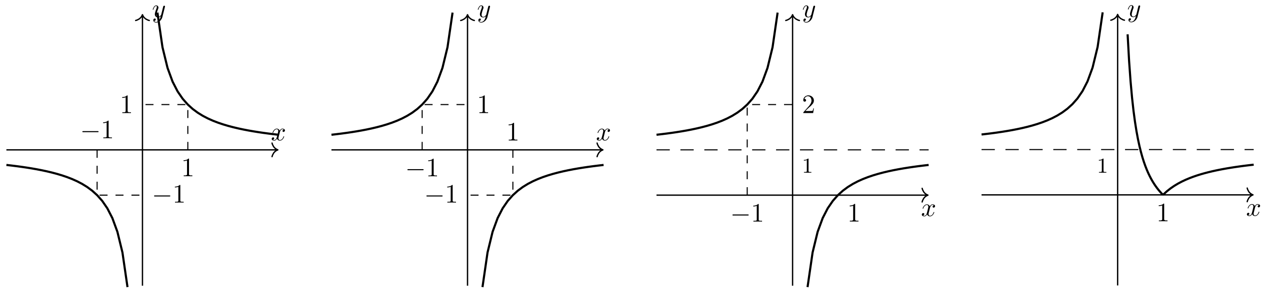
(i) * quello di una funzione suriettiva se il codominio è $[0, +\infty)$

(ii) quello di una funzione monotona

(iii) quello di una funzione definita in tutto $\mathbb{R}$

(iv) privo di punti angolosi

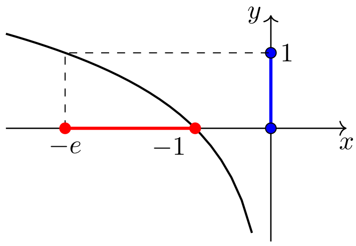
✎



$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto -\frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto 1-\frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto \left|1-\frac{1}{x}\right|$

Le trasformazioni sono riportate qui sopra. Il grafico finale non è quello di una funzione monotona (quindi la risposta 2 è errata). La funzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$ (lo si poteva dire anche subito sulla base dell'espressione della funzione, dato che deve essere $x \neq 0$), quindi la risposta 3 è errata. Il grafico presenta chiaramente un punto angoloso in $x = 1$ e quindi anche la 4 è errata. La risposta 1 è corretta in quanto la funzione assume tutti i valori maggiori o uguali a zero.

Domanda 7. La controimmagine di $[0, 1]$ attraverso la funzione $f(x) = \ln(-x)$ è



(i) * l'intervallo $[-e, -1]$

(ii) l'intervallo $[\frac{1}{e}, 1]$

(iii) l'intervallo $[-1, -e]$

(iv) l'intervallo $(-\infty, 1]$

✎

L'intervallo $[0, 1]$ è rappresentato in blu sull'asse verticale. La controimmagine è data dalle x il cui valore corrispondente della funzione "cade nell'intervallo blu". Si tratta delle x che formano l'intervallo raffigurato in rosso. I due intervalli sono chiusi, cioè contengono i rispettivi estremi.

Domanda 8. Il limite $\lim_{x\to 0^+} \left(-e^{1/x} + \ln x\right)$ è

(i) * $-\infty$

(ii) $+\infty$

(iii) -1

(iv) una forma indeterminata

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim_{x\to 0^+} \left(-e^{1/x} + \ln x\right) = -e^{1/0^+} + \ln 0^+ = -e^{+\infty} + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty.$

Domanda 9. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è

(i) * continua ma non derivabile in 0

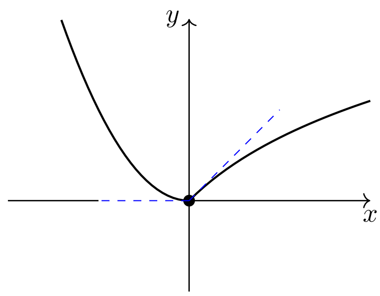
(ii) continua in 0 da destra ma non da sinistra

(iii) derivabile e quindi continua in 0

(iv) invertibile in tutto $\mathbb{R}$

✎

Ecco il grafico della funzione.



La funzione è evidentemente continua in 0. Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo osservare che la derivata sinistra è zero (come indicato nella figura dalla semitangente sinistra tratteggiata), dato che il punto $(0, 0)$ è il vertice della parabola (oppure considerando che la derivata di x^2 è $2x$ e questa si annulla in $x = 0$). La derivata destra è invece 1, dato che $D(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$ e questa in $x = 0$ vale 1. Quindi la funzione non è derivabile in zero. La risposta 4 è errata poiché la funzione non è iniettiva e quindi non è invertibile.

Domanda 10. Si dica quale tra le seguenti fornisce la definizione corretta.
Una funzione f è continua in un punto c

(i) * se il limite di f per x che tende a c esiste ed è uguale al valore che la funzione assume in c;

(ii) se i limiti destro e sinistro di f in c esistono finiti e sono uguali;

(iii) se $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$;

(iv) se $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ esiste finito ed è uguale a $f(c)$.

✎

La risposta 2 non è corretta perché non si fa riferimento al valore che la funzione assume nel punto c (cioè $f(c)$), che ha un ruolo importante nella definizione: tale valore potrebbe infatti essere diverso dal valore comune dei due limiti. La risposta 3 non dice nemmeno che i due limiti devono essere finiti (potrebbero essere uguali, ma infiniti). La risposta 4 confonde la continuità con la derivabilità, con l'ulteriore errore di uguagliare il limite del rapporto incrementale al valore della funzione.

Domanda 11. La derivata della funzione $f(x) = (x - e^{-x})^2$ è

(i) * $2(x - e^{-x})(1 + e^{-x})$

(ii) $2(x - e^{-x})(1 - e^{-x})$

(iii) $2(x + e^{-x})(1 + e^{-x})$

(iv) $2(1 + e^{-x})$

✎

$$f'(x) = 2(x - e^{-x}) \cdot (1 - e^{-x} \cdot (-1)) = 2(x - e^{-x}) \cdot (1 + e^{-x}).$$

Domanda 12. La funzione $f(x) = x \ln x$ è

(i) * decrescente nell'intervallo $(0, \frac{1}{e})$

(ii) crescente nell'intervallo $(0, \frac{1}{e})$

(iii) decrescente in tutti i reali positivi

(iv) decrescente nell'intervallo $(-\infty, \frac{1}{e})$

✎

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

La derivata è positiva se $\ln x + 1 > 0$, cioè se $\ln x > -1$, quindi se $x > 1/e$. Quindi la funzione decresce nell'intervallo $(0, \frac{1}{e})$, cresce in $(\frac{1}{e}, +\infty)$ e ha in $1/e$ un punto di minimo.

Domanda 13. L'integrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^2} dx$ vale

(i) * 1

(ii) $\frac{1}{2}$

(iii) -1

(iv) 2

✎

$$\int_1^2 \frac{2}{x^2} dx = 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = -\frac{2}{x}\Big|_1^2 = -\left(\frac{2}{2} - \frac{2}{1}\right) = 1.$$

Domanda 14. Si dica quale tra le seguenti fornisce la definizione corretta (c.l. significa combinazione lineare). I vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono linearmente indipendenti (l.i.)

(i) * se per ottenere il vettore nullo come loro c.l. l'unico modo è quello di porre tutti i coefficienti della c.l. uguali a zero;

(ii) se il vettore nullo si può ottenere come loro c.l. solo se i coefficienti della c.l. non sono tutti nulli;

(iii) se la loro c.l. banale, cioè con tutti i coefficienti nulli, è il vettore nullo;

(iv) se il vettore nullo si può ottenere come loro c.l.

✎

Osservo che la risposta 2 confonde il vettori indipendenti con quelli dipendenti. La risposta 3 afferma una cosa sempre vera, anche con vettori dipendenti. La risposta 4 equivale alla 3 e dice una cosa vera con qualunque tipo di vettori: il vettore nullo si può sempre ottenere come c.l. banale (coefficienti tutti nulli) di ogni tipo di vettori.

Domanda 15. Quale dei seguenti vettori non è combinazione lineare di $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$?

(i) * $(1, 0, 0)$

(ii) $(0, 0, 1)$

(iii) $(0, 2, 0)$

(iv) $(0, 2, 1)$

✎

Il vettore della risposta 3 è il doppio del primo vettore, quindi l.d. (Si ha $(0, 2, 0) = 2 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1)$.) Il vettore della risposta 4 è la somma dei due, quindi l.d. (Si ha $(0, 2, 1) = (0, 1, 0) + (0, 1, 1)$.) Il vettore della risposta 2 è la differenza dei due, quindi l.d. (Si ha $(0, 0, 1) = (0, 1, 1) - (0, 1, 0)$.) Per verificare che il vettore della risposta 1 è effettivamente indipendente dai due si può calcolare il determinante della matrice dei tre vettori, che risulta uguale a 1. Si poteva però osservare fin da subito che il vettore $(1, 0, 0)$, avendo diversa da zero la prima componente, non può essere combinazione lineare dei due vettori dati, che hanno invece entrambi la prima componente nulla.

Domanda 16. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

- risposta corretta 3

✎

Possiamo trascurare la seconda colonna, data dal vettore nullo. Calcoliamo il determinante della sottomatrice formata da 1ª, 3ª e 4ª colonna:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Quindi il rango è 3.

Domanda 17. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta, relativamente al rango di una matrice 3×4.

(i) * Il rango della matrice è 2 se tutti i minori del 3° ordine sono nulli e il determinante della sottomatrice formata dalle prime 2 righe e dalle ultime 2 colonne è diverso da zero.

(ii) Se il determinante della sottomatrice formata dalle prime 3 colonne è zero, il rango è 2

(iii) Se le prime 2 righe sono l.i. il rango è 2

(iv) Il rango della matrice è 2 se tutti i minori del 3° ordine sono nulli

✎

La risposta 2 non fornisce una condizione sufficiente per dire che il rango è 2, infatti considera solo una delle possibili sottomatrici del 3° ordine. La risposta 3 non esclude che il rango possa essere 3, dato che considera solo due righe. La risposta 4 non esclude che il rango possa essere 1, dato che considera solo i minori del 3° ordine.

Domanda 18. La forma quadratica $x^2 + y^2 + 2xz + z^2$ è

(i) * semidefinita positiva

(ii) definita positiva

(iii) indefinita

(iv) positiva

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è nullo, quindi la forma non è definita. Vediamo se è semidefinita. I minori principali del 1° ordine sono tutti uguali a 1. I minori principali del 2° ordine sono tutti uguali a 1 oppure 0. Pertanto la forma è semidefinita positiva.

La cosa si può verificare anche con la definizione. Infatti si può scrivere

$$x^2 + y^2 + 2xz + z^2 = (x + z)^2 + y^2,$$

che risulta sempre non negativa e inoltre si annulla in modo non banale ad esempio in $(1, 0, -1)$.

Domanda 19. Il gradiente della funzione $f(x, y) = (x \ln y)^2$ è

(i) * $\left(2x \ln^2 y \ , \ \dfrac{2x^2}{y} \ln y\right)$

(ii) $\left(2x \ln y \ , \ \dfrac{2x^2 \ln y}{y}\right)$

(iii) $\left(2x\ln^2 y\ ,\ \dfrac{2x}{y}\ln y\right)$

(iv) $\left(2\ln y\ ,\ \dfrac{2x}{y}\right)$

✎

Le derivate parziali della funzione sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln y \cdot \ln y = 2x\ln^2 y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x\ln y \cdot \frac{x}{y} = \frac{2x^2}{y}\ln y.$$

Pertanto il gradiente è $\left(2x\ln^2 y\ ,\ \dfrac{2x^2}{y}\ln y\right)$.

Domanda 20. I punti stazionari vincolati della funzione $f(x,y) = 3x + y^3$ sulla retta di equazione $x + y = 0$ sono

(i) * $(1,-1)$ e $(-1,1)$

(ii) $(1,1)$ e $(-1,-1)$

(iii) $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,1)$

(iv) quattro

✎

La restrizione di f alla retta è

$$f\Big|_{y=-x} = f(x,-x) = 3x + (-x)^3 = 3x - x^3.$$

La derivata di questa restrizione è $3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$, che si annulla se $x = \pm 1$. Con $x = -1$ si ha $y = 1$ e con $x = 1$ si ha $y = -1$.
Quindi i punti stazionari sono $(-1,1)$ e $(1,-1)$.