Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2020/21

Alberto Peretti

Agosto 2021

PROVA online di MATEMATICA

Vicenza, 22/01/2021

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. $\log_4(2\sqrt{2})^{-1/2}$ è uguale a

(i) * $-\frac{3}{8}$

(ii) $-\frac{3}{4}$

(iii) $-\frac{3}{2}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

✎

$$\log_4(2\sqrt{2})^{-1/2} = -\frac{1}{2}\log_4(2\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\log_4(2^{3/2}) = -\frac{1}{2}\log_4(4^{3/4}) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{8}.$$

Domanda 2. La scrittura $\sqrt{a^4} = a\sqrt{a^2}$ è

(i) * vera per ogni $a \geq 0$

(ii) vera per ogni $a > 0$

(iii) vera per ogni a reale

(iv) sempre falsa

✎

Le due espressioni sono definite per ogni a. L'uguaglianza però non è vera se a è negativo, dato che in questi casi il termine di destra sarebbe negativo, mentre quello di sinistra è certamente positivo. Quindi la risposta corretta è per ogni $a \geq 0$.

Domanda 3. La soluzione dell'equazione $e^{-1/x} = \frac{1}{3}$ è

(i) * $x = \frac{1}{\ln 3}$

(ii) $x = -\frac{1}{\ln 3}$

(iii) $x = \ln 3$

(iv) $x = -\ln 3$

✎

La condizione di esistenza è $x \neq 0$. L'equazione equivale poi a

$$-\frac{1}{x} = \ln\frac{1}{3}, \text{ cioè } x = -\frac{1}{\ln\frac{1}{3}}, \text{ cioè } x = \frac{1}{\ln 3}.$$

Domanda 4. Le soluzioni della disequazione $\ln(x^2) \leq 2$ sono

(i) * $-e \leq x < 0$ oppure $0 < x \leq e$

(ii) $-e \leq x \leq e$

(iii) $0 < x \leq e$

(iv) $0 < x \leq 1$

✎

La condizione di esistenza è $x^2 > 0$, che equivale a $x \neq 0$. La disequazione equivale poi a

$$x^2 \leq e^2 \quad \text{, verificata per} \quad -e \leq x \leq e.$$

Con la condizione di esistenza le soluzioni sono quindi quelle indicate nella prima risposta.

Domanda 5. Nel piano le soluzioni della disequazione $x(1 - xy) > 0$ sono

(i) * un insieme che sta in tutti i quadranti tranne uno

(ii) un insieme che sta in tutti i quadranti

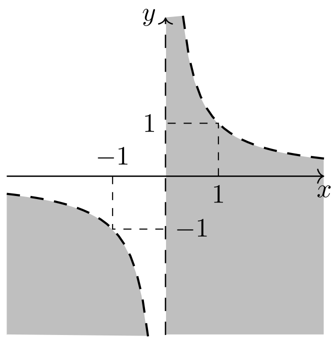
(iii) un insieme che ha per frontiera un'iperbole

(iv) un insieme che sta nel primo e quarto quadrante

✎

La disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - xy > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 1 - xy < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ xy < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ xy > 1. \end{cases}$$



Le soluzioni sono raffigurate qui a fianco. Si tratta di un insieme che sta in tutti i quadranti tranne il secondo. Da notare, in riferimento alla terza risposta, che la frontiera non è data solo dall'iperbole.

Domanda 6. Ottenuto con le trasformazioni grafiche elementari il grafico di $f(x) = -\ln|x - 1|$, si può dire che

(i) * la funzione non ha punti angolosi

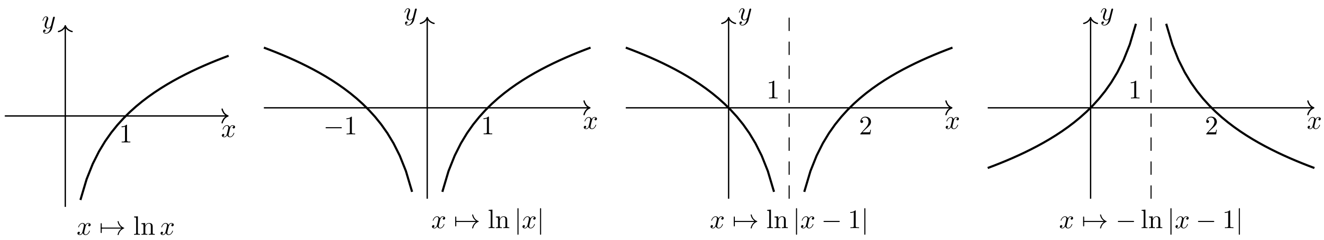
(ii) la funzione è monotona

(iii) la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$

(iv) la funzione è iniettiva

✎

Le trasformazioni sono queste:



Non ci sono punti angolosi. La funzione coincide o con $-\ln(x - 1)$ o con $-\ln(1 - x)$.

Domanda 7. L'espressione della funzione inversa di $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ è

(i) * $x = \frac{y}{1-y}$

(ii) $x = \frac{y}{1+y}$

(iii) $x = \frac{1+y}{y}$

(iv) $x = y + xy$

✎

Troviamo l'espressione della funzione inversa, iniziando con scrivere y al posto di x.

$$y = \frac{x}{1+x}\ ;\ (1+x)y = x\ ;\ y + xy = x\ ;\ xy - x = -y\ ;\ x(y-1) = -y\ ;\ x = -\frac{y}{y-1}\ ;\ x = \frac{y}{1-y}.$$

Domanda 8. Il limite $\lim_{x\to 0^-}\left(e^{1/x}\cdot \ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$ è

(i) * una forma indeterminata

(ii) $+\infty$

(iii) 0

(iv) $-\infty$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti}\quad \lim_{x\to 0^-}\left(e^{1/x}\cdot \ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = e^{1/0^-}\cdot \ln\left(-\frac{1}{0^-}\right) = e^{-\infty}\cdot \ln(+\infty) = 0\cdot\infty.$$

Si tratta di una forma indeterminata.

Domanda 9. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(ottenere il grafico con le trasformazioni elementari) è

(i) * invertibile in tutto $\mathbb{R}$

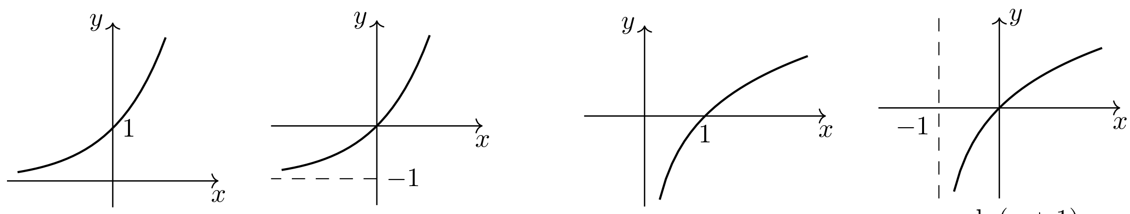
(ii) continua in 0 da sinistra ma non da destra

(iii) continua e quindi derivabile in 0

(iv) continua ma non derivabile in 0

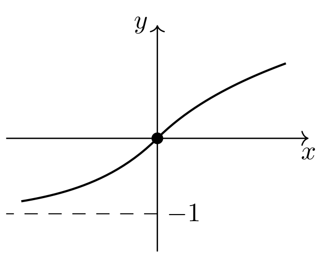
✎

Le trasformazioni elementari sono:



$x \mapsto e^x$ $\quad$ $x \mapsto e^x - 1$ $\quad$ $x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln(x+1)$

Il grafico della funzione f è pertanto questo:



Questo permetterebbe già di dire che la risposta corretta è la prima. Cerchiamo di capire però che le altre sono sbagliate. La funzione è evidentemente continua. Per la derivata si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Pertanto la funzione è derivabile in 0. In riferimento alla terza risposta, faccio notare che è sbagliata in ogni caso, dato che la derivabilità non segue dalla continuità.

Domanda 10. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.

(i) * Tra le ipotesi del teorema di Weierstrass figura la continuità ma non la derivabilità

(ii) una delle ipotesi del teorema degli zeri è che la funzione abbia valori opposti agli estremi

(iii) una delle ipotesi del teorema di Weierstrass è che la funzione abbia massimo e minimo

(iv) la tesi del teorema degli zeri è che la derivata della funzione si annulla nell'intervallo

✎

Le ipotesi del teorema di Weierstrass sono che la funzione sia continua in un intervallo chiuso e limitato. Quindi la risposta corretta è la prima, ma vediamo anche le altre.

La seconda: una delle ipotesi del teorema degli zeri è che la funzione abbia valori *di segno opposto* agli estremi, non valori *opposti* agli estremi (valori ad esempio uguali a 1 e -2 soddisfano l'ipotesi, anche se non sono opposti).

La terza: che la funzione abbia massimo e minimo è la tesi del teorema di Weierstrass, non l'ipotesi.

La quarta: la tesi del teorema degli zeri è che la *funzione* si annulla nell'intervallo, non la *derivata*.

Domanda 11. La derivata della funzione $f(x) = (x - x\ln x)^2$ è

(i) * $-2x\ln x(1-\ln x)$

(ii) $2x\ln x(1-\ln x)$

(iii) $-2x\ln x(1+\ln x)$

(iv) $2(x - x\ln x)(2-\ln x)$

✎

$$f'(x) = 2(x - x\ln x)\left(1 - \left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)\right) = 2(x - x\ln x)\left(1 - \ln x - 1\right) = -2x\ln x(1-\ln x).$$

Domanda 12. La funzione $f(x) = xe^{-x}$ è

(i) * crescente in $(-\infty, 1)$ e decrescente in $(1, +\infty)$

(ii) decrescente in $(-\infty, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$

(iii) decrescente in tutti i reali positivi

(iv) crescente in $(-\infty, -1)$ e decrescente in $(-1, +\infty)$

✎

La derivata di f è $f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}(1-x)$. Questa è positiva se e solo se $1 - x > 0$, cioè $x < 1$. Quindi la funzione f è crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$, come nella prima risposta.

Domanda 13. L'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$ è

(i) * $\ln|1+\ln x| + c$

(ii) $\ln|\ln x| + c$

(iii) $\frac{(1+\ln x)^2}{2} + c$

(iv) $-\frac{1}{1+\ln x} + c$

✎

$$\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{1+\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+\ln x| + c.$$

Domanda 14. Si dica quale tra le seguenti definizioni è corretta (c.l. significa combinazione lineare).

(i) * I vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono linearmente indipendenti se il vettore nullo si ottiene come loro c.l. soltanto ponendo tutti i coefficienti della c.l. uguali a zero;

(ii) i vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono linearmente dipendenti se il vettore nullo si ottiene come loro c.l. soltanto ponendo tutti i coefficienti della c.l. uguali a zero;

(iii) i vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono linearmente indipendenti se nella loro c.l. devo porre uguali a zero tutti i coefficienti;

(iv) i vettori $v^1, v^2, \dots, v^k$ sono linearmente indipendenti se ponendo uguali a zero tutti i coefficienti ottengo il vettore nullo.

✎

Tra i vari modi equivalenti che definiscono il significato di vettori linearmente indipendenti vi è ad esempio: l'unico modo per ottenere il vettore nullo come c.l. dei vettori stessi è porre tutti i coefficienti della combinazione uguali a zero. La prima risposta dice evidentemente lo stesso.

Analizziamo le altre risposte. La seconda attribuisce la stessa proprietà ai vettori dipendenti, ed è quindi errata.

La terza parla di porre uguali a zero i coefficienti della c.l., ma non dice che la combinazione deve essere uguale al vettore nullo.

La quarta dice una cosa che avviene sempre, anche quando i vettori sono dipendenti: infatti, se pongo uguali a zero tutti i coefficienti, la c.l. ovviamente si annulla.

Domanda 15. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta

(i) * il rango di una trasformazione lineare coincide con il massimo numero di righe linearmente indipendenti della matrice di rappresentazione

(ii) un insieme di vettori linearmente indipendenti sono sempre una base di $\mathbb{R}^n$

(iii) il rango di una trasformazione lineare coincide con il determinante della matrice di rappresentazione

(iv) il rango di una trasformazione lineare è uguale al numero di colonne della matrice di rappresentazione

✎

Il rango di una trasformazione lineare, o equivalentemente della sua matrice di rappresentazione, è uguale al massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti della matrice stessa. Quindi la prima risposta è quella corretta.

Analizziamo le altre risposte. La seconda è errata in quanto potremmo avere in $\mathbb{R}^n$ $n-1$ vettori linearmente indipendenti, che non bastano a formare una base dello spazio.

La terza è banalmente sbagliata in quanto associa al rango il *valore* del determinate.

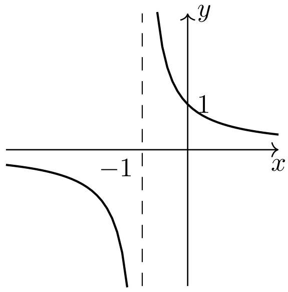
La quarta è sbagliata in quanto associa al rango il *numero* di colonne e non il *massimo numero* di colonne. Il rango potrebbe essere 2 e la matrice avere 3 colonne.

Domanda 16. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è ...

✎

Il minore del 3° ordine formato dalle prime 3 colonne è nullo, ma quello formato da prima, seconda e quarta è diverso da zero. Quindi il rango è 3.

Domanda 17. La curva di livello 1 della funzione $f(x, y) = xy + y$



(i) * è il grafico di una funzione

(ii) sta in tutti i quadranti

(iii) non è il grafico di una funzione perché manca di un punto

(iv) è formato da due rette perpendicolari

✎

La curva è definita dall'equazione $xy + y = 1$, che si può scrivere come $(x + 1)y = 1$. Questa definisce un'iperbole con centro in $(-1, 0)$ e asintoti paralleli agli assi, raffigurata qui sopra.

Tra le risposte possibili quella corretta è che la curva è il grafico di una funzione. (Infatti ha la proprietà caratteristica dei grafici, cioè che per ogni x resta associato al più un valore $f(x)$.)

Domanda 18. La forma quadratica $-x^2 + 2xy - 2y^2 - 2yz - z^2$ è

(i) * semidefinita negativa

(ii) definita negativa

(iii) indefinita

(iv) indefinita negativa

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det A = 0$, la forma non può essere definita (positiva o negativa). C'è la possibilità che sia semidefinita negativa. Occorre controllare tutti i minori principali. Quelli del 1° ordine sono negativi (uguali a -1 oppure -2). Quelli del 2° sono positivi o nulli (uguali a 1 oppure 2).

Pertanto possiamo dire che la forma è semidefinita negativa.

Domanda 19. Il gradiente della funzione $f(x, y) = \dfrac{\ln y}{x}$ è

(i) * $\left(-\frac{\ln y}{x^2}\ ,\ \frac{1}{xy}\right)$

(ii) $\left(\frac{\ln y}{x^2}\ ,\ \frac{1}{xy}\right)$

(iii) $\left(-\frac{\ln y}{x}\ ,\ \frac{1}{xy}\right)$

(iv) $\left(-\frac{\ln y}{x^2}\ ,\ -\frac{1}{xy}\right)$

✎

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\ln y}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy},$$

quindi $\nabla f = \left(-\frac{\ln y}{x^2}\ ,\ \frac{1}{xy}\right)$.

Domanda 20. La funzione $f(x,y) = x^2y + xy$

(i) * ha i punti stazionari $(0,0)$ e $(-1,0)$, entrambi di sella

(ii) ha i punti stazionari $(0,0)$ e $(-1,0)$, uno di minimo e uno di sella

(iii) ha i punti stazionari $(0,0)$, $(-1,0)$ e $(-\frac{1}{2},0)$ e nessuno è di massimo

(iv) quattro punti stazionari

✎

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x. \quad \text{I punti stazionari si trovano risolvendo} \quad \begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y(2x+1) = 0 \\ x(x+1) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda, se $x = 0$ si trova $y = 0$; se $x = -1$, si ha $y = 0$. Quindi i punti stazionari sono $(0,0)$ e $(-1,0)$. Per studiare la natura di questi punti occorre il gradiente secondo. Si ha

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Quindi} \quad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di due punti di sella (né di massimo né di minimo).

PROVA online di MATEMATICA

Vicenza, 08/02/2021

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. Una corretta scrittura di $\sqrt{2}$ come potenza in base e è

(i) * $e^{\frac{1}{2}\ln 2}$

(ii) $\frac{1}{2}e^{\ln 2}$

(iii) $e^{\ln(\frac{1}{2})}$

(iv) $e^{\ln(\frac{2}{2})}$

✎

$$\sqrt{2} = e^{\ln\sqrt{2}} = e^{\ln(2^{1/2})} = e^{\frac{1}{2}\ln 2}.$$

Domanda 2. L'uguaglianza $\ln(a^4) = 2\ln(a^2)$ è

(i) * vera per ogni $a \neq 0$

(ii) vera per ogni $a > 0$

(iii) vera per ogni a reale

(iv) sempre falsa

✎

Anzitutto, perché abbiano senso le due espressioni, deve essere $a \neq 0$. Poi possiamo scrivere

$$\ln(a^4) = \ln((a^2)^2) = 2\ln(a^2), \text{ quindi la risposta è “per ogni } a \neq 0\text{”}.$$

Domanda 3. Le soluzioni dell'equazione $\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$ sono date da

(i) * $x = -e^{-2}$

(ii) $x = \frac{1}{e^2}$

(iii) $x = -\frac{1}{\ln 2}$

(iv) l'insieme vuoto

✎

La condizione per l'esistenza è $-\frac{1}{x} > 0$, cioè $x < 0$. Poi abbiamo

$$\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{e^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -e^{-2}.$$

Domanda 4. Le soluzioni della disequazione $e^{2x} \geq e^x + 2$ sono

(i) * $x \geq \ln 2$

(ii) $x \leq \ln(-1)$ oppure $x \geq \ln 2$

(iii) $x \leq -1$ oppure $x \geq 2$

(iv) $e^x \leq -1$ oppure $e^x \geq 2$

✎

Con il cambio di variabile $e^x = t$ la disequazione diventa

$$t^2 - t - 2 \geq 0 \quad ; \quad (t+1)(t-2) \geq 0 \quad ; \quad t \leq -1 \text{ oppure } t \geq 2.$$

Tornando alla variabile x abbiamo

$$e^x \leq -1 \text{ oppure } e^x \geq 2.$$

La prima è impossibile e la seconda equivale a $x \geq \ln 2$.

Domanda 5. Nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2(1-y) \geq 0$

(i) * include entrambi gli assi cartesiani

(ii) include un solo asse cartesiano

(iii) ha per frontiera una parabola e una retta

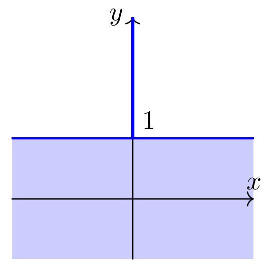
(iv) è un semipiano

✎

Si potrebbe dire subito, anche senza ottenere la rappresentazione dell'insieme di soluzioni, che la risposta corretta è quella indicata. Infatti l'asse x è soluzione poiché ponendo $y = 0$ la disequazione diventa $x^2 \geq 0$, che è sempre vera. L'asse y è soluzione poiché ponendo $x = 0$ la disequazione è banalmente soddisfatta.

Ma troviamo comunque l'insieme di tutte le soluzioni. La disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ 1-y \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 \leq 0 \\ 1-y \leq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad y \leq 1 \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 1. \end{cases}$$



(Ricordare che $x^2 \geq 0$, che è sempre vera e $x^2 \leq 0$, equivale a $x = 0$.) Le soluzioni sono quindi l'insieme raffigurato qui sopra in azzurro/blu.

Per quanto riguarda l'ultima alternativa proposta, faccio notare che l'insieme non è un semipiano in quanto comprende anche la semiretta (in blu) sull'asse y delle soluzioni del secondo sistema.

Domanda 6. Ottenuto con le trasformazioni grafiche elementari il grafico di $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$, si può dire che

(i) * la funzione è pari

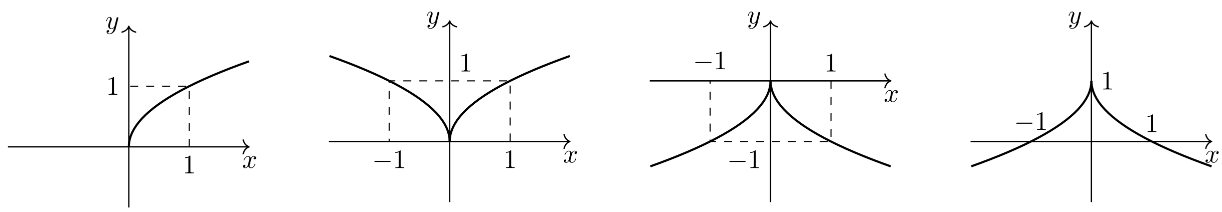
(ii) la funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}$

(iii) la funzione è monotona

(iv) la funzione è iniettiva

✎

Le trasformazioni sono queste:



$x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{|x|}$ $\qquad$ $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - \sqrt{|x|}$

Evidentemente la funzione è pari, mentre non è derivabile in $x = 0$, non è monotona e, essendo pari, non è iniettiva.

Domanda 7. L'immagine dell'intervallo $(0,1)$ attraverso la funzione $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ è

(i) * l'intervallo $(-\infty, 0)$

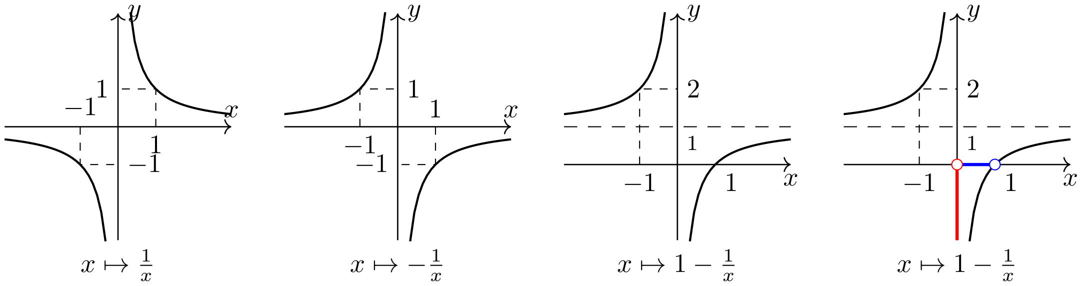
(ii) l'intervallo $(-\infty, 1)$

(iii) l'intervallo $(-\infty, -1)$

(iv) l'intervallo $(0, +\infty)$

✎

Con le trasformazioni elementari si ottiene il grafico della funzione.



L'immagine dell'intervallo $(0,1)$ è allora, come indicato, $(-\infty, 0)$.

Domanda 8. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-\sqrt{x}}$ è

(i) * $+\infty$

(ii) $-\infty$

(iii) 0

(iv) una forma indeterminata

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-\sqrt{x}} = \frac{\ln(1^+ - 1)}{1-\sqrt{1^+}} = \frac{\ln 0^+}{1-1^+} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Domanda 9. Una corretta scrittura della derivata della funzione $f(x) = \ln(x+2)$ nel punto $x_0 = -1$, come limite del rapporto incrementale, è

(i) * $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to -1} \frac{\ln(1+h)}{h}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\ln(x+2)}{x-1}$

✎

Le due possibili scritture (forma "in x" e forma "in h") del limite del rapporto incrementale sono

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to -1} \frac{\ln(x+2) - \ln 1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\ln(x+2)}{x+1}$$

oppure

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(-1+h+2)-\ln 1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Pertanto la scrittura corretta è una delle due forme in h, quella con $h \to 0$.

Domanda 10. La funzione

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-x) & \text{se } x\le -1\\ x^2-1 & \text{se } x>-1\end{cases} \quad \text{è}$$

(i) * continua ma non derivabile in -1

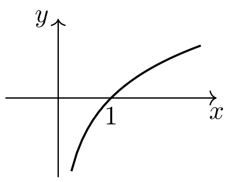
(ii) continua in -1 da sinistra ma non da destra

(iii) continua e derivabile in -1

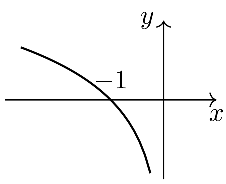
(iv) invertibile in tutto $\mathbb{R}$

✎

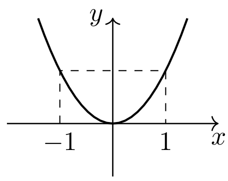
Le trasformazioni elementari dei grafici sono:



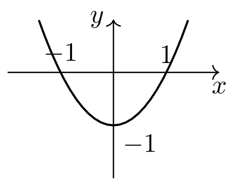
$x \mapsto \ln x$



$x \mapsto \ln(-x)$

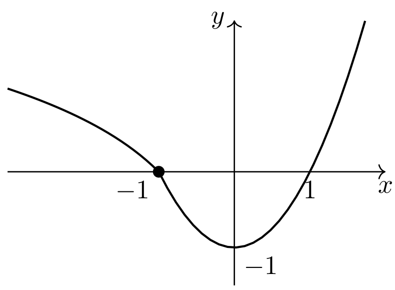


$x \mapsto x^2$



$x \mapsto x^2-1$

Il grafico della funzione f è pertanto questo:



Il grafico mostra che la funzione è continua. Per la derivabilità possiamo scrivere

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{se } x<-1\\ 2x & \text{se } x>-1.\end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}f'(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x}=-1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f'(x)=\lim_{x\to(-1)^+}2x=-2.$$

Pertanto f è continua ma derivabile in $x=-1$. Da notare che la risposta “è invertibile in tutto $\mathbb{R}$” non è corretta in quanto la funzione non è iniettiva.

Domanda 11. La corretta formulazione della tesi del teorema di Lagrange applicato alla funzione $f(x)=\ln x$ nell’intervallo $[1,e]$ è

(i) * esiste un punto c in $(1,e)$ tale che $\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1}$

(ii) esiste un punto c in $(1,e)$ tale che $c=\frac{1}{e-1}$

(iii) esiste un punto c in $(1,e)$ in cui la retta tangente è orizzontale

(iv) esiste un punto c in $(1, e)$ tale che $\ln c = \frac{1}{e-1}$

✎

La tesi del teorema di Lagrange in questo caso afferma che

$$\text{esiste un punto } c \in (1, e) \text{ in cui } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ cioè } \frac{1}{c} = \frac{1 - 0}{e - 1}.$$

Pertanto la risposta corretta è quella con $\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1}$.

Domanda 12. La derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x - x}$ è

(i) * $-\dfrac{\ln x}{x^2(\ln x - 1)^2}$

(ii) $\dfrac{x \ln x - x - \ln x}{(x \ln x - x)^2}$

(iii) $\dfrac{\ln x}{(x \ln x - x)^2}$

(iv) $\ln\big(x \ln x - x\big)$

✎

$$f'(x) = -\frac{1}{(x \ln x - x)^2}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1\right) = -\frac{\ln x}{(x \ln x - x)^2}.$$

Domanda 13. L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, \mathrm{d}x$ è

(i) * $1 - \ln 2$

(ii) 0

(iii) $1 + \ln 2$

(iv) $\frac{3}{2}$

✎

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \Big(x - \ln(x+1)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2 + \ln 1 = 1 - \ln 2.$$

Domanda 14. I vettori $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$

(i) * formano una base di $\mathbb{R}^3$

(ii) sono linearmente indipendenti ma non formano una base di $\mathbb{R}^3$

(iii) sono linearmente dipendenti

(iv) sono generatori $\mathbb{R}^3$, pur non essendo linearmente indipendenti

✎

Possiamo capire se i vettori sono dipendenti o indipendenti calcolando il determinante della matrice formata con i vettori stessi.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Pertanto i vettori sono indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^3$, dato che sono tre.

Domanda 15. Si dica quale tra le seguenti è la corretta matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(i) * $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

✎

Indico con A la matrice data. Si ha $\det A = -1$. La matrice dei complementi algebrici è

$A' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice aggiunta è $A^\star = (A')^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Domanda 16. Sia $Ax = 0$ un sistema quadrato omogeneo, quindi con A matrice quadrata $n \times n$. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

(i) * Il sistema ha soluzioni non banali se e solo se $\det A = 0$

(ii) Il sistema ha soluzioni non banali se e solo se $\det A \neq 0$

(iii) Se il rango di A è n il sistema può avere come soluzione il vettore a componenti unitarie (tutte le componenti uguali a 1)

(iv) Se il rango di A è minore di n il sistema è impossibile

✎

Un sistema omogeneo ha sempre soluzioni, e quindi l'ultima risposta non è corretta.

Se il determinante di A è diverso da zero, che equivale a dire che il rango di A è n, il sistema ha una sola soluzione, quella banale, e quindi sono errate anche la seconda e terza risposta. La prima è corretta, per i motivi appena ricordati.

Domanda 17. La curva di livello 0 della funzione $f(x, y) = x^2y - y$

(i) * è formata da tre rette

(ii) è il grafico di una funzione

(iii) è formata da una retta e una parabola

(iv) è formata da due rette perpendicolari

✎

La curva è definita dall'equazione $x^2y - y = 0$, che si può scrivere come $(x^2 - 1)y = 0$, cioè $(x - 1)(x + 1)y = 0$. Pertanto si tratta di tre rette, di equazione $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$.

Domanda 18. La forma quadratica $-2x^2 + 2xy - y^2 + 2yz - z^2$ è

(i) * indefinita

(ii) definita negativa

(iii) semidefinita negativa

(iv) indefinita negativa

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il primo minore principale di NO è negativo (-1), il secondo è positivo (1), il determinate vale 1. Pertanto la forma è indefinita, dato ci sono minori di ordine dispari di segno opposto.

Domanda 19. Il gradiente della funzione $f(x,y) = xy - y \ln y$ è

(i) * $\Big(y\ ,\ x - \ln y - 1\Big)$

(ii) $\Big(y\ ,\ x - \ln y + 1\Big)$

(iii) $\Big(y - y\ln y\ ,\ x - \ln y - 1\Big)$

(iv) $\Big(y\ ,\ x - \ln y\Big)$

✎

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \left(1 \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y}\right) = x - \ln y - 1,$$

quindi $\nabla f = \Big(y\ ,\ x - \ln y - 1\Big)$.

Domanda 20. Sul vincolo $y - \ln x = 0$ la funzione $f(x,y) = e^y \ln x$

(i) * ha in $(\frac{1}{e}, -1)$ un punto di minimo vincolato

(ii) ha in $(\frac{1}{e}, 1)$ un punto stazionario vincolato

(iii) ha in $(\frac{1}{e}, -1)$ un punto di massimo vincolato

(iv) non ha nessun punto di massimo o di minimo vincolato

✎

Il vincolo si può scrivere come $y = \ln x$. Pertanto la restrizione di f al vincolo è

$$f\Big|_{y=\ln x} = e^{\ln x} \cdot \ln x = x \ln x.$$

La derivata di questa funzione è $\ln x + 1$, e questa si annulla in $x = \frac{1}{e}$ (da cui si ricava $y = \ln \frac{1}{e} = -1$). Dato che questo è un punto di minimo per la funzione $x \ln x$, allora la risposta corretta è la prima.

PROVA online di MATEMATICA

Vicenza, 29/06/2021

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. Una corretta scrittura di -2 come logaritmo in base $\frac{1}{4}$ è

(i) * $\log_{1/4} 16$

(ii) $\log_{1/4} 8$

(iii) $\log_{1/4} \frac{1}{16}$

(iv) quanto richiesto è impossibile

✎

Con la definizione di logaritmo, dato che $(1/4)^{-2} = 16$ si ha che $-2 = \log_{1/4} 16$. Si può anche fare

$$-2 = \log_{1/4} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \log_{1/4} 16.$$

Domanda 2. L'uguaglianza $\sqrt[8]{b^4} = \sqrt[4]{b^2}$ è

(i) * vera per ogni b reale

(ii) vera per ogni $b \geq 0$

(iii) vera per ogni $b \neq 0$

(iv) sempre falsa

✎

L'uguaglianza è vera per ogni b reale in quanto si ricava da una delle proprietà delle potenze, dopo aver osservato che entrambe le quantità esistono per qualunque valore di b.

Domanda 3. Le soluzioni dell'equazione $\ln\left(-\frac{2}{x}\right) = 1$ sono date da

(i) * $x = -\frac{2}{e}$

(ii) $x = \frac{2}{e}$

(iii) $x = -\frac{e}{2}$

(iv) l'insieme vuoto

✎

Le condizioni di esistenza sono date da $-\frac{2}{x} > 0$, cioè $x < 0$. L'equazione equivale poi a

$$-\frac{2}{x} = e, \text{ cioè } x = -\frac{2}{e}.$$

Domanda 4. Le soluzioni della disequazione $\ln^2 x \geq \ln x + 2$ sono

(i) * $0 < x \leq \frac{1}{e}$ oppure $x \geq e^2$

(ii) $x \leq \frac{1}{e}$ oppure $x \geq e^2$

(iii) $x \leq -1$ oppure $x \geq 2$

(iv) $0 < x \leq e^{-2}$ oppure $x \geq e^{-1}$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > 0$. Con il cambio di variabile $\ln x = t$ la disequazione diventa

$$t^2 - t - 2 \geq 0 \quad ; \quad (t+1)(t-2) \geq 0 \quad ; \quad t \leq -1 \text{ oppure } t \geq 2.$$

Tornando alla variabile x abbiamo

$$\ln x \leq -1 \text{ oppure } \ln x \geq 2 \quad ; \quad x \leq \frac{1}{e} \text{ oppure } x \geq e^2.$$

Pertanto, con le condizioni di esistenza, le soluzioni sono $0 < x \leq \frac{1}{e}$ oppure $x \geq e^2$.

Domanda 5. Nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $(1 - x)y > 0$

(i) * non ha punti nel terzo quadrante

(ii) include entrambi gli assi cartesiani

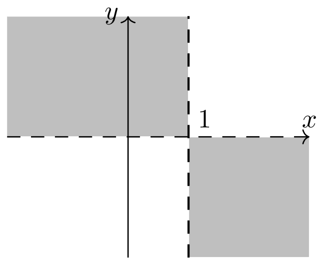
(iii) ha per frontiera un'iperbole

(iv) è l'unione di due semipiani

✎

La disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 1 \\ y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ y < 0. \end{cases}$$



L'insieme è raffigurato in grigio qui a destra.
Tra le alternative proposte quella corretta è "l'insieme non ha punti nel terzo quadrante".

Domanda 6. Ottenuto con le trasformazioni grafiche elementari il grafico di $f(x) = -\ln|x|$, si può dire che

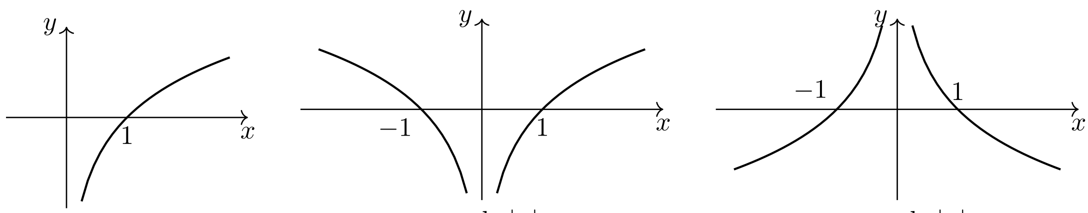
(i) * la funzione è derivabile nei punti in cui è definita

(ii) la funzione è invertibile

(iii) la funzione è monotona

(iv) la funzione è dispari

✎



$x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $x \mapsto \ln|x|$ $\qquad$ $x \mapsto -\ln|x|$

Dal grafico risulta che la funzione è pari, non monotona e non invertibile (in quanto pari). È invece derivabile nei punti in cui è definita, dato che coincide o con $-\ln x$ o con $-\ln(-x)$, entrambe composizioni di funzioni elementari.

Domanda 7. La controimmagine dell'intervallo $[0,+\infty)$ attraverso la funzione $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ è

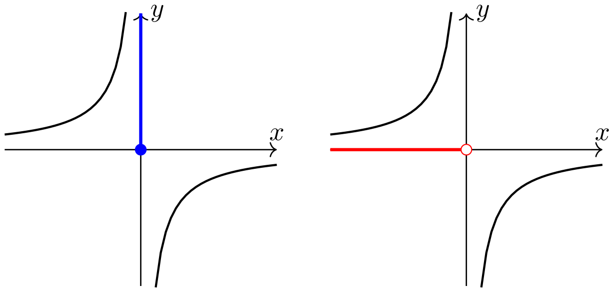
(i) * l'intervallo $(-\infty,0)$

(ii) l'intervallo $(-\infty,0]$

(iii) tutto $\mathbb{R}$ escluso 0

(iv) l'intervallo $[0,+\infty)$

✎



Dal grafico si ricava che la controimmagine dell'intervallo $[0,+\infty)$ (in blu nella figura di sinistra) è l'intervallo $(-\infty,0)$, in rosso nella figura a destra. (Attenzione, l'intervallo è aperto.)

Domanda 8. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ è

(i) * $-\infty$

(ii) $+\infty$

(iii) 0

(iv) una forma indeterminata

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = (1-e^{-\infty})\ln\left(-\frac{1}{-\infty}\right) = (1-0)\ln 0^+ = 1\cdot(-\infty) = -\infty.$

Domanda 9. Una corretta scrittura della derivata della funzione $f(x) = e^{-x}$ nel punto $x_0 = -1$, come limite del rapporto incrementale, è

(i) * $\lim_{h\to0}\frac{e^{1-h}-e}{h}$

(ii) $\lim_{h\to0}\frac{e^{h-1}-e}{h}$

(iii) $\lim_{x\to-1}\frac{e^{-x}-1}{x+1}$

(iv) $\lim_{x\to-1}\frac{e^{-x}-e}{x-1}$

✎

Le due possibili scritture (forma "in x" e forma "in h") del limite del rapporto incrementale sono

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to-1}\frac{e^{-x}-e}{x+1} \quad \text{oppure} \quad \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{-(-1+h)}-e}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{1-h}-e}{h}.$$

Pertanto la scrittura corretta è una delle due forme in h, quella con l'esponenziale di $1-h$.

Domanda 10. La derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x - e^{-x}}$ è

(i) * $-\frac{1+e^{-x}}{(x-e^{-x})^2}$

(ii) $\frac{1+e^{-x}}{(x-e^{-x})^2}$

(iii) $-\frac{1+e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

(iv) $-\frac{1+e^{x}}{(x-e^{-x})^2}$

✎

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - e^{-x})^2} \cdot \big(1 - (-e^{-x})\big) = -\frac{1 + e^{-x}}{(x - e^{-x})^2}.$$

Domanda 11. La funzione $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x \le 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(i) * è continua ma non derivabile in 0

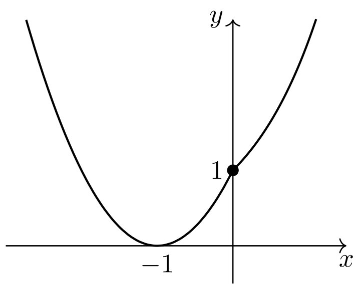
(ii) è continua in 0 da sinistra ma non da destra

(iii) è continua e derivabile in 0

(iv) è strettamente positiva in tutto $\mathbb{R}$ (cioè $f(x) > 0$ per ogni x)

✎

Il grafico della funzione è questo:



Il grafico mostra che la funzione è continua. Per la derivabilità possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2(x+1) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = 0$. Da notare che la risposta "è strettamente positiva in tutto $\mathbb{R}$" non è corretta in quanto la funzione si annulla in $x = -1$.

Domanda 12. La corretta formulazione della tesi del teorema di Lagrange applicato alla funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[0,1]$ è

(i) * esiste un punto c in $(0,1)$ tale che $e^c - e + 1 = 0$

(ii) esiste un punto c in $(0,1)$ tale che $e^c = \frac{e-1}{2}$

(iii) esiste un punto c in $(0,1)$ in cui la retta tangente è orizzontale

(iv) esiste un punto c in $(0,1)$ in cui la retta tangente ha pendenza e

✎

La tesi del teorema di Lagrange in questo caso afferma che

$$\text{esiste un punto } c \in (0,1) \text{ in cui } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ cioè } e^c = \frac{e-1}{1}.$$

Pertanto la risposta corretta è quella che indica $e^c - e + 1 = 0$.

Domanda 13. L'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$ vale

(i) * e

(ii) $e+1$

(iii) $e+\ln e$

(iv) $e-1$

✎

$$\int_1^e \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(x+\ln x\Big|_1^e = e+1-1 = e.\right.$$

Domanda 14. I vettori $(1,0,1)$, $(1,2,3)$ e $(0,1,1)$

(i) * non formano una base di $\mathbb{R}^3$

(ii) sono linearmente dipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^3$

(iii) sono linearmente dipendenti e formano una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

(iv) sono generatori di un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

✎

Possiamo capire se i vettori sono dipendenti o indipendenti calcolando il determinante della matrice formata con i vettori stessi.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto i vettori sono dipendenti. Analizziamo le possibili risposte.

Quella che afferma che "formano una base di $\mathbb{R}^3$" non è corretta in quanto i vettori sono dipendenti. (Faccio notare che questa risposta mette insieme due proprietà incompatibili.) Analogamente la risposta che contiene "formano una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$".

La risposta "sono generatori di un sottospazio di $\mathbb{R}^2$" non è corretta in quanto i vettori appartengono a $\mathbb{R}^3$ (hanno tre componenti) e quindi non possono generare vettori a due componenti.

Ovviamente la risposta corretta è che i vettori non formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Domanda 15. Si dica quale tra le seguenti è la corretta matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(i) * $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

✎

Indico con A la matrice data. Si ha $\det A = -1$. La matrice dei complementi algebrici è

$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice aggiunta è $A^\star = (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 16. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta

(i) * il rango di una matrice quadrata A $(n \times n)$ è $n-1$ solo se $\det A$ si annulla

(ii) il rango di una matrice quadrata A $(n \times n)$ è $n-1$ se $\det A$ si annulla

(iii) se il rango di una matrice A è massimo allora le righe e le colonne di A sono linearmente indipendenti

(iv) il rango di una matrice quadrata A non può mai essere uguale al determinante di A

✎

Analizziamo anche qui tutte le possibili risposte.

La seconda non è corretta in quanto, se $\det A = 0$, possiamo dire che il rango non è n, ma potrebbe anche essere minore di $n-1$. (Ad esempio una matrice 3×3 potrebbe avere rango 1.)

Nella terza non si specifica che la matrice è quadrata e quindi l'affermazione è falsa in quanto o le righe o le colonne sono dipendenti. (Ad esempio con una matrice 2×3 e rango 2: le righe sono indipendenti ma le colonne sono dipendenti.) Faccio notare che la risposta sarebbe corretta se ci riferissimo ad una matrice quadrata.

La quarta è evidentemente falsa: si prenda ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha determinante e rango uguali a 2.

Domanda 17. La curva di livello 1 della funzione $f(x, y) = xy - y$

(i) * è il grafico di una funzione reale invertibile

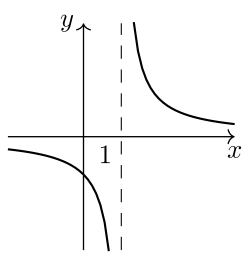
(ii) è il grafico di una funzione definita in tutto $\mathbb{R}$

(iii) è un'iperbole con asintoti obliqui

(iv) è formata da due rette perpendicolari

✎

La curva è definita dall'equazione $xy - y = 1$, che si può scrivere come $(x-1)y = 1$. Questa definisce un'iperbole con centro in $(1, 0)$ e asintoti paralleli agli assi, raffigurata a fianco.



Tra le risposte possibili quella corretta è che la curva è il grafico di una funzione reale invertibile.

Domanda 18. La forma quadratica $-x^2 - y^2 + 2yz - z^2$ è

(i) * semidefinita negativa

(ii) definita negativa

(iii) semidefinita positiva

(iv) indefinita

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det A = 0$, la forma non può essere definita (positiva o negativa). C'è la possibilità che sia semidefinita negativa. Occorre controllare tutti i minori principali. Quelli del 1° ordine sono negativi (tutti uguali a -1). Quelli del 2° sono positivi o nulli (è nullo quello formato con seconde e terze righe/colonne).

Pertanto possiamo dire che la forma è semidefinita negativa.

Domanda 19. Il gradiente della funzione $f(x, y) = xe^{-y} - e^{xy}$ è

(i) * $\left(e^{-y} - ye^{xy}\ ,\ -x\left(e^{-y} + e^{xy}\right)\right)$

(ii) $\left(e^{-y} - xe^{xy}\ ,\ -xe^{-y} - xe^{xy}\right)$

(iii) $\left(e^{-y} - ye^{x}\ ,\ -xe^{y} - xe^{y}\right)$

(iv) $\left(e^{-y} - ye^{xy}\ ,\ -x\left(e^{-y} - e^{xy}\right)\right)$

✎

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-y} - e^{xy} \cdot y = e^{-y} - ye^{xy} = \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x(-e^{-y}) - e^{xy} \cdot x = -x(e^{-y} + e^{xy}),$$

quindi $\nabla f = \left(e^{-y} - ye^{xy}\ ,\ -x(e^{-y} + e^{xy})\right)$.

Domanda 20. La funzione $f(x, y) = y \ln x$ sul vincolo $x - e^y = 0$

(i) * ha in $(1, 0)$ un punto di minimo vincolato

(ii) ha in $(0, 0)$ un punto di minimo vincolato

(iii) ha in $(1, 0)$ un punto di massimo vincolato

(iv) non ha nessun punto di massimo o di minimo vincolato

✎

Il vincolo si può scrivere come $x = e^y$. Pertanto la restrizione di f al vincolo è

$$f\Big|_{x=e^y} = y \ln e^y = y^2.$$

Chiaramente questa restrizione ha un punto di minimo (globale) in $y = 0$. Sostituendo nell'equazione del vincolo $y = 0$ si ottiene $x = 1$. Quindi la funzione f ha sul vincolo un punto di minimo globale in $(1, 0)$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 25/08/2021

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^3 + x^2 - x - 1$

✎

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1).$$

Domanda 2. Per quali valori di x è definita l'espressione $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln x}$?

✎

Le condizioni nelle quali l'espressione è definita sono

$$\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \ge -1 \\ x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Pertanto si tratta dell'insieme $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x + \sqrt{x} = 0$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x \ge 0$. Poi l'equazione si può trasformare in

$$\sqrt{x} = -x \quad ; \quad x = x^2 \quad ; \quad x^2 - x = 0 \quad ; \quad x(x - 1) = 0.$$

Le possibili soluzioni sono $x = 0$ oppure $x = 1$, ma la seconda non è accettabile in quanto non soddisfa l'equazione di partenza. Quindi solo $x = 0$ è soluzione.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln^2 x + \ln x \ge 0$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > 0$. Con il cambio di variabile $\ln x = t$ la disequazione diventa

$$t^2 + t \ge 0 \quad ; \quad t(t + 1) \ge 0 \quad ; \quad t \le -1 \text{ oppure } t \ge 0.$$

Tornando alla variabile x abbiamo

$$\ln x \le -1 \text{ oppure } \ln x \ge 0 \quad ; \quad x \le \frac{1}{e} \text{ oppure } x \ge 1.$$

Pertanto le soluzioni sono $0 < x \le \frac{1}{e}$ oppure $x \ge 1$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + y^2 + 2y + 1 \le 0$

✎

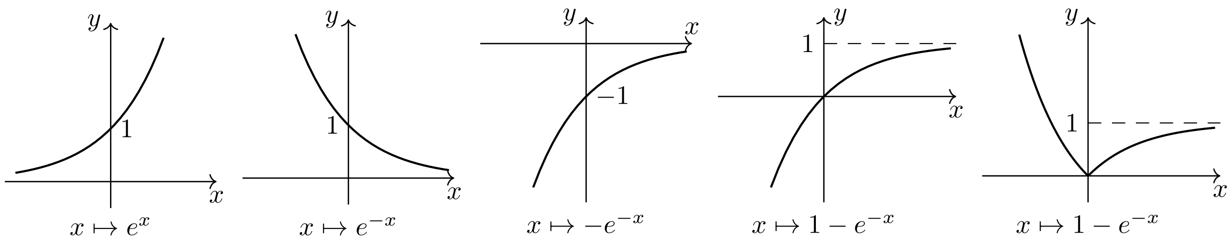
La disequazione equivale a

$$x^2 + (y + 1)^2 \le 0,$$

che ha per soluzione soltanto il punto $(0, -1)$.

Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = \left|1 - e^{-x}\right|$

✎



Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - \ln x}{\sqrt{x} - 1}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0 - \ln 0^+}{\sqrt{0^+} - 1} = \frac{0 - (-\infty)}{-1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\left(1 + e^{1/x}\right)$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \left(1 + e^{1/x}\right) + x \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + e^{1/x} - e^{1/x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \left(2x + e^{2x}\right)\, \mathrm{d}x$

✎

$$\int \left(2x + e^{2x}\right)\, \mathrm{d}x = \int 2x\, \mathrm{d}x + \int e^{2x}\, \mathrm{d}x = x^2 + \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\, \mathrm{d}x = x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} + c.$$

Domanda 10. Trovare gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x, y) = x - y^2 \ln x$

✎

Le derivate parziali di f sono

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{x} \quad \text{e} \quad f'_y = -2y \ln x.$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{x} = 0 \\ -2y \ln x = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, se $y = 0$ la prima diventa $1 = 0$ e quindi non si hanno soluzioni. Se invece $x = 1$, la prima diventa $1 - y^2 = 0$, e quindi le soluzioni sono i due punti $(1, -1)$ oppure $(1, 1)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 25/08/2021

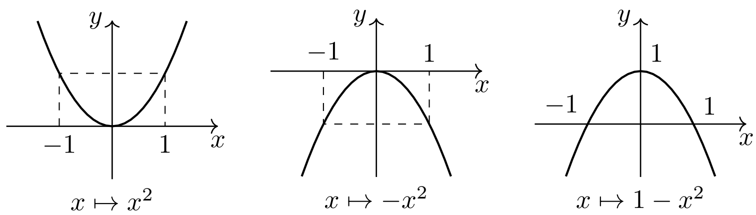
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \le 1 \\ -\ln x & x > 1, \end{cases}$$

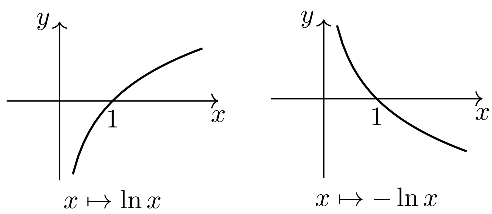
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica perché è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f nell'intervallo $\big[-1, e\big]$ e infine, aiutandosi anche con il grafico ottenuto in precedenza, si dica in quali punti è verificata la tesi del teorema.

✎

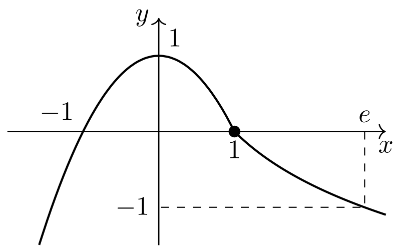
Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.



Per la funzione logaritmica invece semplicemente



Il grafico della funzione f è pertanto questo:



La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Il grafico lo evidenzia e la definizione lo conferma:

$$f(1) = 1 - 1^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} (-\ln x) = -\ln 1 = 0.$$

Passiamo ora alla derivabilità, in particolare in $x = 1$. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = 1$.

Il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, e]$ è applicabile in quanto si tratta di un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua in tale intervallo, essendo continua in tutto $\mathbb{R}$.

La tesi del teorema dice che nell'intervallo $[-1, e]$ la funzione ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Il grafico ci dice che il punto di massimo è in $x_{\max} = 0$ (con valore massimo 1) e il punto di minimo è in $x_{\min} = e$ (con valore minimo -1).

ESERCIZIO 2. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

si provi che $(0, 1, 0, -1)$ e $(0, 0, -1, -1)$ sono due soluzioni del sistema. Si dica perché si può allora affermare che ci sono infinite soluzioni. Si determini poi la dimensione del sottospazio delle soluzioni. Si indichi infine una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato.

✎

Sostituendo alle variabili i valori indicati, per quanto riguarda il primo vettore $(0, 1, 0, -1)$ si ha

$$\begin{cases} 0 + 1 - 0 = 1 \\ 0 + 1 - 0 + 1 = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il secondo vettore $(0, 0, -1, -1)$ si ha

$$\begin{cases} 0 + 0 + 1 = 1 \\ 0 + 0 + 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Si può allora affermare che ci sono infinite soluzioni in quanto abbiamo due soluzioni, ricordando che un sistema lineare può avere nessuna, una sola oppure infinite soluzioni.

La dimensione del sottospazio S delle soluzioni è data dalla formula $\dim S = n - rA$, dove n è il numero di variabili e rA è il rango della matrice dei coefficienti del sistema. Le matrici sono

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Dato che il rango di A è 2, si trova che $\dim S = 4 - 2 = 2$.

Dobbiamo trovare ora le soluzioni del sistema, per arrivare a determinare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Il sistema può essere riscritto in modo equivalente con

$$\begin{cases} x = 1 - y + z \\ x + t = -y + z \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 - y + z \\ 1 - y + z + t = -y + z \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 - y + z \\ t = -1. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono

$$S = \{(1 - y + z, y, z, -1) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, 0, -1) + y(-1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato è quindi data dai due vettori $(-1, 1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1, 0)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

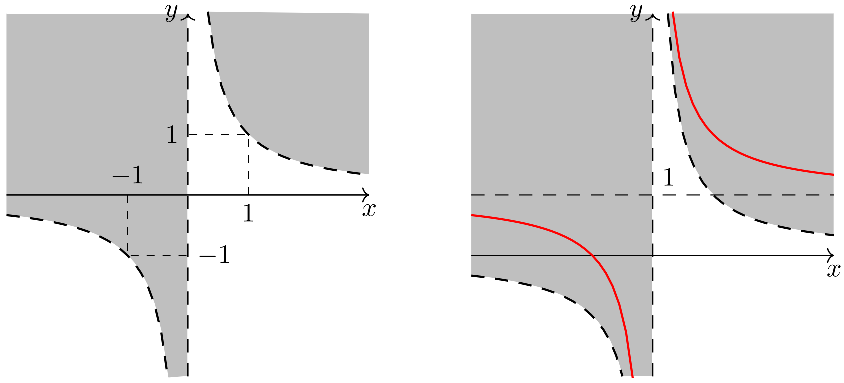
$$f(x, y) = \ln\left(\frac{xy - 1}{x}\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio e in quali punti la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di f e si dica se esistono punti stazionari. Si scriva infine la restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} \frac{xy-1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} xy > 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} xy < 1 \\ x < 0. \end{cases}$$



Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sopra a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.

La funzione si annulla se

$$\ln\left(\frac{xy-1}{x}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{xy-1}{x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad xy-1=x \quad\Leftrightarrow\quad x(y-1)=1.$$

Si tratta di un'iperbole con asintoti paralleli agli assi cartesiani e centro nel punto $(0,1)$. La curva è raffigurata in rosso nella figura sopra a destra.

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\frac{xy-1}{x}}\cdot\frac{yx-(xy-1)}{x^2}=\frac{x}{xy-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x(xy-1)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\frac{xy-1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot x=\frac{x}{xy-1}.$$

Dato che la derivata parziale rispetto ad x non può annullarsi, non ci sono punti stazionari.

La restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio è data da

$$f\Big|_{y=0}=\ln\left(-\frac{1}{x}\right).$$