# Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
# Anno Accademico 2021/22

**Alberto Peretti**

**Settembre 2022**

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 11/11/2021**

---

**Domanda 1.** Risolvere l'equazione

$$e^{x^2-x} - e^2 = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$e^{x^2-x} = e^2 \quad ; \quad x^2 - x = 2 \quad ; \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad ; \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad ; \quad x = -1 \ \vee x = 2.$$

**Domanda 2.** Risolvere la disequazione

$$\ln(1+2x) + 3 \leq 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $1 + 2x > 0$, cioè $x > -\frac{1}{2}$, la disequazione equivale a

$$\ln(1+2x) \leq -3 \quad ; \quad 1 + 2x \leq e^{-3} \quad ; \quad x \leq \frac{e^{-3}-1}{2}.$$

Dato che $\frac{e^{-3}-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-3} > -\frac{1}{2}$, le soluzioni sono $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{e^{-3}-1}{2}$.

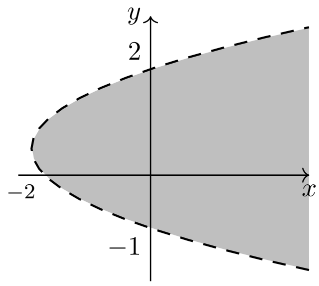
**Domanda 3.** Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y^2 - x - y - 2 < 0$

✎

La disequazione si può scrivere come

$$x > y^2 - y - 2 \quad ; \quad x > (y+1)(y-2).$$

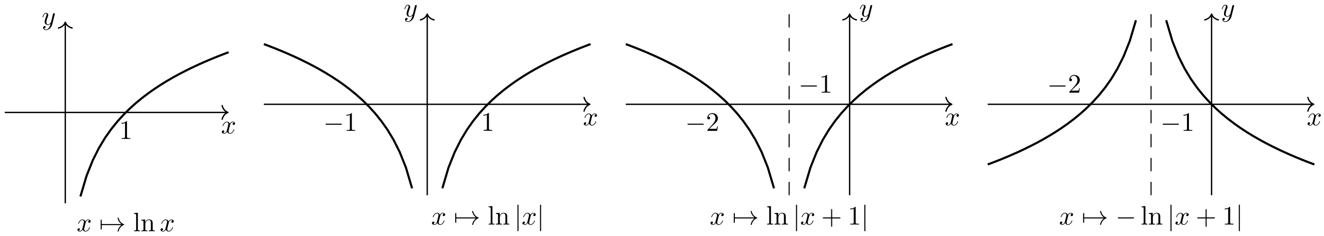
È la regione che sta a destra della parabola di equazione $x = (y+1)(y-2)$. La parabola ha asse orizzontale e interseca l'asse $y$ in $-1$ e 2. L'insieme è rappresentato qui a fianco in grigio. Il bordo della regione non è compreso.




**Domanda 4.** Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = -\ln|x+1|$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



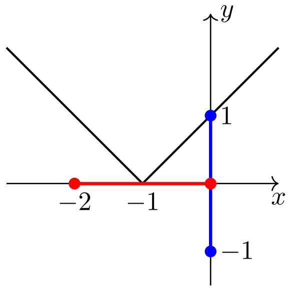

$x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln|x|$ $\quad$ $x \mapsto \ln|x+1|$ $\quad$ $x \mapsto -\ln|x+1|$

**Domanda 5.** Si determini la controimmagine dell'intervallo $[-1, 1]$ attraverso la funzione $f(x) = |x+1|$

✎

Qui conviene intanto disegnare il grafico della funzione $|x+1|$, che si ottiene dal grafico di $|x|$ con una traslazione a sinistra di 1. L'intervallo $[-1, 1]$ deve essere indicato sull'asse delle $y$ (in blu). Da osservare che i valori negativi di questo intervallo non hanno alcuna controimmagine, dato che la funzione non può assumere valori negativi. I soli valori dell'intervallo che hanno una controimmagine sono quindi quelli dell'intervallo $[0, 1]$. Da osservare che, ad esclusione di 0, che ha per controimmagine $-1$, tutti gli altri hanno due controimmagini (simmetriche rispetto a $-1$).

In rosso è indicato l'intervallo $[-2, 0]$, che è la controimmagine richiesta.




**Domanda 6**. Si calcoli il $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{-1/x} - \ln x\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{-1/x} - \ln x\right) = e^{-1/0^+} - \ln 0^+ = e^{-\infty} - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty.$

**Domanda 7**. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = (2x+3)\ \ln(3x+2)$

✎

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(3x+2) + (2x+3) \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot 3.$$

**Domanda 8**. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x) = (x^2 - x)\ e^{-x}$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = (2x-1)e^{-x} - (x^2-x)e^{-x} = -e^{-x}(x^2-3x+1)$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$-e^{-x}(x^2-3x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 11/11/2021**

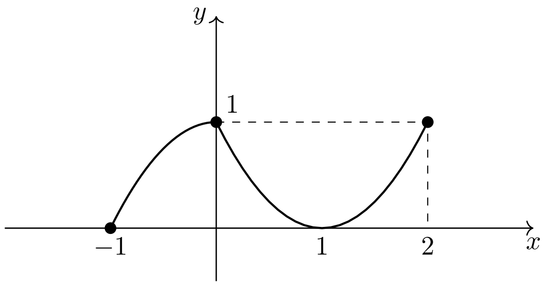
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 0 \\ (x-1)^2 & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si dica perché alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 2]$ e si dica in quali punti è verificata la tesi del teorema. Si dica se alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 2]$ e infine se in qualche punto è verificata la tesi del teorema.

✎

Le trasformazioni grafiche per le due funzioni polinomiali sono immediate. Il grafico della funzione $f$, nell'intervallo $[-1, 2]$, è questo.




Alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 2]$ perché si tratta di un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione è continua. La continuità è evidente nel grafico, oppure, con la definizione, osservando che

$$f(0) = 1 - 0^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Il teorema afferma che nelle ipotesi dette la funzione ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Dal grafico ricaviamo che

$$x'_M = 0 \quad \text{e} \quad x''_M = 2 \quad \text{sono punti di massimo, con valore massimo 1}$$

e

$$x'_m = -1 \quad \text{e} \quad x''_m = 1 \quad \text{sono punti di minimo, con valore minimo 0.}$$

Passiamo al teorema di Rolle. La sua applicabilità si ha se sono soddisfatte le ipotesi, che sono: la funzione deve essere continua nell'intervallo chiuso e limitato (già verificato in precedenza), deve essere derivabile nei punti interni dell'intervallo e deve assumere lo stesso valore agli estremi dell'intervallo. Dal grafico è evidente che la terza ipotesi non è verificata, dato che $f(-1) = 0$ e $f(2) = 1$. Basta questo per affermare che il teorema di Rolle non è applicabile.

Vediamo comunque anche la derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 2(x-1) & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0.

L'ultima domanda chiede se comunque in qualche punto è verificata la tesi del teorema di Rolle. Ricordo che questo può accedere a prescindere dal fatto che il teorema non è applicabile. La tesi è che esiste almeno un punto interno all'intervallo $[-1, 2]$ in cui la derivata della funzione si annulla. Evidentemente (dal grafico) questo è vero: nel punto $x = 1$ la derivata vale zero.

**ESERCIZIO 2**. Data la funzione

$$f(x) = 3x - e^{1+2x}$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di $f$ e si trovino i punti stazionari. Si disegni un possibile grafico di $f$. Si indichi l'immagine di $f$, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nell'origine.

✎

Non ci sono condizioni di esistenza da porre, quindi il dominio di $f$ è tutto $\mathbb{R}$. I limiti significativi sono pertanto $-\infty$ e $+\infty$.

Il primo si può fare con l'algebra dei limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (3x - e^{1+2x}) = -\infty - e^{-\infty} = -\infty - 0 = -\infty.$$

Il secondo è una forma indeterminata.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x - e^{1+2x}) = +\infty - e^{+\infty} = +\infty - \infty.$$

Ricordando che la funzione esponenziale tende all'infinito più velocemente di una potenza, il limite è $-\infty$. Però possiamo anche seguire una via algebrica:

$$\lim_{x\to+\infty} (3x - e^{1+2x}) = \lim_{x\to+\infty} x\left(3 - \frac{e^{1+2x}}{x}\right);$$

il limite della frazione vale $+\infty$ (si calcola facilmente applicando una volta il teorema di De L'Hôpital). Quindi il limite è $+\infty \cdot (3 - \infty) = -\infty$.

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di $f$ è

$$f'(x) = 3 - 2e^{1+2x}.$$

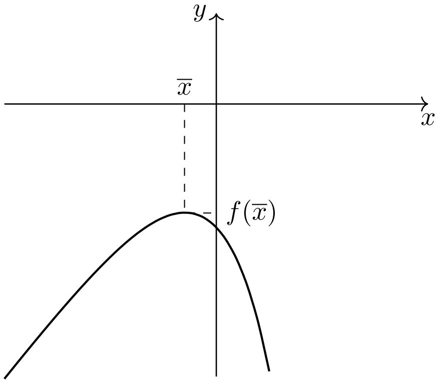
I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2e^{1+2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1+2x} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2x = \ln\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - 1\right).$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione (indichiamolo con $\overline{x} \approx -0.3$). Dato che i limiti agli infiniti sono entrambi $-\infty$ e quello trovato è l'unico punto stazionario, questo non può essere che il punto di massimo globale della funzione. In ogni caso il facile studio del segno della derivata porta a questa conclusione.

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2e^{1+2x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1+2x} < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2x < \ln\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < \overline{x}.$$

La funzione è quindi crescente fino a $\overline{x}$ e poi decrescente. Per un grafico più preciso conviene calcolare il valore della funzione in $\overline{x}$. Si ha $f(\overline{x}) = 3\overline{x} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - 2\right) \approx -2.4$. Un possibile grafico di $f$ è riportato qui sotto.




La domanda successiva è di scrivere l'immagine di $f$, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Dal grafico si vede che i valori sono dati dall'intervallo $\big(-\infty, f(\overline{x})\big] = \big(-\infty, \frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - 2\right)\big]$.

Infine l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nell'origine. L'equazione è in generale

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Ci servono il valore della funzione e della derivata in 0. Si ha

$$f(0) = -e \qquad \text{e} \qquad f'(0) = 3 - 2e.$$

L'equazione è quindi

$$y = -e + (3 - 2e)x.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 11/11/2021**

---

**Domanda 1.** Risolvere l'equazione

$$e^{x^2+2x} - e^3 = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$e^{x^2+2x} = e^3 \quad ; \quad x^2 + 2x = 3 \quad ; \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad ; \quad (x-1)(x+3) = 0 \quad ; \quad x = -3 \ \vee x = 1.$$

**Domanda 2.** Risolvere la disequazione

$$\ln(1 + 3x) + 2 \leq 0$$

✎

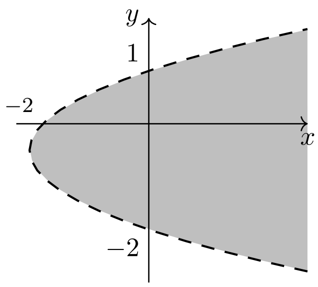
Con la condizione di esistenza $1 + 3x > 0$, cioè $x > -\frac{1}{3}$, la disequazione equivale a

$$\ln(1 + 3x) \leq -2 \quad ; \quad 1 + 3x \leq e^{-2} \quad ; \quad x \leq \frac{e^{-2} - 1}{3}.$$

Dato che $\frac{e^{-2}-1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-2} > -\frac{1}{3}$, le soluzioni sono $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{e^{-2}-1}{3}$.

**Domanda 3.** Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y^2 - x + y - 2 < 0$

✎



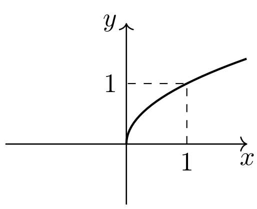

La disequazione si può scrivere come

$$x > y^2 + y - 2 \quad ; \quad x > (y + 2)(y - 1).$$

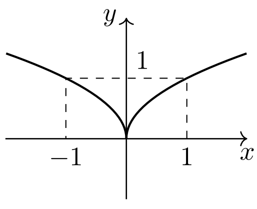
È la regione che sta a destra della parabola di equazione $x = (y + 2)(y - 1)$. La parabola ha asse orizzontale e interseca l'asse $y$ in $-2$ e 1. L'insieme è rappresentato qui a fianco in grigio. Il bordo della regione non è compreso.

**Domanda 4.** Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = -\sqrt{|x + 1|}$

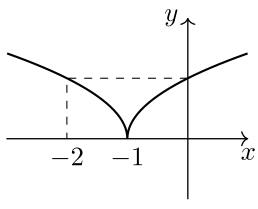
✎



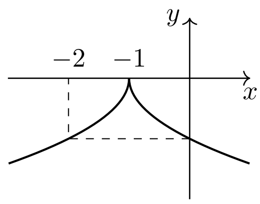

$x \mapsto \sqrt{x}$




$x \mapsto \sqrt{|x|}$




$x \mapsto \sqrt{|x+1|}$



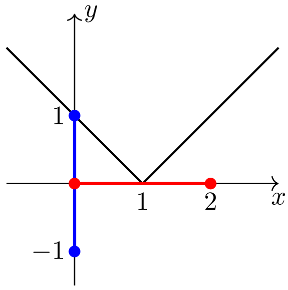

$x \mapsto -\sqrt{|x+1|}$

**Domanda 5.** Si determini la controimmagine dell'intervallo $[-1, 1]$ attraverso la funzione $f(x) = |x - 1|$

✎

Qui conviene intanto disegnare il grafico della funzione $|x - 1|$, che si ottiene dal grafico di $|x|$ con una traslazione a destra di 1. L'intervallo $[-1, 1]$ deve essere indicato sull'asse delle $y$ (in blu). Da osservare che i valori negativi di questo intervallo non hanno alcuna controimmagine, dato che la funzione non può assumere valori negativi. I soli valori dell'intervallo che hanno una controimmagine sono quindi quelli dell'intervallo $[0, 1]$. Da osservare che, ad esclusione di 0, che ha per controimmagine 1, tutti gli altri hanno due controimmagini (simmetriche rispetto a 1).

In rosso è indicato l'intervallo $[0, 2]$, che è la controimmagine richiesta.




**Domanda 6**. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln\frac{1}{x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln\frac{1}{x}\right)=e^{-\infty}-\ln\frac{1}{+\infty}=0-\ln 0^{+}=0-(-\infty)=+\infty.$

**Domanda 7**. Si calcoli la derivata della funzione $f(x)=(3x+2)\ \ln(2x+3)$

✎

$$f'(x)=3\cdot\ln(2x+3)+(3x+2)\cdot\frac{1}{2x+3}\cdot 2.$$

**Domanda 8**. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x)=(x^2+x)\ e^{-x}$

✎

La derivata della funzione è $f'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x)e^{-x}=-e^{-x}(x^2-x-1)$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$-e^{-x}(x^2-x-1)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-1=0\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 11/11/2021**

---

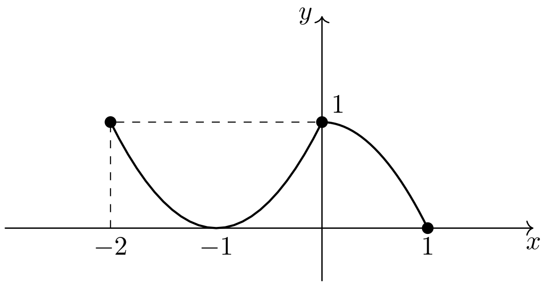
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ 1-x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si dica perché alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2,1]$ e si dica in quali punti è verificata la tesi del teorema. Si dica se alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-2,1]$ e infine se in qualche punto è verificata la tesi del teorema.

✎

Le trasformazioni grafiche per le due funzioni polinomiali sono immediate. Il grafico della funzione $f$, nell'intervallo $[-2,1]$, è questo.




Alla funzione $f$ è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2,1]$ perché si tratta di un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione è continua. La continuità è evidente nel grafico, oppure, con la definizione, osservando che

$$f(0) = (0+1)^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1-x^2) = 1.$$

Il teorema afferma che nelle ipotesi dette la funzione ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Dal grafico ricaviamo che

$$x'_M = -2 \quad \text{e} \quad x''_M = 0 \quad \text{sono punti di massimo, con valore massimo } 1$$

e

$$x'_m = -1 \quad \text{e} \quad x''_m = 1 \quad \text{sono punti di minimo, con valore minimo } 0.$$

Passiamo al teorema di Rolle. La sua applicabilità si ha se sono soddisfatte le ipotesi, che sono: la funzione deve essere continua nell'intervallo chiuso e limitato (già verificato in precedenza), deve essere derivabile nei punti interni dell'intervallo e deve assumere lo stesso valore agli estremi dell'intervallo. Dal grafico è evidente che la terza ipotesi non è verificata, dato che $f(-2) = 1$ e $f(1) = 0$. Basta questo per affermare che il teorema di Rolle non è applicabile.

Vediamo comunque anche la derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & -2 < x < 0 \\ -2x & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2(x+1) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(-2x) = 0.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0.

L'ultima domanda chiede se comunque in qualche punto è verificata la tesi del teorema di Rolle. Ricordo che questo può accedere a prescindere dal fatto che il teorema non è applicabile. La tesi è che esiste almeno un punto interno all'intervallo $[-2,1]$ in cui la derivata della funzione si annulla. Evidentemente (dal grafico) questo è vero: nel punto $x = -1$ la derivata vale zero.

**ESERCIZIO 2**. Data la funzione
$$f(x) = e^{1+3x} - 2x$$
se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di $f$ e si trovino i punti stazionari. Si disegni un possibile grafico di $f$. Si indichi l'immagine di $f$, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nell'origine.

✎

Non ci sono condizioni di esistenza da porre, quindi il dominio di $f$ è tutto $\mathbb{R}$. I limiti significativi sono pertanto $-\infty$ e $+\infty$.

Il primo si può fare con l'algebra dei limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{1+3x} - 2x) = e^{-\infty} + \infty = 0 + \infty = +\infty.$$

Il secondo è una forma indeterminata.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{1+3x} - 2x) = e^{+\infty} - \infty = +\infty - \infty.$$

Ricordando che la funzione esponenziale tende all'infinito più velocemente di una potenza, il limite è $+\infty$. Però possiamo anche seguire una via algebrica:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{1+3x} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{1+3x}}{x} - 2\right);$$

il limite della frazione vale $+\infty$ (si calcola facilmente applicando una volta il teorema di De L'Hôpital). Quindi il limite è $+\infty \cdot (+\infty - 2) = +\infty$.

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di $f$ è

$$f'(x) = 3e^{1+3x} - 2.$$

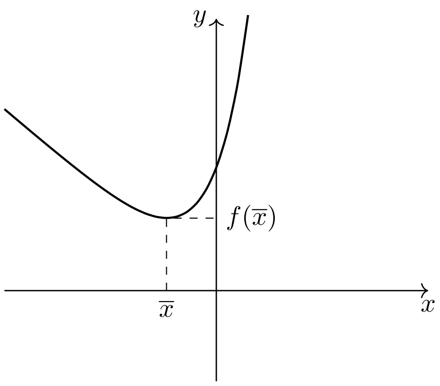
I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3e^{1+3x} - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{1+3x} = \frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 1 + 3x = \ln\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{3} - 1\right).$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione (indichiamolo con $\overline{x} \approx -0.47$). Dato che i limiti agli infiniti sono entrambi $+\infty$ e quello trovato è l'unico punto stazionario, questo non può essere che il punto di minimo globale della funzione. In ogni caso il facile studio del segno della derivata porta a questa conclusione.

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3e^{1+3x} - 2 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{1+3x} > \frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 1 + 3x > \ln\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{3} - 1\right).$$

La funzione è quindi decrescente fino a $\overline{x}$ e poi crescente. Per un grafico più preciso conviene calcolare il valore della funzione in $\overline{x}$. Si ha $f(\overline{x}) = \frac{2}{3} - 2\overline{x} = \frac{2}{3}\left(2 - \ln\frac{2}{3}\right) \approx 1.60$. Un possibile grafico di $f$ è riportato qui sotto.




La domanda successiva è di scrivere l'immagine di $f$, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume. Dal grafico si vede che i valori sono dati dall'intervallo $\left[f(\overline{x}), +\infty\right) = \left[\frac{2}{3}\left(2 - \ln\frac{2}{3}\right), +\infty\right)$.

Infine l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nell'origine. L'equazione è in generale

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Ci servono il valore della funzione e della derivata in 0. Si ha

$$f(0) = e \qquad \text{e} \qquad f'(0) = 3e - 2.$$

L'equazione è quindi

$$y = e + (3e - 2)x.$$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 21/01/2022**

---

**Domanda 1**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2(1+2x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(1+2x)^{1/2}}{1/2} + c = \sqrt{1+2x} + c.$$

**Domanda 2**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{1-2x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} e^{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-2)e^{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot e^{1-2x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{3}) = \frac{e^3-e^{-1}}{2}.$$

**Domanda 3**. Scrivere un vettore non nullo ortogonale al vettore $(1,2,3,4)$

✎

Ci sono molte (infinite) risposte possibili. Ne fornisco un paio.

$(2,-1,0,0)$ in quanto $2\cdot 1+(-1)\cdot 2+0\cdot 3+0\cdot 4=0$ oppure $(1,1,-1,0)$ in quanto $1\cdot 1+1\cdot 2+(-1)\cdot 3+0\cdot 4=0$.

**Domanda 4**. Calcolare il prodotto righe per colonne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 5**. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

✎

$$\text{(rispetto alla 1}^{\text{a}}\text{ riga)}\quad \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3\cdot 2 - 2\cdot 2 = 2.$$

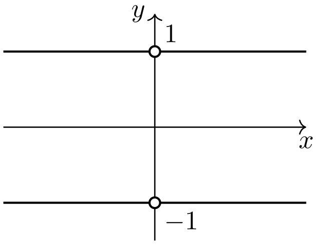
**Domanda 6**. Disegnare la curva di livello 0 della funzione $f(x,y)=\dfrac{1-y^2}{x}$

✎

Anzitutto deve essere $x\neq 0$. La curva di livello 0 di $f$ è definita dall'equazione

$$\frac{1-y^2}{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm 1.$$

Si tratta dei punti che stanno su due rette orizzontali, come rappresentato nella pagina seguente.




**Domanda 7**. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = 2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Il determinate di $A$ è zero. I minori principali di ordine 1 ($a_{11} = 2$ e $a_{22} = 1/2$) sono entrambi positivi e quindi la forma è semidefinita positiva.

**Domanda 8**. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = \dfrac{1 - y^2}{x}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - y^2)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1 - y^2}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}(-2y) = -\frac{2y}{x} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla f = \left(-\frac{1 - y^2}{x^2}, -\frac{2y}{x}\right).$$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 21/01/2022**

---

**ESERCIZIO 1**. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x+z-t=1 \\ -y+z+t=2 \\ x+y-2t=-1 \end{cases}$$

si dica perché, in base al teorema di Rouché–Capelli, esso ha soluzioni. Si dica se il vettore $(1,1,-2,-2)$ è oppure no una delle soluzioni. Si trovino tutte le soluzioni del sistema e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema sono

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Possiamo osservare che nella matrice $A|b$ la terza riga si ottiene dalla differenza tra la prima e la seconda. Quindi il rango non può essere 3. Esso è certamente 2 per entrambe le matrici, dato che ad esempio il minore evidenziato in grigio è diverso da zero. In base al teorema di Rouché–Capelli, essendo $r(A) = r(A|b)$, il sistema ha almeno una soluzione.

Per dire se il vettore $(1,1,-2,-2)$ è oppure no una delle soluzioni basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} 1-2+2=1 \\ -1-2-2 \neq 2 \\ \dots \end{cases} \qquad \text{e quindi non si tratta di una delle soluzioni.}$$

Troviamo le soluzioni del sistema.

Possiamo eliminare la terza equazione e rendere parametri la $z$ e la $t$. Questo è coerente con il minore di ordine 2 indicato in precedenza.[1] Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x=1-z+t \\ -y=2-z-t \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x=1-z+t \\ y=-2+z+t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big(1-z+t, -2+z+t, z, t\big) \ : \ z,t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere le soluzioni come

$$\mathcal{S} = \Big\{ (1,-2,0,0) + z\big(-1,1,1,0\big) + t\big(1,1,0,1\big) \ : \ z,t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big(-1,1,1,0\big)$ e $\big(1,1,0,1\big)$ formano una base di $\mathcal{S}$.

**ESERCIZIO 2**. Data la funzione

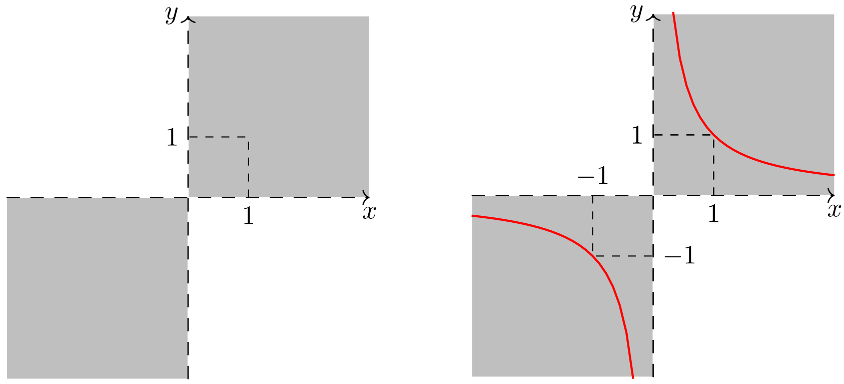
$$f(x,y) = y\ln(xy)$$

si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si trovino, se esistono, tutti i punti stazionari di $f$. Si scriva infine la restrizione della funzione alla curva di equazione $xy = e$.

✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione $f$ è data da

$$xy > 0 \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x<0 \\ y<0. \end{cases}$$




Si tratta del 1° oppure del 3° quadrante, punti di frontiera, cioè assi cartesiani, esclusi. Il dominio di $f$ è rappresentato in grigio nella figura a sinistra qui sopra.

Un punto interno è ad esempio $(1, 1)$ e un punto di frontiera è ad esempio l'origine.

La funzione si annulla se

$$y = 0 \quad \text{(non accettabile)} \quad \text{oppure se} \quad \ln(xy) = 0, \text{ cioè se } xy = 1.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti del 1° oppure del 3° quadrante che stanno sull'iperbole di equazione $xy = 1$, disegnata in rosso nella figura qui sopra a destra.

Ora i punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di $f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{y}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(xy) + y \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \ln(xy) + 1.$$

È evidente che la derivata parziale rispetto ad $x$non si annulla nel dominio, che esclude $y = 0$. Pertanto non ci sono punti stazionari.

Scriviamo infine la restrizione della funzione alla curva di equazione $xy = e$ (si tratta di un'altra iperbole nel 1° e 3° quadrante). Si ha

$$f\Big|_{xy=e} = y \ln e = y.$$[2]

[1]Faccio notare che la scelta del minore che si ottiene con la 2ª e 3ª e 1ª e 3ª colonna, con conseguente eliminazione della 1ª equazione e parametri $y$ e $t$, sarebbe stato ancora più conveniente, anche se non di molto.

[2]Una analoga espressione della restrizione, ma in funzione di $x$, sarebbe $f\Big|_{xy=e} = \frac{e}{x}$.

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 21/01/2022**

---

**Domanda 1**. Riscrivere l'espressione $x^2e^x - xe^{-x}$ raccogliendo $x^2e^{-x}$

✎

$$x^2e^x - xe^{-x} = x^2e^{-x}\left(\frac{x^2e^x}{x^2e^{-x}} - \frac{xe^{-x}}{x^2e^{-x}}\right) = x^2e^{-x}\left(e^{2x} - \frac{1}{x}\right).$$

**Domanda 2**. Semplificare l'espressione $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\ln(\sqrt{e})}$

✎

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\ln(\sqrt{e})} = \log_2 2^{-1/2} + \frac{1}{\ln e^{1/2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

✎

$$(\text{con } x \neq 0) \quad 1 + \frac{1}{x} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1 - x^2}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$\ln(x+1) + 1 < 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln(x+1) < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x+1) < \ln e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 < \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{e} - 1.$$

Con le condizioni di esistenza le soluzioni sono $-1 < x < \frac{1}{e} - 1$.

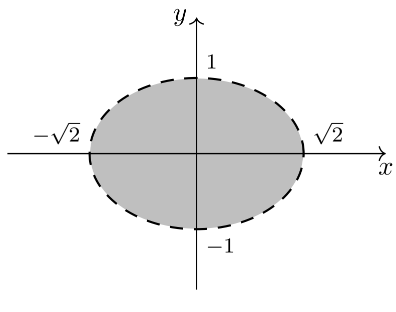
**Domanda 5**. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x^2}{2} + y^2 - 1 < 0$

✎

La disequazione equivale a

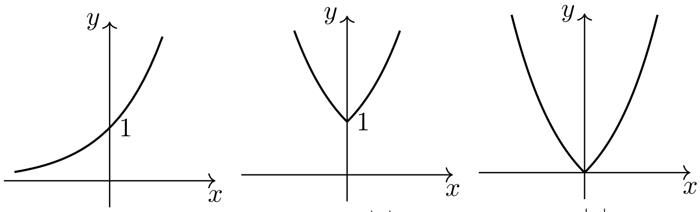
$$\frac{x^2}{2} + y^2 < 1$$

e questa individua la regione che sta all'interno dell'ellisse con centro l'origine e semiassi $\sqrt{2}$ e 1. La regione è indicata in grigio nella figura qui sotto.



**Domanda 6**. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = e^{|x|} - 1$

✎




$x \mapsto e^x$ $\quad$ $x \mapsto e^{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto e^{|x|} - 1$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{1-e^x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{1-e^x} = \frac{1-(-\infty)}{1-e^{0^+}} = \frac{1+\infty}{1-1^+} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty.$$

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \big(1-\ln^2 x\big)^2$

✎

$$f'(x) = 2\big(1-\ln^2 x\big) \cdot \left(-2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right).$$

**Domanda 9**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x \ln x \,\mathrm{d}x$

✎

$$\text{(per parti)} \quad \int x\ln x \,\mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

**Domanda 10**. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = \dfrac{y}{\ln x}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \left(-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\right) = -\frac{y}{x\ln^2 x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\ln x} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla f = \left(-\frac{y}{x\ln^2 x}, \frac{1}{\ln x}\right).$$

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 21/01/2022**

---

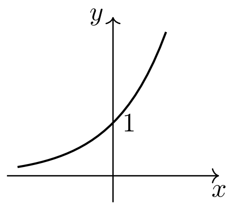
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ (x-1)^2 & x > 0, \end{cases}$$

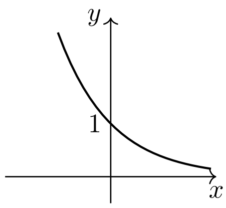
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se $f$ è continua e derivabile nell'intervallo $[-1, 2]$. Si dica perché è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione $f$ nell'intervallo $[-1, 2]$ e, anche solo sulla base del grafico, si verifichi la tesi.

✎

La trasformazione grafica elementare della funzione esponenziale è questa.

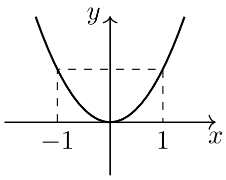



$x \mapsto e^x$

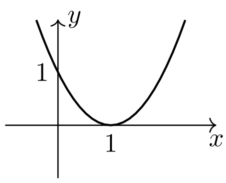



$x \mapsto e^{-x}$

La trasformazione della funzione polinomiale è questa.

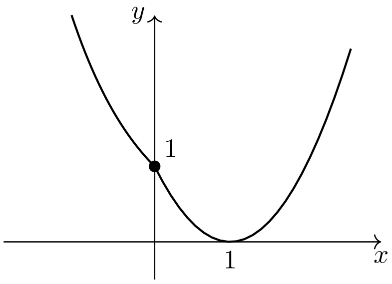


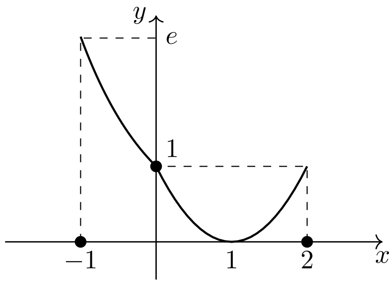

$x \mapsto x^2$




$x \mapsto (x-1)^2$

Il grafico della funzione $f$ è pertanto quello qui sotto a sinistra.




Il grafico della funzione $f$ nell'intervallo $[-1, 2]$, è qui sopra a destra.

Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che $f$ è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale, mentre a destra essa è una funzione polinomiale.

Si ha

$$f(0) = e^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1.$$

La funzione pertanto è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x < 0 \\ 2(x-1) & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{-x} = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0 (si ha un punto angoloso).

Il teorema di Weierstrass è applicabile alla funzione $f$ nell'intervallo $[-1,2]$ in quanto l'intervallo è chiuso e limitato e la funzione è continua in questo intervallo. La tesi del teorema è che la funzione ha nell'intervallo $[-1,2]$ almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo.

Possiamo dire, sulla base del grafico, che $x_{\max} = -1$ (con valore massimo $f(-1) = e$) e che $x_{\min} = 1$ (con valore minimo $f(1) = 0$).

**ESERCIZIO 2**. Dati i tre vettori

$$v^1 = (1,0,-1) \quad , \quad v^2 = (-1,1,1) \quad , \quad v^3 = (2,1,-2)$$

si provi che essi non sono generatori di tutto $\mathbb{R}^3$ e si determini la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato. Si dica se il vettore $(-1,8,1)$ appartiene a questo sottospazio e, in caso affermativo lo si scriva come combinazione lineare dei vettori dati.

✎

Vediamo se i tre vettori sono dipendenti o indipendenti. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice quadrata

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $V$ (calcolato rispetto alla prima riga) è

$$\det V = 1\cdot(-3) - 1\cdot(-3) = -3+3 = 0.$$

I vettori sono quindi linearmente dipendenti e pertanto non possono essere generatori $\mathbb{R}^3$.[3]

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori è uguale al rango della matrice $V$. Dato che il determinante è zero, possiamo dire che il rango non è 3. Possiamo dire che è 2 osservando che ad esempio la sottomatrice di $V$ formata dalle prime due righe e le prime due colonne ha determinante diverso da zero.

Per capire se il vettore $(-1,8,1)$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori si può fare così: dei tre vettori due sono sufficienti per generare lo stesso sottospazio $\mathcal{S}$, dato che uno dipende dagli altri due. Possiamo dire che $v^1$ e $v^2$ sono indipendenti, dato che il rango delle prime due righe della matrice $V$ è 2. Consideriamo allora la matrice

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Il determinante è } 1\cdot(-7) - 1\cdot(-7) = 0.$$

Il vettore $(-1,8,1)$ è allora dipendente da $v^1$ e $v^2$, cioè si può scrivere come loro combinazione lineare, cioè appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$.

È richiesto ora di scrivere $(-1,8,1)$ come combinazione lineare dei tre vettori di partenza. Possiamo anche qui considerare soltanto $v^1$ e $v^2$ e porre poi uguale a zero il coefficiente di $v^3$. Poniamo

$$(-1,8,1) = av^1 + bv^2 \quad \Leftrightarrow \quad (-1,8,1) = a(1,0,-1) + b(-1,1,1) \quad \Leftrightarrow \quad (-1,8,1) = (a-2b, b, -2a)$$

Questo equivale a

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ b = 8 \\ -a + b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 7 \\ b = 8. \end{cases}$$

La risposta da dare è quindi

$$(-1,8,1) = 7v^1 + 8v^2 + 0v^3.$$

[3]Per avere dei generatori di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo avere almeno tre vettori linearmente indipendenti.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x,y) = x + y - \ln\big(x+y\big)$$

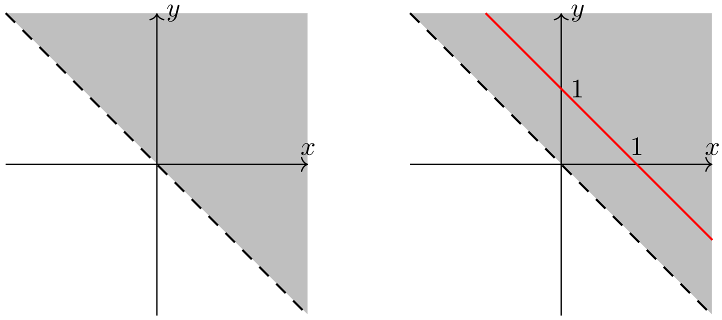
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si trovino i punti stazionari di $f$, provando che sono infiniti; qual è il valore di $f$ lungo tali punti? Si provi che le condizioni del secondo ordine non consentono di stabilire la natura di tali punti stazionari.

✎

La condizione per l'esistenza della funzione $f$ è semplicemente

$$x + y > 0 \quad \text{e cioè} \quad y > -x.$$

Si tratta dei punti del piano che stanno al di sopra della bisettrice del secondo e quarto quadrante. Il dominio di $f$ è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra, con la precisazione che i punti sulla retta non appartengono al dominio. Quindi l'insieme è aperto.




Un punto interno al dominio è ad esempio $(1,1)$, mentre un punto di frontiera è ad esempio l'origine.

Per trovare gli eventuali punti stazionari calcoliamo le derivate parziali di $f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x+y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{x+y}.$$

Le due derivate sono uguali, quindi per trovare i punti stazionari basta risolvere l'equazione

$$1 - \frac{1}{x+y} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{1}{x+y} = 1 \qquad \text{cioè} \qquad x + y = 1.$$

I punti stazionari sono tutti i punti che stanno sulla retta di equazione $y = 1 - x$. Sono quindi infiniti (rappresentati in rosso nella figura sopra a destra).

Il valore di $f$ lungo tali punti si ottiene scrivendo la restrizione di $f$ sulla retta. Si ha

$$f\Big|_{x+y=1} = 1 - \ln 1 = 1.$$

Ultima questione: le condizioni del secondo ordine non consentono di stabilire la natura dei punti stazionari.

Calcoliamo le derivate parziali seconde per ottenere il gradiente secondo (matrice Hessiana):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Quindi

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x+y)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nei punti stazionari (la retta di equazione $x + y = 1$) la matrice Hessiana si riduce a

$$\nabla^2 f\Big|_{x+y=1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una matrice semidefinita positiva e questo non consente di stabilire la natura dei punti stazionari.[4]

[4]Ricordo che in un punto stazionario un gradiente secondo definito positivo/negativo permette di dire che il punto è di minimo/massimo, che un gradiente secondo indefinito permette di dire che è un punto di sella, ma che un gradiente secondo semidefinito è una condizione necessaria ma non sufficiente per stabilire la natura.

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 11/02/2022**

---

**Domanda 1**. Calcolare l'integrale $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$$

**Domanda 2**. Calcolare l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 2(2x+1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(2x+1)^{1/2}}{1/2}\right|_0^1 = \left.\sqrt{2x+1}\right|_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

**Domanda 3**. Calcolare il prodotto interno (scalare) dei vettori $(4,3,2,1)$ e $(-1,2,1,-4)$

✎

$$\langle(4,3,2,1),(-1,2,1,-4)\rangle = 4\cdot(-1)+3\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-4) = -4+6+2-4 = 0.$$

**Domanda 4**. Calcolare il prodotto righe per colonne $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 6 & 0\\ 5 & 5 & -2\end{pmatrix}.$$

**Domanda 5**. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

✎

$$\text{(rispetto alla 1}^{\text{a}}\text{ riga)}\quad \det\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} = 3\cdot 2-1\cdot 0-2\cdot 2 = 6-4 = 2.$$

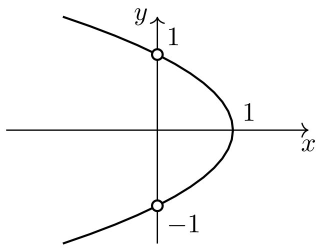
**Domanda 6**. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y)=\frac{1-y^2}{x}$

✎

Anzitutto deve essere $x\neq 0$. La curva di livello 1 di $f$ è definita dall'equazione

$$\frac{1-y^2}{x} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1-y^2.$$

Si tratta dei punti che stanno sulla parabola rappresentata nella pagina seguente.




Attenzione che sono da escludere i punti della parabola che stanno sull'asse verticale, dato che la funzione non è definita sulla retta di equazione $x = 0$.

**Domanda 7**. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -9x^2 + 3xy - \frac{1}{4}y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 3/2 \\ 3/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Il determinate di $A$ è zero. I minori principali di ordine 1 ($a_{11} = -9$ e $a_{22} = -1/4$) sono entrambi negativi e quindi la forma è semidefinita negativa.

**Domanda 8**. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = \dfrac{y + x^2}{y}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot (0 + 2x) = \frac{2x}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(1+0) \cdot y - (y + x^2) \cdot 1}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla f = \left( \frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2} \right).$$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 11/02/2022**

---

**ESERCIZIO 1**. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y - 3z - t = 1 \end{cases}$$

si dica, in base al teorema di Rouché–Capelli, se ha soluzioni oppure no. Si dica poi se il vettore $(1, 2, 2, -3)$ è oppure no una delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si trovino infine tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato, indicando una base delle soluzioni stesse.

✎

Le matrici del sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nella matrice $A$ la $2^{a}$ riga è la somma della $1^{a}$ e della $3^{a}$. Quindi nella matrice $A$ il rango non può essere 3.[5] È certamente 2 osservando, ad esempio, che il minore evidenziato a sinistra è diverso da zero.

Attenzione che nella matrice $A|b$ non abbiamo la stessa dipendenza sulle righe e anzi il minore del 3° ordine evidenziato a destra è diverso da zero. Quindi il rango di $A|b$ è 3.

Essendo diversi i due ranghi, in base al teorema di Rouché–Capelli, il sistema non ha soluzioni.

Per dire se il vettore $(1, 2, 2, -3)$ è oppure no una delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni (con termini noti tutti nulli) sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} 1 - 2 + 4 - 3 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \\ -1 + 4 - 6 + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi si tratta di una delle soluzioni.}$$

Troviamo le soluzioni del sistema omogeneo associato, cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y - 3z - t = 0. \end{cases}$$

Possiamo eliminare la terza equazione, coerentemente con il minore indicato prima, e rendere parametri $z$ e $t$. Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y = -2z - t \\ y = z \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} y = z \\ x = -z - t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big( -z - t, z, z, t \big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere le soluzioni come

$$\mathcal{S} = \Big\{ z\big( -1, 1, 1, 0 \big) + t\big( -1, 0, 0, 1 \big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big( -1, 1, 1, 0 \big)$ e $\big( -1, 0, 0, 1 \big)$ formano una base di $\mathcal{S}$.

---

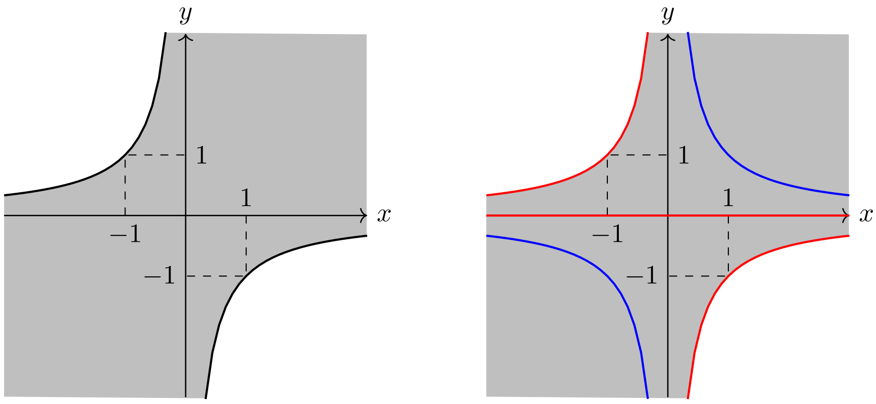
[5] Ricordo che, se non ci si accorge della dipendenza nelle righe, il modo alternativo e corretto per stabilire che il rango non è 3 è di verificare che tutti i minori del 3° ordine, cioè i determinati delle sottomatrici quadrate $3 \times 3$ (che sono in tutto 4), sono tutti nulli.

**ESERCIZIO 2**. Data la funzione
$$f(x, y) = y\sqrt{1 + xy}$$
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si trovino, se esistono, tutti i punti stazionari di $f$. Si scriva infine la restrizione della funzione alla curva di equazione $xy = 1$.

✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione $f$ è data da
$$1 + xy \geq 0 \quad \text{che equivale a} \quad xy \geq -1.$$

Si tratta della regione rappresentata in grigio nella figura a sinistra qui sotto.




Un punto interno è ad esempio l'origine e un punto di frontiera è un qualunque punto sull'iperbole, ad esempio $(1, -1)$.
La funzione si annulla se
$$y\sqrt{1 + xy} = 0 \quad \text{, che equivale a } y = 0 \quad \vee \quad 1 + xy = 0.$$

Si tratta dei punti che stanno sull'asse $x$ oppure sull'iperbole, punti indicati in rosso nella figura qui sopra a destra.
Ora i punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di $f$.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{y}{2\sqrt{1 + xy}} = \frac{y^2}{2\sqrt{1 + xy}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{1 + xy} + y \cdot \frac{x}{2\sqrt{1 + xy}}.$$

La derivata parziale rispetto ad $x$ si annulla solo se $y = 0$. Sostituendo $y = 0$ nella derivata parziale rispetto ad $y$ si ottiene 1 e quindi non ci sono punti che annullano contemporaneamente entrambe le derivate, cioè non ci sono punti stazionari.
Scriviamo infine la restrizione della funzione alla curva di equazione $xy = 1$ (si tratta di un'altra iperbole nel 1° e 3° quadrante, raffigurata in blu sopra a destra). Si ha
$$f\Big|_{xy=1} = y\sqrt{2}.$$

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 11/02/2022**

---

**Domanda 1**. Scomporre il polinomio $x^4 - 4x^3 - 5x^2$ in fattori non ulteriormente scomponibili.

✎

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 = x^2(x^2 - 4x - 5) = x^2(x+1)(x-5)$$

**Domanda 2**. Semplificare l'espressione $\dfrac{1}{\ln(\sqrt[3]{e^2})} - \log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$

✎

$$\frac{1}{\ln(\sqrt[3]{e^2})} - \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\ln e^{2/3}} - \log_2 2^{-3/2} = \frac{1}{2/3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

✎

$$(\text{con } x \neq 0) \quad 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$1 - \ln^2 x < 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x > 0$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln^2 x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < -1 \quad \vee \quad \ln x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{e} \quad \vee \quad x > e.$$

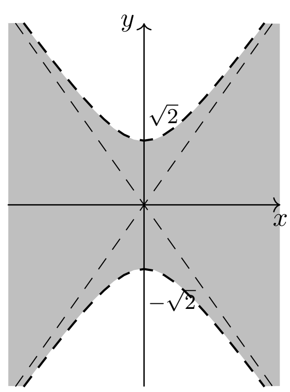
**Domanda 5**. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - \dfrac{y^2}{2} + 1 > 0$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 - \frac{y^2}{2} > -1.$$

L'equazione corrispondente individua un'iperbole di centro l'origine, asintoti obliqui, i cui rami stanno al di sopra e al di sotto del centro. Le pendenze degli asintoti sono date da $m = \pm\frac{b}{a} = \pm\sqrt{2}$. Il centro soddisfa la disequazione e quindi la regione è quella raffigurata in grigio nella figura qui a fianco. Il bordo della regione non è compreso nelle soluzioni.

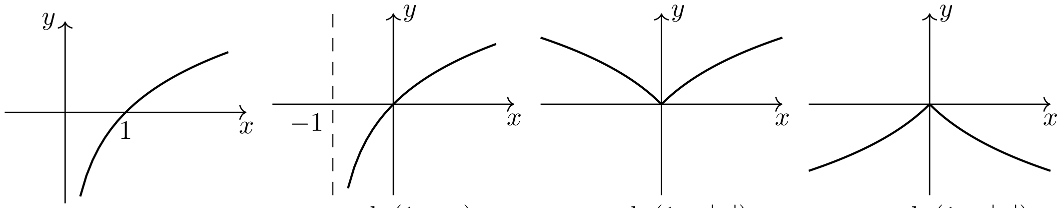



**Domanda 6**. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = -\ln(1 + |x|)$

✎

Per arrivare alla funzione voluta possiamo effettuare questa sequenza di trasformazioni:

$$\ln x \quad \to \quad \ln(1+x) \quad \to \quad \ln(1+|x|) \quad \to \quad -\ln(1+|x|).$$




$x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln(1+x)$ $\quad$ $x \mapsto \ln(1+|x|)$ $\quad$ $x \mapsto -\ln(1+|x|)$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{x^2-1}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{x^2-1} = \dfrac{\ln(1-1^-)}{(1^-)^2-1} = \dfrac{\ln(0^+)}{1^- - 1} = \dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty.$

Per quanto riguarda $x^2$ si consideri che se $0 < x < 1$ allora $0 < x^2 < 1$, e quindi $(1^-)^2 = 1^-$.

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \big(x + e^{1/x}\big)^2$

✎

$$f'(x) = 2\big(x + e^{1/x}\big) \cdot \left(1 - e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}\right).$$

**Domanda 9**. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

**Domanda 10**. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{xy}\cdot y \cdot x - e^{xy}\cdot 1}{x^2} = e^{xy}\frac{xy-1}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}e^{xy}\cdot x = e^{xy} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla f = \left(e^{xy}\frac{xy-1}{x^2}, e^{xy}\right).$$

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 11/02/2022**

---

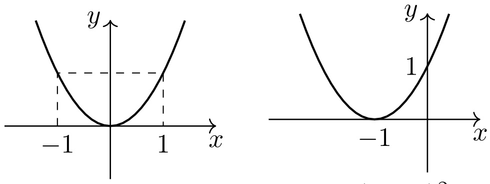
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se $f$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Si indichi un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione $f$. Si dica se la tesi del teorema è vera (e in quali eventuali punti) nell'intervallo $[-2, 1]$.

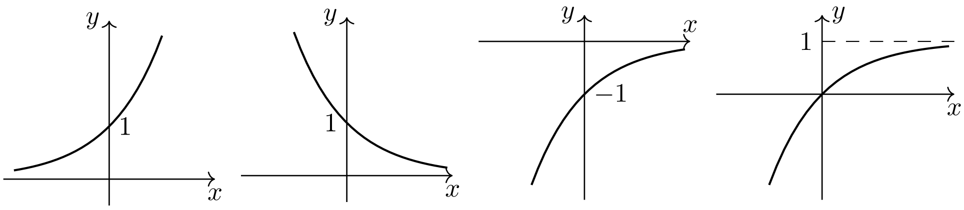
✎

La trasformazione della funzione polinomiale è questa.



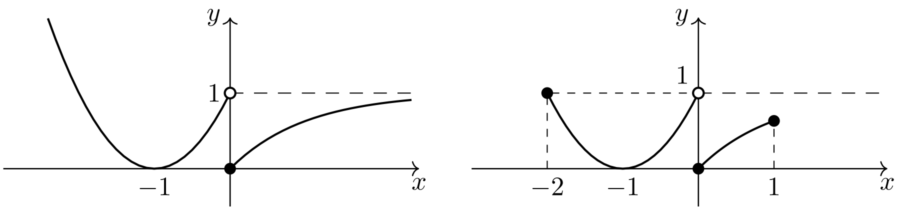

$x \mapsto x^2$ $x \mapsto (x+1)^2$

La trasformazione grafica elementare della funzione esponenziale è questa.




$x \mapsto e^x$ $x \mapsto e^{-x}$ $x \mapsto -e^{-x}$ $x \mapsto 1 - e^{-x}$

Il grafico della funzione $f$ su tutto $\mathbb{R}$ è pertanto quello qui sotto a sinistra.




Evidentemente la funzione non è continua in $x = 0$. Verifichiamolo comunque con la definizione.

Possiamo affermare che $f$ è certamente continua in 0 da destra, dato che in $x = 0$ e in un intorno destro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da sinistra.

Si ha

$$f(0) = 1 - e^0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1)^2 = 1.$$

La funzione pertanto non è continua in 0.

Per quanto riguarda la derivabilità possiamo dire subito che la funzione $f$ non è derivabile in $x = 0$, dato che non è continua. Faccio notare che facendo i limiti della derivata da destra e da sinistra si corre il rischio di sbagliare, dato che questi potrebbero essere uguali (non nel nostro caso però) anche se la funzione non è derivabile.

Dobbiamo ora indicare un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione $f$. Basta evidentemente indicare un qualunque intervallo in cui $f$ è continua, cioè un intervallo che non contenga lo zero.[6] Un possibile intervallo è, ad esempio, $[0, 1]$.

[6] Per la verità può anche contenerlo, basta che zero sia l'estremo sinistro: la funzione infatti è continua in zero da destra. Non andrebbe bene invece un intervallo in cui zero è il secondo estremo.

Ora dobbiamo considerare la funzione nell'intervallo $[-2, 1]$ e dire se la tesi del teorema di Weierstrass è vera e in quali eventuali punti in tale intervallo. Il grafico della funzione $f$ nell'intervallo $[-1, 2]$, è nell'ultima a figura di destra della pagina precedente.

Dal grafico possiamo ricavare che $f$ ha un punto di massimo $x_{\max} = -2$ (con valore massimo $f(-2) = 1$) e due punti di minimo $x'_{\min} = -1$ e $x''_{\min} = 0$ (con valore minimo $f(-1) = f(0) = 0$).

**ESERCIZIO 2**. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y - 3z - t = 1 \end{cases}$$

si dica, in base al teorema di Rouché–Capelli, se ha soluzioni oppure no. Si dica poi se il vettore $(1, 2, 2, -3)$ è oppure no una delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si trovino infine tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato, indicando una base delle soluzioni stesse.

Le matrici del sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nella matrice $A$ la 2ª riga è la somma della 1ª e della 3ª. Quindi nella matrice $A$ il rango non può essere 3.[7] È certamente 2 osservando, ad esempio, che il minore evidenziato a sinistra è diverso da zero.

Attenzione che nella matrice $A|b$ non abbiamo la stessa dipendenza sulle righe e anzi il minore del 3º ordine evidenziato a destra è diverso da zero. Quindi il rango di $A|b$ è 3.

Essendo diversi i due ranghi, in base al teorema di Rouché–Capelli, il sistema non ha soluzioni.

Per dire se il vettore $(1, 2, 2, -3)$ è oppure no una delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni (con termini noti tutti nulli) sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} 1 - 2 + 4 - 3 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \\ -1 + 4 - 6 + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi si tratta di una delle soluzioni.}$$

Troviamo le soluzioni del sistema omogeneo associato, cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y - 3z - t = 0 \end{cases}$$

Possiamo eliminare la terza equazione, coerentemente con il minore indicato prima, e rendere parametri $z$ e $t$. Si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y = -2z - t \\ y = z \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} y = z \\ x = -z - t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big( -z - t, z, z, t \big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato basta riscrivere le soluzioni come

$$\mathcal{S} = \Big\{ z\big( -1, 1, 1, 0 \big) + t\big( -1, 0, 0, 1 \big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big( -1, 1, 1, 0 \big)$ e $\big( -1, 0, 0, 1 \big)$ formano una base di $\mathcal{S}$.

[7] Ricordo che, se non ci si accorge della dipendenza nelle righe, il modo alternativo e corretto per stabilire che il rango non è 3 è di verificare che tutti i minori del 3º ordine, cioè i determinati delle sottomatrici quadrate $3 \times 3$ (che sono in tutto 4), sono tutti nulli.

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x,y) = x\ln\big(1+xy\big)$$

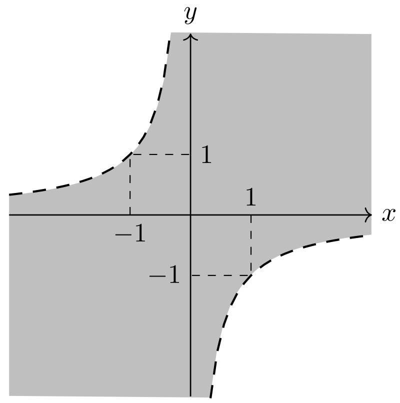
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si trovino i punti stazionari di $f$, provando che sono infiniti; qual è il valore di $f$ lungo tali punti? Si studi il segno della funzione e da questo si deduca la natura dei punti stazionari trovati in precedenza.

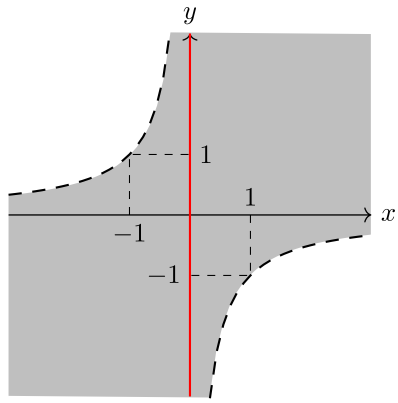
✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione $f$ è data da

$$1+xy>0 \quad \text{che equivale a} \quad xy>-1.$$

Si tratta della regione rappresentata in grigio nella figura a sinistra qui sotto,






Un punto interno è ad esempio l'origine e un punto di frontiera è un qualunque punto sull'iperbole, ad esempio $(1,-1)$.
Ora i punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di $f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(1+xy) + x\cdot\frac{y}{1+xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\frac{x}{1+xy} = \frac{x^2}{1+xy}.$$

La derivata parziale rispetto ad $y$ si annulla solo se $x=0$. Sostituendo $x=0$ nella derivata parziale rispetto ad $x$ si ottiene 0 e quindi i punti stazionari sono tutti i punti dell'asse $y$. Sono quindi infiniti.
Il valore di $f$ lungo tali punti si trova calcolando

$$f\Big|_{x=0} = 0.$$

Studiamo ora il segno della funzione. La funzione è positiva se

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln(1+xy)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ \ln(1+xy)<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ 1+xy>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ 1+xy<1 \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} x>0 \\ xy>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ xy<0. \end{cases}$$

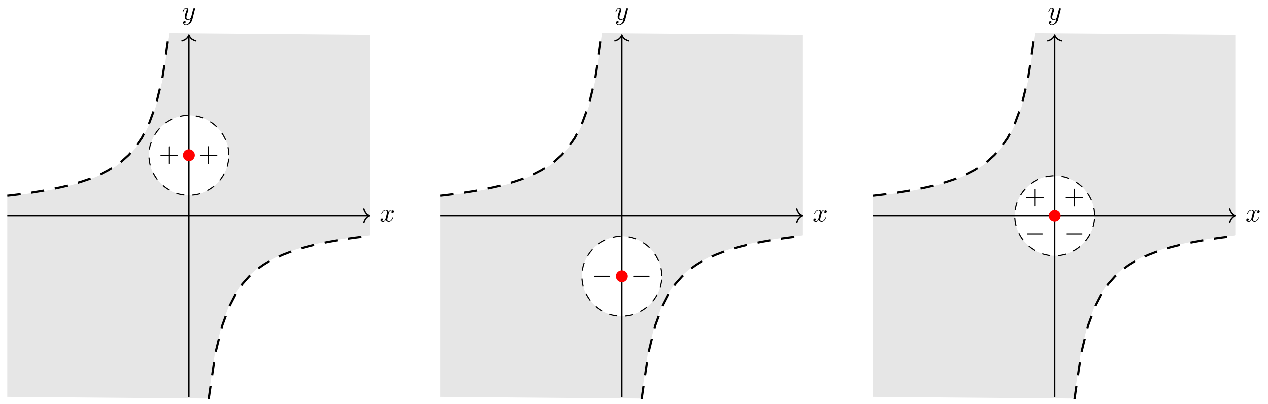
Il primo sistema ha per soluzioni il primo quadrante e il secondo sistema il secondo quadrante. Quindi possiamo affermare che $f$ è positiva nei punti del dominio del primo e secondo quadrante, negativa nei punti del dominio del terzo e quarto quadrante e che si annulla su entrambi gli assi.[8]

Per finire è richiesto di dedurre la natura dei punti stazionari dal segno della funzione. Può aiutare la figura nella pagina successiva.

Come ho cercato di raffigurare, ci sono tre possibili casi: il punto stazionario (ricordo che sono i punti sull'asse $y$ e che in questi punti la funzione si annulla) sta al di sopra dell'origine (i punti del tipo $(0,y)$ con $y>0$), al di sotto (i punti del tipo $(0,y)$ con $y<0$) oppure è l'origine.

[8]Infatti

$$f(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ln(1+xy)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \;\vee\; \ln(1+xy)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \;\vee\; 1+xy=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \;\vee\; xy=0.$$




Se il punto sta al di sopra dell'origine in ogni suo intorno (contenuto nel dominio) la funzione è maggiore o uguale a zero. Questo vuol dire che il punto è di minimo. Se sta al di sotto dell'origine in ogni suo intorno la funzione è minore o uguale a zero, e quindi il punto è di massimo. Se infine è l'origine in ogni suo intorno la funzione può essere sia positiva sia negativa: pertanto l'origine è punto di sella (né di massimo né di minimo).

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 07/07/2022**

---

**Domanda 1**. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^4 - 3x^2 - 4$

✎

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2).$$ [9]

**Domanda 2**. Per quali valori di $x$ è definita l'espressione $\dfrac{1}{1 - \ln x}$ ?

✎

Le condizioni nelle quali l'espressione è definita sono

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e. \end{cases}$$

Pertanto si tratta dell'insieme $(0, e) \cup (e, +\infty)$.

**Domanda 3**. Risolvere l'equazione

$$x^3 + x^2 + x = 0$$

✎

Raccogliendo $x$ l'equazione si può scrivere come

$$x(x^2 + x + 1) = 0.$$

Dato che il polinomio di secondo grado non ha radici reali (discriminante negativo), l'unica soluzione è $x = 0$.

**Domanda 4**. Risolvere la disequazione

$$1 + \ln(1 + x) \leq 0$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > -1$. La disequazione si può scrivere come

$$\ln(1 + x) \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x \leq \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{e} - 1.$$

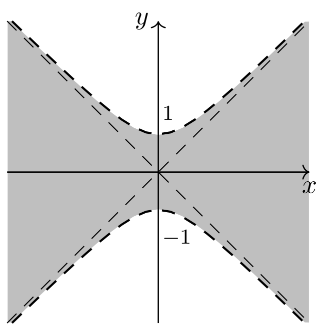
Pertanto le soluzioni sono $-1 < x \leq -1 + \frac{1}{e}$.

**Domanda 5**. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 + 1 > 0$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 - y^2 > -1$$



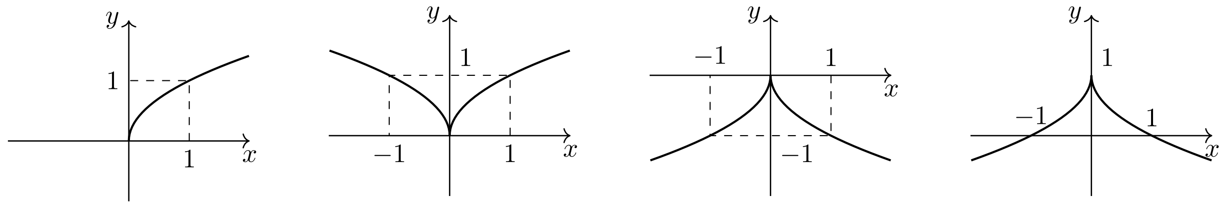

L'equazione corrispondente definisce un'iperbole con centro l'origine, asintoti obliqui e rami che stanno al di sopra e al di sotto dell'origine stessa. Gli asintoti hanno equazioni $y = \pm x$ e sono quindi le due bisettrici dei quadranti. Per capire quale delle due parti sia quella che soddisfa la disequazione basta ad esempio calcolare il termine di sinistra nell'origine. Si trova $0 > -1$, che è vera, e quindi la disequazione ha per insieme delle soluzioni la parte di piano che contiene il centro ed è delimitata dai rami dell'iperbole.

L'insieme è evidenziato in grigio nella figura qui a fianco.

[9]Ricordo che scomporre in fattori (o fattorizzare) un'espressione significa trasformarla in un'espressione equavalente fatta da uno o più prodotti di fattori (la parola *fattore* in matematica indica una quantità *moltiplicativa*), senza quindi termini additivi al di fuori dei prodotti. Pertanto ad esempio scritture che usino il completamento del quadrato non sono correttte, dato che non portano a scrivere un prodotto senza termini additivi fuori.

**Domanda 6**. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$

✎




$x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto 1 - \sqrt{|x|}$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{1}{x} - \ln x \right) e^x$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{1}{x} - \ln x \right) e^x = \left( \dfrac{1}{0^+} - \ln 0^+ \right) e^0 = (+\infty + \infty) \cdot 1 = (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\, e^{1/x}$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = e^{1/x} - e^{1/x} \cdot \frac{1}{x} = e^{1/x} \left( 1 - \frac{1}{x} \right).$$

**Domanda 9**. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

✎

Anzitutto la matrice inversa esiste in quanto $\det A = 4 - 6 = -2$, diverso da zero.
La matrice dei complementi algebrici di $A$ è

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi la matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per il determinante di $A$ si trova che la matrice inversa è

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 10**. Dire se la funzione $f(x, y) = xy^2 + y$ ha punti stazionari

✎

Le derivate parziali di $f$ sono

$$f'_x = y^2 \quad \text{e} \quad f'_y = 2xy + 1.$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione deve essere necessariamente $y = 0$, ma sostituendo nella seconda si ha che questa non può essere verificata per nessun valore di $x$. Quindi non si hanno soluzioni, cioè non ci sono punti stazionari.

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 07/07/2022**

---

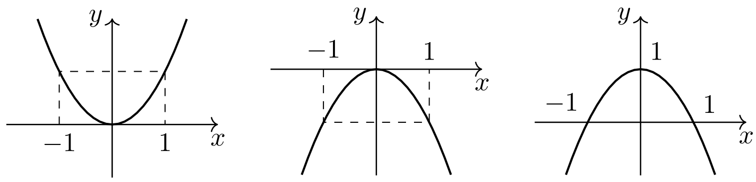
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ 1 + \ln(1+x) & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica poi se $f$ è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica quali dei teoremi di Weierstrass, Rolle e Lagrange sono applicabili alla funzione $f$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Infine si calcoli l'integrale di $f$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

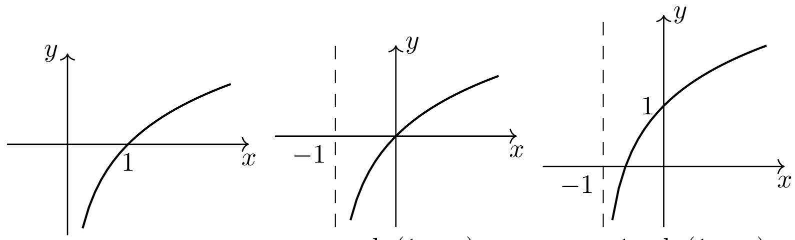
✎

Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.



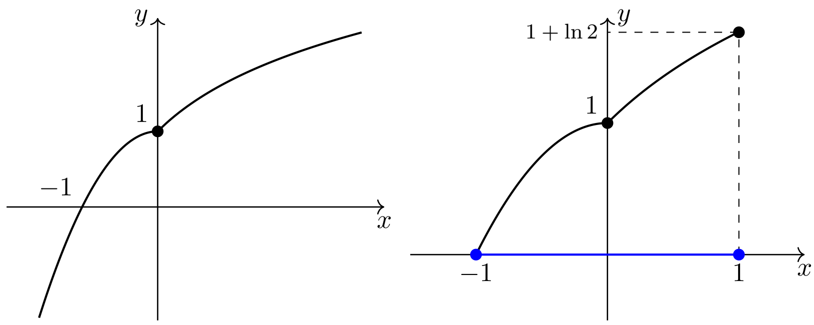

$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto -x^2$ $\quad$ $x \mapsto 1 - x^2$

Le trasformazioni della funzione logaritmica sono queste:




$x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln(1+x)$ $\quad$ $x \mapsto 1 + \ln(1+x)$

Il grafico della funzione $f$ è pertanto questo:




La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Il grafico lo evidenzia e la definizione lo conferma:

$$f(0) = 1 - 0^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} (1 + \ln(1+x)) = 1 + \ln 1 = 1.$$

Passiamo ora alla derivabilità, in particolare in $x = 0$. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Pertanto $f$ non è derivabile in $x = 0$.

Il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $[-1, 1]$ in quanto in tale intervallo (chiuso e limitato) la funzione è continua.

I teoremi di Rolle e di Lagrange non sono invece applicabili nell'intervallo $[-1, 1]$, dato che la funzione non è derivabile in un punto interno dell'intervallo stesso. Si può osservare che il teorema di Rolle non è applicabile anche perché cade un'altra delle sue ipotesi, quella che i valori della funzione agli estremi dell'intervallo siano uguali: infatti qui abbiamo $f(-1) = 0$ e $f(1) = 1 + \ln 2$.

Concludiamo con il calcolo dell'integrale di $f$ nell'intervallo $[-1, 1]$. La funzione è definita a tratti in questo intervallo e quindi dobbiamo dividere il calcolo in due integrali distinti. Si ha

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1 + \ln(1 + x))\,\mathrm{d}x.$$

Per il primo integrale abbiamo

$$\int_{-1}^{0} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Per il secondo conviene prima calcolare a parte l'integrale indefinito di $\ln(1 + x)$.[10]

Quindi, sempre con l'integrale indefinito,

$$\int (1 + \ln(1 + x))\,\mathrm{d}x = x + x\ln(1 + x) - x + \ln(1 + x) + c = x\ln(1 + x) + \ln(1 + x) + c = (1 + x)\ln(1 + x) + c.$$

Allora

$$\int_{0}^{1} (1 + \ln(1 + x))\,\mathrm{d}x = (1 + x)\ln(1 + x)\Big|_{0}^{1} = 2\ln 2.$$

In conclusione si ha quindi

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + 2\ln 2.$$

**ESERCIZIO 2**. Dati i tre vettori

$$v^1 = (-1, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0) \quad , \quad v^3 = (1, 3, 1)$$

si provi che essi non sono generatori di tutto $\mathbb{R}^3$ e si determini la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato. Si provi poi che il vettore $(-6, 8, 7)$ appartiene a questo sottospazio e lo si scriva come combinazione lineare dei vettori dati.

✎

Trattandosi di tre vettori, essi possono essere generatori di tutto $\mathbb{R}^3$ se e solo se risultano linearmente indipendenti. Possiamo scoprirlo scrivendo la matrice quadrata (vettori in riga)

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $V$ (calcolato ad esempio rispetto alla terza colonna) è

$$\det V = 1 \cdot (3 - 1) + 1 \cdot (-1 - 1) = 2 - 2 = 0.$$

I vettori sono quindi linearmente dipendenti e pertanto non sono generatori di tutto $\mathbb{R}^3$.

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori è uguale al rango della matrice $V$. Dato che il determinante è zero, possiamo dire che il rango non è 3. Possiamo dire che è 2 osservando che ad esempio la sottomatrice di $V$ formata dalle prime due righe e dalle ultime due colonne ha determinante diverso da zero. Pertanto $\dim \mathcal{S} = 2$.

[10] Per parti si ha

$$\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - \int \frac{1+x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) + c.$$

Per provare che il vettore $(-6, 8, 7)$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori conviene anzitutto osservare che per generare $\mathcal{S}$ bastano i primi due vettori, che certamente sono indipendenti per quanto detto poco fa. Quindi si tratta di capire che il vettore $(-6, 8, 7)$ è linearmente dipendente da $v^1$ e $v^2$.

Se consideriamo la matrice

$$V' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{il suo determinante (3}^{\text{a}}\text{ colonna) è } 1 \cdot (8+6) + 7 \cdot (-1-1) = 14 - 14 = 0.$$

Il vettore $(-6, 8, 7)$ è allora dipendente da $v^1$ e $v^2$, cioè si può scrivere come loro combinazione lineare, ossia appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$.

È richiesto ora di scrivere $(-6, 8, 7)$ come combinazione lineare dei tre vettori di partenza. Possiamo anche qui considerare soltanto $v^1$ e $v^2$ e porre poi uguale a zero il coefficiente di $v^3$. Poniamo allora

$$(-6, 8, 7) = av^1 + bv^2 \quad \Leftrightarrow \quad (-6, 8, 7) = a(-1, 1, 1) + b(1, 1, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (-6, 8, 7) = (-a + b, a + b, a).$$

Questo equivale a

$$\begin{cases} -a + b = -6 \\ a + b = 8 \\ a = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 7 \\ b = 1. \end{cases}$$

La risposta da dare è quindi

$$(-6, 8, 7) = 7v^1 + v^2 + 0v^3.$$

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

$$f(x, y) = xy - \frac{x}{y}$$

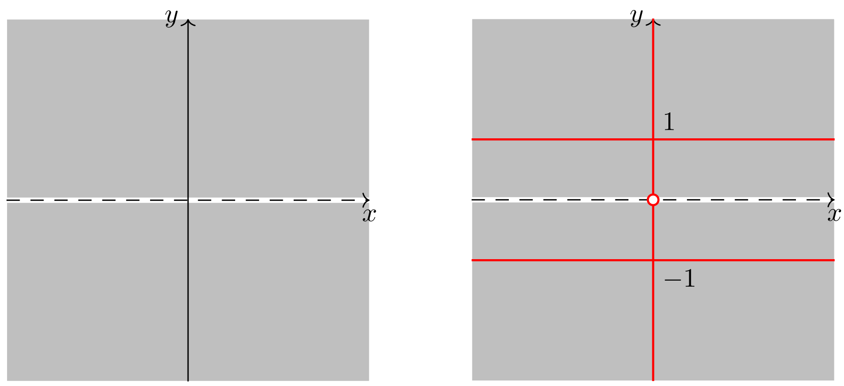
si determini e si disegni il suo dominio. In quali punti la funzione si annulla? Si calcoli il gradiente di $f$ e trovino i suoi punti stazionari. È possibile stabilire se si tratta di punti di massimo/minimo con le condizioni del secondo ordine?

✍

L'unica condizione per l'esistenza della funzione $f$ è data da

$$y \neq 0$$

e quindi il dominio della funzione è tutto il piano ad esclusione dei punti che stanno sull'asse $x$, tratteggiato nella figura qui sotto a sinistra.




La funzione si annulla se

$$xy - \frac{x}{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(y - \frac{1}{y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{y^2 - 1}{y} = 0.$$

Pertanto $f$ si annulla sui punti delle rette di equazione $x = 0$ (asse $y$) e $y = \pm 1$, raffigurate in rosso nella figura qui sopra a destra.

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{1}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = x + \frac{x}{y^2}.$$

Il gradiente è quindi il vettore
$$\nabla f(x,y) = \left(y - \frac{1}{y}\ ,\ x + \frac{x}{y^2}\right).$$
Annulliamo le derivate parziali per trovare i punti stazionari.
$$\begin{cases} y - \frac{1}{y} = 0 \\ x + \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{y^2-1}{y} = 0 \\ x + \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \pm 1 \\ x + \frac{x}{y^2} = 0. \end{cases}$$
Sostituendo nella seconda equazione $y = \pm 1$ si ottiene comunque $x = 0$. I punti stazionari sono quindi $(0,-1)$ e $(0,1)$.
Veniamo all'ultima domanda. Ci servono le derivate parziali seconde e la matrice Hessiana. Si ha
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + \frac{1}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + \frac{1}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y^3}.$$
La matrice Hessiana è quindi
$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{y^2} \\ 1 + \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}.$$
Si può osservare subito che
$$\det \nabla^2 f = -\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2,$$
e quindi sempre negativo. La forma è indefinita. Le condizioni del secondo ordine consentono allora di capire la natura dei punti stazionari: si tratta di punti di sella, cioè di punti né di massimo né di minimo.

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**
**Vicenza, 25/08/2022**

---

**Domanda 1.** Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^4 + x^2 - 2$

✎

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2).$$

**Domanda 2.** Per quali valori di $x$ è definita l'espressione $\dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}$ ?

✎

Le condizioni nelle quali l'espressione è definita sono

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Pertanto si tratta dell'insieme $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$x^3 - 2x = 0$$

✎

Raccogliendo $x$ l'equazione si può scrivere come

$$x(x^2 - 2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2 = 0.$$

Le soluzioni sono $x = 0 \ \vee \ x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}$.

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$1 - \ln(1 - x) \geq 0$$

✎

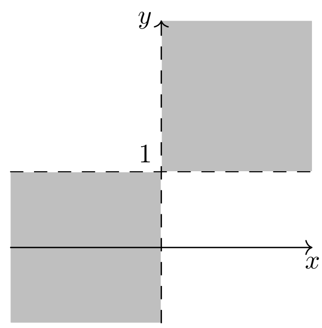
C'è anzitutto la condizione di esistenza $1 - x > 0$, cioè $x < 1$. La disequazione si può scrivere come

$$\ln(1 - x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x \leq e \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 - e.$$

Pertanto le soluzioni sono $1 - e \leq x < 1$.

**Domanda 5.** Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy - x > 0$

✎




Raccogliendo $x$ la disequazione si scrive come

$$x(y - 1) > 0,$$

che equivale a

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 1. \end{cases}$$

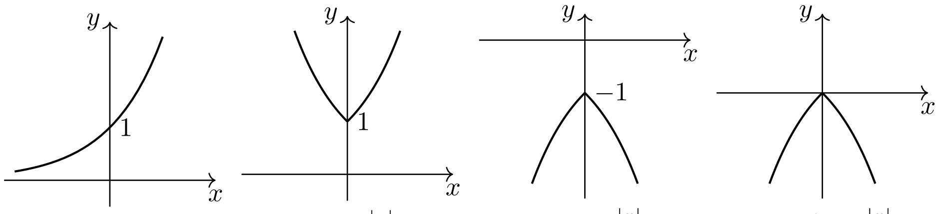
L'insieme è evidenziato in grigio nella figura qui a fianco.

**Domanda 6.** Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - e^{|x|}$

✎

Possiamo arrivare alla funzione voluta con la seguente sequenza di trasformazioni:

$$e^x \ \to \ e^{|x|} \ \to \ -e^{|x|} \ \to \ -e^{|x|} + 1.$$




$x \mapsto e^x$ $\quad x \mapsto e^{|x|}$ $\quad x \mapsto -e^{|x|}$ $\quad x \mapsto 1 - e^{|x|}$

**Domanda 7**. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{e^x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^x} = \frac{\ln(1-(-\infty))}{e^{-\infty}} = \frac{\ln(+\infty)}{0^+} = +\infty.$$

**Domanda 8**. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - e^{1/x}$

✎

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} - e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}e^{1/x} = \frac{1}{x^3}(xe^{1/x} - 2).$$

**Domanda 9**. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

✎

Anzitutto la matrice inversa esiste in quanto $\det A = -4 + 6 = 2$, diverso da zero.
La matrice dei complementi algebrici di $A$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi la matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per il determinante di $A$ si trova che la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 10**. Dire se la funzione $f(x, y) = x + x^2y$ ha punti stazionari

✎

Le derivate parziali di $f$ sono

$$f'_x = 1 + 2xy \quad \text{e} \quad f'_y = x^2.$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 + 2xy = 0 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deve essere necessariamente $x = 0$, ma sostituendo nella prima si ha che questa non può essere verificata per nessun valore di $y$. Quindi non si hanno soluzioni, cioè non ci sono punti stazionari.

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**
**Vicenza, 25/08/2022**

---

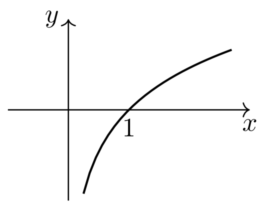
**ESERCIZIO 1**. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x)+1 & -1 < x \le 0 \\ 1-\sqrt{x} & x > 0, \end{cases}$$

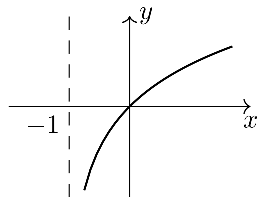
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica poi se $f$ è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica quali dei teoremi di Weierstrass, Rolle e Lagrange sono applicabili alla funzione $f$ nell'intervallo $[0,4]$. Infine si calcoli l'integrale di $f$ nell'intervallo $[0,4]$.

✎

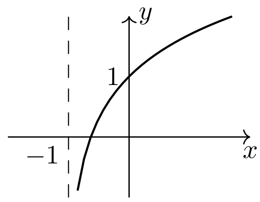
Le trasformazioni della funzione logaritmica sono riportate qui sotto.




$x \mapsto \ln x$

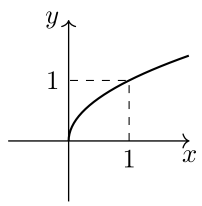



$x \mapsto \ln(1+x)$

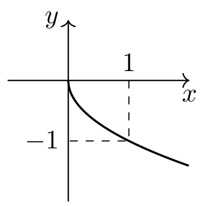



$x \mapsto \ln(1+x)+1$

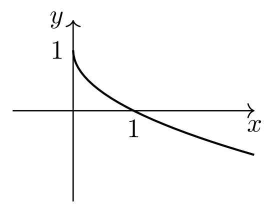
Le trasformazioni della funzione potenza sono queste:




$x \mapsto \sqrt{x}$

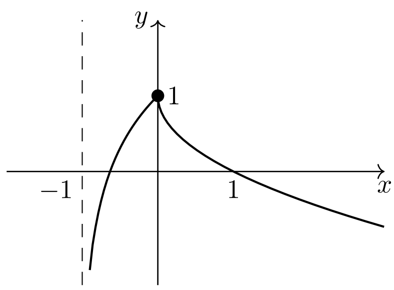


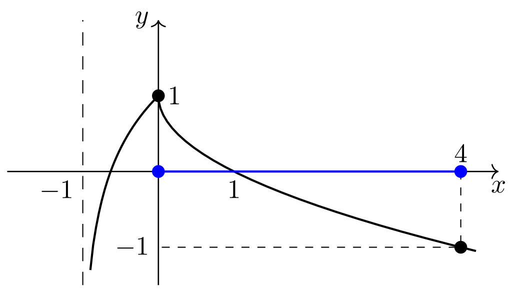

$x \mapsto -\sqrt{x}$




$x \mapsto 1-\sqrt{x}$

Il grafico della funzione $f$ è pertanto questo:




La funzione è continua dove è definita, in particolare in $x = 0$. Il grafico lo evidenzia e la definizione lo conferma:

$$f(0) = \ln(1+0)+1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}(1-\sqrt{0}) = 1.$$

Passiamo ora alla derivabilità, in particolare in $x = 0$. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{se } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x} = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{2}{0^+} = -\infty.$$

Pertanto $f$ non è derivabile in $x = 0$. Si tratta di un esempio di *punto di cuspide.*

Il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $\big[0,4\big]$ in quanto in tale intervallo (chiuso e limitato) la funzione è continua. Vedi ultima figura a destra della pagina precedente.

Il teorema di Lagrange è applicabile nell'intervallo $\big[0,4\big]$, dato che le sue ipotesi sono che la funzione sia continua nell'intervallo $\big[0,4\big]$ e derivabile nell'intervallo $\big(0,4\big)$.[11]

Il teorema di Rolle invece non è applicabile nell'intervallo $\big[0,4\big]$, non a causa della non derivabilità, come visto per Lagrange, ma a causa dell'ipotesi che vuole lo stesso valore della funzione agli estremi dell'intervallo ($f(a) = f(b)$ per intenderci). Infatti si ha

$$f(0) = 1 \quad \text{e invece} \quad f(4) = -1.$$

Concludiamo con il calcolo dell'integrale di $f$ nell'intervallo $\big[0,4\big]$. Evidentemente dobbiamo usare solo l'espressione valida a destra di zero. Si ha

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (1-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x.$$

L'integrale è uguale a

$$\int_0^4 (1-x^{1/2})\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^4 = 4 - \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} = 4 - \frac{2}{3}\cdot 8 = -\frac{4}{3}.$$

**ESERCIZIO 2**. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva l'espressione della trasformazione lineare $T$ associata alla matrice $A$, precisando tra quali spazi opera. Indicando con $u^1$ e $u^2$ i primi due vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ e con $v$ il vettore $u^1 + u^2$, si scriva $T(v)$. Si dica se l'immagine di $T$ è tutto il codominio. Si dica se il vettore $(1,3,1)$ sta nell'immagine di $T$ e, in caso affermativo, di quale vettore è il trasformato.

In generale, se $A$ è la matrice di rappresentazione della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, l'espressione di $T$ è data da

$$f(x) = A \cdot x, \text{ dove } x \in \mathbb{R}^n, \text{ da intendersi come vettore colonna.}$$

Pertanto, nel nostro caso, si ha

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione $T$ opera da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$.

Se $u^1$ e $u^2$ sono i primi due vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$, cioè

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il suo trasformato si può trovare in due modi equivalenti: sostituendo nell'espressione di $T$ le componenti di $v$ oppure calcolando il prodotto $A \cdot v$. Si ottiene

$$T(v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Però indico anche un terzo modo per arrivare alla risposta. Dato che i trasformati dei vettori fondamentali dello spazio di partenza sono le colonne della matrice di rappresentazione, possiamo anche dire che

$$T(v) = T(u^1 + u^2) = T(u^1) + T(u^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[11] Attenzione! Le ipotesi del teorema sono che la funzione sia continua nell'intervallo **chiuso** (cioè $[a,b]$) e derivabile **nei punti interni**, cioè in $(a,b)$. Non è quindi richiesta la derivabilità agli estremi dell'intervallo (cosa che nel nostro caso non avremmo, almeno in $x = 0$).

Per sapere se l'immagine di $T$ è o no tutto il codominio basta calcolare il rango della trasformazione, cioè il rango di $A$. Il determinante di $A$ (calcolato ad esempio rispetto alla terza riga) è

$$\det A = 1 \cdot (3-1) + 1 \cdot (-1-1) = 2 - 2 = 0.$$

Dato che, ad esempio, il minore principale di NO del secondo ordine è diverso da zero, possiamo concludere che il rango di $A$ è 2 e che quindi l'immagine di $T$ non è tutto il codominio, ma un suo sottospazio di dimensione 2.

Per dire se il vettore $(1,3,1)$ sta nell'immagine di $T$ e di quale vettore è eventualmente il trasformato il "modo generale" è quello di risolvere il sistema lineare $T(x) = (1,3,1)$, cioè

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 1, \end{cases} \tag{1}$$

che lascio per esercizio.

Suggerisco invece un modo molto più veloce (applicabile nel nostro caso ma non in generale): osservando che il vettore $(1,3,1)$ è la terza colonna di $A$ e ricordando, come già fatto prima, che le colonne di $A$ sono i trasformati dei vettori fondamentali, possiamo dire subito che $(1,3,1)$ è il trasformato di $u^3$, cioè di $(0,0,1)$. Abbiamo quindi scoperto subito non solo che il vettore sta nell'immagine di $T$, ma abbiamo trovato anche di chi è il trasformato.[12]

**ESERCIZIO 3**. Data la funzione

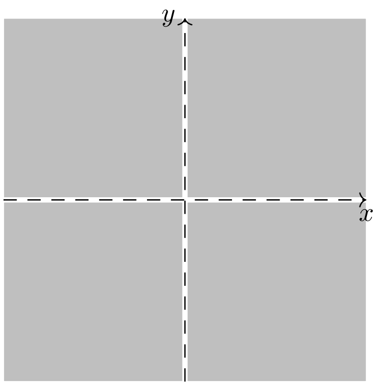
$$f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

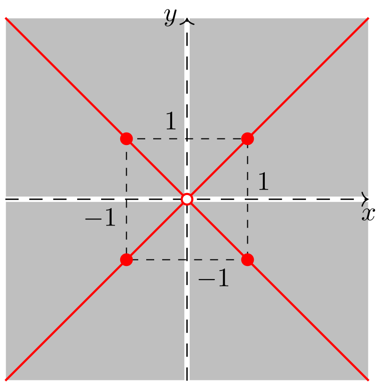
si determini e si disegni il suo dominio. Si calcoli il gradiente di $f$ e si provi che la funzione non ha punti stazionari. Dopo aver verificato che $f$ si annulla nei punti $(1,1)$, $(1,-1)$ e i loro opposti, si trovino tutti i punti in cui la funzione si annulla.

Le condizioni per l'esistenza della funzione $f$ sono date da

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0$$

e quindi il dominio della funzione è tutto il piano ad esclusione dei punti che stanno sugli assi cartesiani, tratteggiati nella figura qui sotto a sinistra. (Attenzione. Non ad esclusione dell'origine!)




Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\,,\, -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right).$$

[12] Segnalo che possono in generale esserci anche altri vettori che si trasformano in quello dato. Avviene anche nel nostro caso. Possiamo capirlo anche senza risolvere il sistema (1). Se poniamo $b = (1,3,1)$, il sistema è $Ax = b$ e entrambe le matrici $A$ e $A|b$ hanno rango 2 (dato che $A$ ha rango 2 e dato che il sistema ha soluzioni, il teorema di Rouché-Capelli dice che anche $A|b$ ha rango 2). Quindi il sistema può essere ridotto eliminando una riga e tenendo una variabile come parametro. Quindi le soluzioni dipendono da un parametro arbitrario e questo significa che per ogni $b$ che sta nell'immagine ci sono infiniti vettori del dominio che vengono trasformati in $b$, cioè tali che $Ax = b$.

Annulliamo le derivate parziali per studiare i punti stazionari.

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2 y} = 0 \\ -\frac{x^2+y^2}{xy^2} = 0. \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni, in quanto i numeratori si annullano soltanto nell'origine, che però non fa parte del dominio. Quindi la funzione non ha punti stazionari.

Verifichiamo che $f$ si annulla nei punti $(1,1)$, $(1,-1)$ e i loro opposti. Basta banalmente osservare che in tutti questi (quattro) punti si ha $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} = -1$ e quindi la differenza è sempre zero.[13]

Troviamo ora tutti i punti in cui la funzione si annulla.

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 0 \quad \text{equivale a} \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} = 0 \quad \text{cioè} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad (x-y)(x+y) = 0.$$

Pertanto $f$ si annulla sui punti delle due bisettrici ($y = x$ e $y = -x$), ad eccezione dell'origine. Sono raffigurate in rosso nell'ultima figura a destra.

[13]Si può anche scrivere $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$ e osservare che in tutti i quattro punti $x^2 = y^2$.