Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2022/23

Alberto Peretti

Settembre 2023

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 10/11/2022

Domanda 1. Scomporre il polinomio $x^3 + x^2 - 2x$ in fattori non ulteriormente scomponibili

✎

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$$

Domanda 2. Determinare in quale insieme è definita l'espressione $\dfrac{x}{2 + \ln x}$

✎

Le condizioni per cui è definita l'espressione sono

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 + \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-2}. \end{cases}$$

L'insieme è $(0, \frac{1}{e^2}) \cup (\frac{1}{e^2}, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione $2 - \dfrac{1}{x} = x$

✎

Con la condizione $x \neq 0$,

$$2 - \frac{1}{x} - x = 0 \quad ; \quad \frac{2x - 1 - x^2}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad ; \quad (x-1)^2 = 0 \quad ; \quad x = 1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione $2 - \ln(3 - x) \geq 0$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $3 - x > 0$, cioè $x < 3$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln(3-x) \leq 2 \quad ; \quad 3 - x \leq e^2 \quad ; \quad x \geq 3 - e^2.$$

Pertanto le soluzioni sono $3 - e^2 \leq x < 3$.

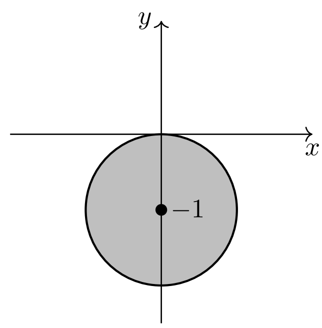
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + y^2 + 2y \leq 0$

✎

Usando il completamento del quadrato (su y) la disequazione si può scrivere come

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq 1 \quad ; \quad x^2 + (y+1)^2 \leq 1.$$

Si tratta di un cerchio di centro $(0, -1)$ e raggio 1. L'insieme è rappresentato qui a fianco in grigio. Il bordo della regione è compreso.



Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = (|x| - 1)^2$

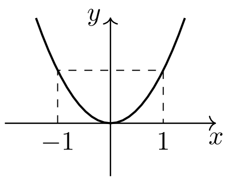
✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

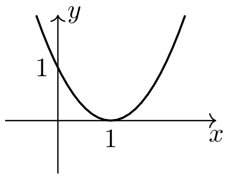
$$x^2 \quad \to \quad (x-1)^2 \quad \to \quad (|x| - 1)^2.$$

Faccio notare che non è possibile iniziare dalla funzione $|x|$, dato che poi non abbiamo una trasformazione grafica che ci consenta di fare il quadrato.

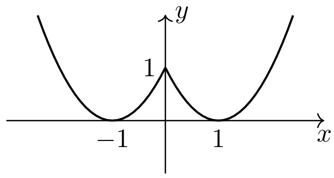
I grafici sono alla pagina seguente.



$x \mapsto x^2$



$x \mapsto (x-1)^2$



$x \mapsto (|x|-1)^2$

Domanda 7. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\ln(-x)}{e^x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\ln(-x)}{e^x} = \frac{1+\ln(+\infty)}{e^{-\infty}} = \frac{1+\infty}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

Domanda 8. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$

✎

$$f'(x) = 2x\ln(1+x^3) + x^2 \frac{1}{1+x^3} \cdot 3x^2 = 2x\ln(1+x^3) + \frac{3x^4}{1+x^3}.$$

Domanda 9. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = 2x - 3\ln x$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = 2 - \frac{3}{x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$2 - \frac{3}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{2x-3}{x} = 0 \quad ; \quad 2x - 3 = 0 \quad ; \quad x = \frac{3}{2}.$$

Domanda 10. Si trovi in quale intervallo la funzione $f(x) = 2x - 3\ln x$ è crescente

✎

La funzione è la stessa della domanda precedente, quindi anche la derivata è la stessa. La funzione è crescente dove la derivata è positiva e pertanto si tratta di risolvere la disequazione

$$2 - \frac{3}{x} > 0 \quad ; \quad \frac{2x-3}{x} > 0.$$

In generale, per risolvere questa disequazione dovremmo tenere conto del segno di entrambi i termini (numeratore e denominatore). Nel nostro caso però possiamo osservare che il denominatore x è certamente positivo dato che la funzione è definita per $x > 0$. Quindi possiamo semplicemente scrivere

$$2x - 3 > 0 \quad \text{da cui} \quad x > \frac{3}{2}. \qquad \text{La funzione è crescente in } \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 10/11/2022

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ -\sqrt{x} & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Sulla base del grafico, di dica qual è l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume.

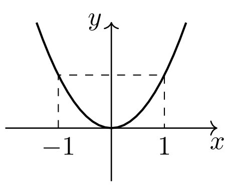
Si dica se la funzione è invertibile in tutto l'intervallo $[-2, 2]$. Qual è l'intervallo di ampiezza massima in cui f è iniettiva?

Si dica se alla funzione f in $[-2, 2]$ è applicabile il teorema di Weierstrass e se comunque in qualche punto è verificata la tesi del teorema.

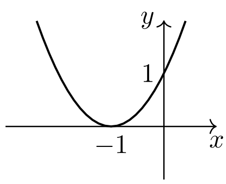
Si dica poi se la funzione f è derivabile in tutti i punti dell'intervallo dato. È applicabile il teorema di Rolle? Si dica infine se comunque in qualche punto è verificata la tesi del teorema.

✎

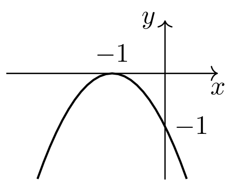
Le trasformazioni grafiche per la funzione polinomiale sono:



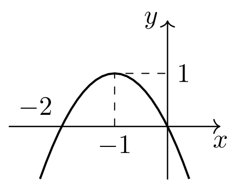
$x \mapsto x^2$



$x \mapsto (x+1)^2$

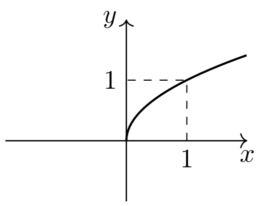


$x \mapsto -(x+1)^2$

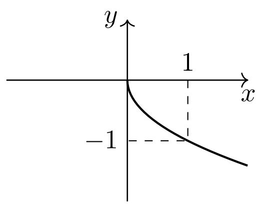


$x \mapsto 1-(x+1)^2$

La trasformazione per la funzione radice è:

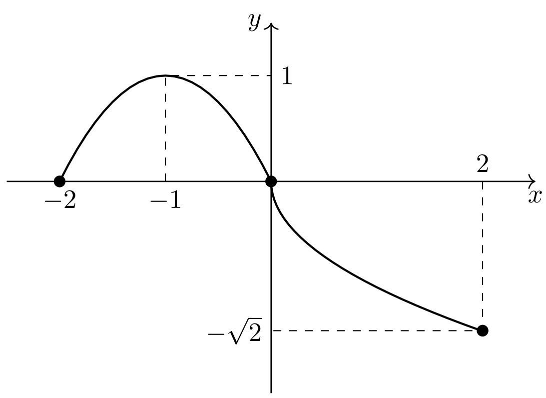


$x \mapsto \sqrt{x}$



$x \mapsto -\sqrt{x}$

Il grafico della funzione f, nell'intervallo $[-2, 2]$, è questo.



Dal grafico vediamo che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, è l'intervallo $[-\sqrt{2}, 1]$, dato che in $x = 2$ si ha $f(2) = -\sqrt{2}$ e in $x = -1$ si ha $f(-1) = 1$.

La funzione non è invertibile in tutto l'intervallo $[-2, 2]$, dato che tra -2 e 0 non è iniettiva. L'intervallo di ampiezza massima in cui f è iniettiva è $[-1, 2]$, intervallo in cui è strettamente decrescente.

Possiamo affermare che alla funzione f in $[-2,2]$ è applicabile il teorema di Weierstrass: infatti le ipotesi del teorema sono di avere una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato. Nel nostro caso la funzione è definita in $[-2,2]$ e dal grafico vediamo che è continua, in particolare in $x=0$. Possiamo verificare questo anche con la definizione.

$$f(0) = 1 - (0+1)^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-\sqrt{x}) = -\sqrt{0} = 0.$$

Dato che le ipotesi sono soddisfatte la tesi è certamente vera: esistono un punto di minimo ($x_m = 2$ con valore minimo $f(2) = -\sqrt{2}$) e un punto di massimo ($x_M = -1$ con valore massimo $f(-1) = 1$).

Vediamo la derivabilità: il punto da studiare è $x=0$, dove la funzione è continua e quindi potrebbe essere anche derivabile. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & -2 \le x < 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(-2(x+1)) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0 (punto di cuspide, in particolare).

Passiamo ora alle domande sul teorema di Rolle. Il teorema non è applicabile, dato che la funzione non è derivabile in 0. Anche l'ipotesi sul valore agli estremi cade, dato che $f(-2) = 0$ e $f(2) = -\sqrt{2}$.

Il grafico ci dice che la tesi è però comunque verificata in un punto, dato che evidentemente la derivata si annulla in $x = -1$.

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 10/11/2022

Domanda 1. Scomporre il polinomio $x^3 - x^2 - 2x$ in fattori non ulteriormente scomponibili

✎

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

Domanda 2. Determinare in quale insieme è definita l'espressione $\dfrac{x}{3 + \ln x}$

✎

Le condizioni per cui è definita l'espressione sono

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3 + \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-3}. \end{cases}$$

L'insieme è $(0, \frac{1}{e^3}) \cup (\frac{1}{e^3}, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione $2 + \dfrac{1}{x} = -x$

✎

Con la condizione $x \neq 0$,

$$2 + \frac{1}{x} + x = 0 \quad ; \quad \frac{2x + 1 + x^2}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad ; \quad (x+1)^2 = 0 \quad ; \quad x = -1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione $3 - \ln(2 - x) \geq 0$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $2 - x > 0$, cioè $x < 2$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln(2 - x) \leq 3 \quad ; \quad 2 - x \leq e^3 \quad ; \quad x \geq 2 - e^3.$$

Pertanto le soluzioni sono $2 - e^3 \leq x < 2$.

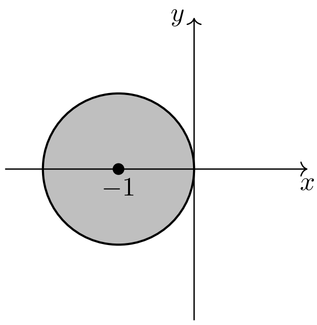
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + y^2 + 2x \leq 0$

✎

Usando il completamento del quadrato (su x) la disequazione si può scrivere come

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 1 \quad ; \quad (x+1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Si tratta di un cerchio di centro $(-1, 0)$ e raggio 1. L'insieme è rappresentato qui a fianco in grigio. Il bordo della regione è compreso.



Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = (|x| + 1)^2$

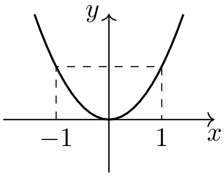
✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

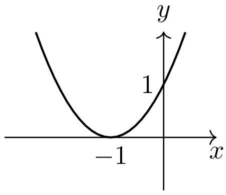
$$x^2 \quad \to \quad (x+1)^2 \quad \to \quad (|x| + 1)^2.$$

Faccio notare che non è possibile iniziare dalla funzione $|x|$, dato che poi non abbiamo una trasformazione grafica che ci consenta di fare il quadrato.

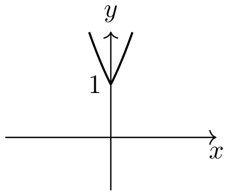
I grafici sono alla pagina seguente.



$x \mapsto x^2$



$x \mapsto (x+1)^2$



$x \mapsto (|x|+1)^2$

Domanda 7. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^x}{\ln(1+x)}$

Con l'algebra dei limiti $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^x}{\ln(1+x)} = \frac{1+e^0}{\ln(1+0^+)} = \frac{2}{\ln(1^+)} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Domanda 8. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x^3 \ln(1+x^2)$

$$f'(x) = 3x^2 \ln(1+x^2) + x^3 \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = 3x^2 \ln(1+x^2) + \frac{2x^4}{1+x^2}.$$

Domanda 9. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = 3x - 2\ln x$

La derivata della funzione è $f'(x) = 3 - \frac{2}{x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione
$$3 - \frac{2}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{3x-2}{x} = 0 \quad ; \quad 3x - 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{2}{3}.$$

Domanda 10. Si trovi in quale intervallo la funzione $f(x) = 3x - 2\ln x$ è crescente

La funzione è la stessa della domanda precedente, quindi anche la derivata è la stessa. La funzione è crescente dove la derivata è positiva e pertanto si tratta di risolvere la disequazione
$$3 - \frac{2}{x} > 0 \quad ; \quad \frac{3x-2}{x} > 0.$$

In generale, per risolvere questa disequazione dovremmo tenere conto del segno di entrambi i termini (numeratore e denominatore). Nel nostro caso però possiamo osservare che il denominatore x è certamente positivo dato che la funzione è definita per $x > 0$. Quindi possiamo semplicemente scrivere
$$3x - 2 > 0 \quad \text{da cui} \quad x > \frac{2}{3}. \qquad \text{La funzione è crescente in } \left[\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 10/11/2022

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & -2 \le x \le 0 \\ (x-1)^2 - 1 & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

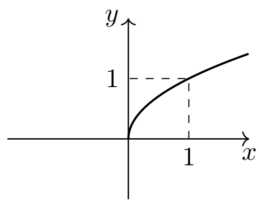
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Sulla base del grafico, di dica qual è l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume.

Si dica se la funzione è invertibile in tutto l'intervallo $[-2, 2]$. Qual è l'intervallo di ampiezza massima in cui f è iniettiva?

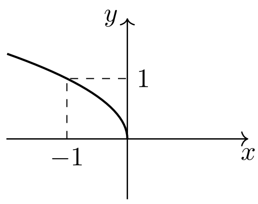
Si dica se alla funzione f in $[-2, 2]$ è applicabile il teorema di Weierstrass e se comunque in qualche punto è verificata la tesi del teorema.

Si dica poi se la funzione f è derivabile in tutti i punti dell'intervallo dato. È applicabile il teorema di Rolle? Si dica infine se comunque in qualche punto è verificata la tesi del teorema.

La trasformazione grafica per la funzione radice è:

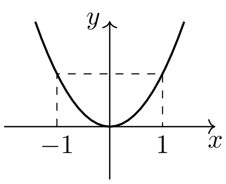


$x \mapsto \sqrt{x}$

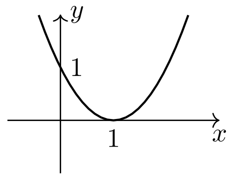


$x \mapsto \sqrt{-x}$

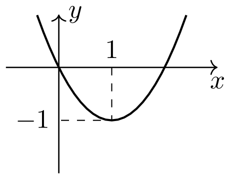
Le trasformazioni per la funzione polinomiale sono:



$x \mapsto x^2$

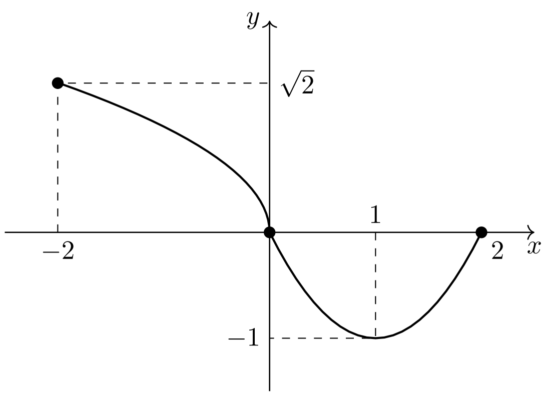


$x \mapsto (x-1)^2$



$x \mapsto (x-1)^2 - 1$

Il grafico della funzione f, nell'intervallo $[-2, 2]$, è questo.



Dal grafico vediamo che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, è l'intervallo $[-1, \sqrt{2}]$, dato che in $x = 1$ si ha $f(1) = -1$ e in $x = -2$ si ha $f(-2) = \sqrt{2}$.

La funzione non è invertibile in tutto l'intervallo $[-2, 2]$, dato che tra 0 e 2 non è iniettiva. L'intervallo di ampiezza massima in cui f è iniettiva è $[-2, 1]$, intervallo in cui è strettamente decrescente.

Possiamo affermare che alla funzione f in $[-2,2]$ è applicabile il teorema di Weierstrass: infatti le ipotesi del teorema sono di avere una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato. Nel nostro caso la funzione è definita in $[-2,2]$ e dal grafico vediamo che è continua, in particolare in $x=0$. Possiamo verificare questo anche con la definizione.

$$f(0)=\sqrt{-0}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left((x-1)^2-1\right)=0.$$

Dato che le ipotesi sono soddisfatte la tesi è certamente vera: esistono un punto di minimo ($x_m=1$ con valore minimo $f(1)=-1$) e un punto di massimo ($x_M=-2$ con valore massimo $f(-2)=\sqrt{2}$).

Vediamo la derivabilità: il punto da studiare è $x=0$, dove la funzione è continua e quindi potrebbe essere anche derivabile. Possiamo scrivere

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} & -2\le x<0 \\ 2(x-1) & 0<x\le 2. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{2\sqrt{-x}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \qquad \text{e} \qquad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2(x-1)=-2.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0 (punto di cuspide, in particolare).

Passiamo ora alle domande sul teorema di Rolle. Il teorema non è applicabile, dato che la funzione non è derivabile in 0. Anche l'ipotesi sul valore agli estremi cade, dato che $f(-2)=\sqrt{2}$ e $f(2)=0$.

Il grafico ci dice che la tesi è però comunque verificata in un punto, dato che evidentemente la derivata si annulla in $x=1$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 26/01/2023

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int x\sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int x\sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(2+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(2+x^2)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(2+x^2)^3} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1}(x+e^{-x})\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1}(x+e^{-x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - e^{-x}\right|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right) - \left(\frac{1}{2} - e\right) = e - \frac{1}{e}.$$

Domanda 3. Scrivere un vettore non nullo ortogonale al vettore $(1, 17, -25)$

✎

Ci sono infinite risposte possibili. Ne fornisco un paio. Senza impostare un modo generale per ottenere tutte le soluzioni, ma procedendo "per tentativi", il vettore $(-17, 1, 0)$ è una possibilità, dato che

$$\langle(1, 17, -25), (-17, 1, 0)\rangle = 1\cdot(-17) + 17\cdot 1 + 0\cdot(-25) = 0$$

oppure $(25, 0, 1)$, dato che

$$\langle(1, 17, -25), (25, 0, 1)\rangle = 1\cdot 25 + 17\cdot 0 + (-25)\cdot 1 = 0.$$

Il modo generale per trovare tutte le possibilità è dire che si tratta di tutti i vettori (x, y, z) tali che

$$\langle(1, 17, -25), (x, y, z)\rangle = x + 17y - 25z = 0.$$

Domanda 4. Calcolare il prodotto (righe per colonne) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

✎

La matrice inversa esiste in quanto il determinante è 7, diverso da zero. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.\quad \text{La matrice aggiunta è}\quad \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è quindi

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^{2}\!/_{7} & {}^{1}\!/_{7}\\ -{}^{1}\!/_{7} & {}^{3}\!/_{7}\end{pmatrix}.$$

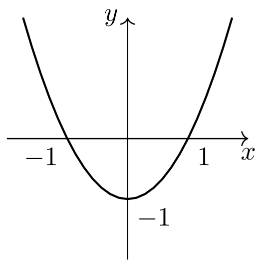
Domanda 6. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x, y) = y - x^2$

✎

Si tratta della curva del piano definita dall'equazione

$$f(x, y) = -1, \text{ cioè } y - x^2 = -1, \text{ quindi } y = x^2 - 1.$$

Si tratta dei punti che stanno sulla parabola raffigurata qui sotto.



Domanda 7. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + 4xy - 8y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Il determinate di A è zero. I minori principali di ordine 1 ($a_{11} = -1/2$ e $a_{22} = -8$) sono entrambi negativi e quindi la forma è semidefinita negativa.

Domanda 8. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = \dfrac{\ln y}{x}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y \left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla f = \left(-\frac{\ln y}{x^2}, \frac{1}{xy}\right).$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/01/2023

ESERCIZIO

- Dati i vettori

$$v^1 = (1, -1, 2) \quad , \quad v^2 = (-1, 1, -3) \quad , \quad v^3 = (1, -1, 0)$$

si provi che non sono una base di $\mathbb{R}^3$. Qual è la dimensione del sottospazio da essi generato? Si sostituisca v^3 con un vettore u in modo che v^1, v^2, u formino una base di $\mathbb{R}^3$. Si trovi infine un vettore non nullo che sia ortogonale a v^1 e v^2.

- Data la funzione

$$f(x, y) = y\sqrt{xy}$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla e dove è positiva. Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari.

✎

- Per provare che i tre vettori non sono una base basta provare che sono linearmente dipendenti. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice quadrata

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di V (calcolato rispetto alla terza riga) è

$$\det V = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

I vettori sono quindi linearmente dipendenti e pertanto non possono essere una base $\mathbb{R}^3$.[1]

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori è uguale al rango della matrice V. Dato che il determinante è zero, possiamo dire che il rango non è 3. Possiamo dire che è 2 osservando che ad esempio la sottomatrice di V formata dalle prime due righe e dalle ultime due colonne ha determinante diverso da zero.

Ora, dato che da quanto trovato possiamo affermare che v^3 dipende linearmente dai primi due, vogliamo sostituire v^3 con un vettore u (non necessariamente un vettore fondamentale) in modo che v^1, v^2, u formino una base di $\mathbb{R}^3$, e cioè in modo che risultino linearmente indipendenti. Basterà avere quindi un determinante diverso da zero. È comunque conveniente, per semplicità nei calcoli, pensare ad un vettore fondamentale. Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

possiamo dire che $u = (1, 0, 0)$ risponde alla richiesta.

Ultima domanda: trovare un vettore non nullo che sia ortogonale a v^1 e v^2. Indicando con (x, y, z) tale vettore, si tratta dei vettori soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \langle (x, y, z), (1, -1, 2) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (-1, 1, -3) \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

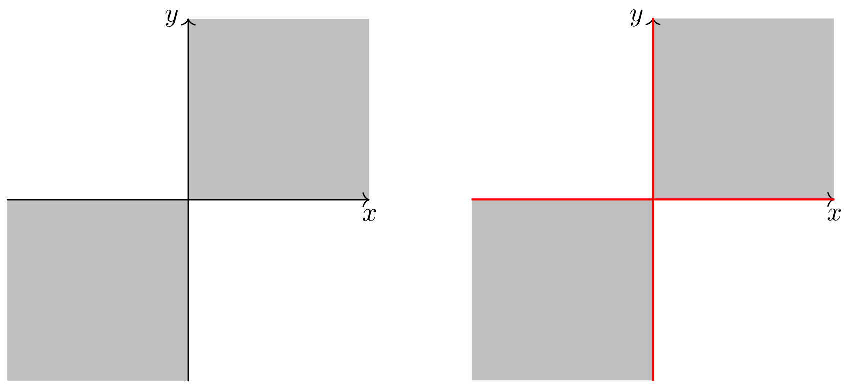
Non si chiede di trovare tutte le soluzioni. Ponendo ad esempio $z = 0$, la prima equazione (equivalentre alla seconda) è $x = y$, e quindi un possibile vettore è $(1, 1, 0)$.

[1] Ricordo che una base di uno spazio è un insieme di vettori contemporaneamente linearmente indipendenti e generatori dello spazio stesso. In $\mathbb{R}^3$ le basi sono terne di vettori linearmente indipendenti.

- La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$xy \geq 0 \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Si tratta del 1° oppure del 3° quadrante, punti di frontiera, cioè assi cartesiani, inclusi. L'insieme è chiuso, dato che tutti i suoi punti di frontiera appartengono all'insieme stesso. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura a sinistra qui sotto.



La funzione si annulla se

$$y = 0 \quad \text{oppure se} \quad xy = 0, \text{ cioè sugli assi.}$$

I punti in cui la funzione si annulla sono indicati in rosso nella figura qui sopra a destra.

Vediamo ora dove f è positiva, cioè dove risulta

$$y\sqrt{xy} > 0.$$

Dato che il fattore $\sqrt{xy}$, dove non si annulla, è positivo, la funzione è positiva se $y > 0$, cioè nel 1° quadrante, e quindi negativa nel 3°.

Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{y^2}{2\sqrt{xy}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{xy} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x = \sqrt{xy} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}}.$$

Cerchiamo se ci sono punti stazionari, e cioè se le derivate parziali possono annullarsi entrambe.

Il numeratore della prima si annulla sole se $y = 0$, che però non è accettabile in quanto annulla anche il denominatore. Questo basta per dire che non ci sono punti stazionari.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 26/01/2023

Domanda 1. Scomporre il polinomio $x - x^2 + x^3 - x^4$ in fattori non ulteriormente scomponibili

✎

Con un doppio raccoglimento si ha

$$\underbrace{x - x^2} + \underbrace{x^3 - x^4} = x(1-x) + x^3(1-x) = (1-x)(x+x^3) = x(1-x)(1+x^2).$$

Domanda 2. Riscrivere l'espressione $xe^{-x} + x^2e^{2x}$ raccogliendo xe^{-x}

✎

$$xe^{-x} + x^2e^{2x} = xe^{-x}\left(\frac{xe^{-x}}{xe^{-x}} + \frac{x^2e^{2x}}{xe^{-x}}\right) = xe^{-x}(1 + xe^{3x}).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$1 + \frac{1}{x} = 2x$$

✎

$$(\text{con } x \neq 0) \quad 2x - 1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 - x - 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \mp 3}{4}.$$

Le soluzioni sono quindi $-\frac{1}{2}$ oppure 1.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 + e^{-x} < 3$$

✎

Le soluzioni vanno cercate in tutto $\mathbb{R}$ (non ci sono condizioni di esistenza). La disequazione equivale a

$$e^{-x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x < \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\ln 2.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy - x - 1 < 0$

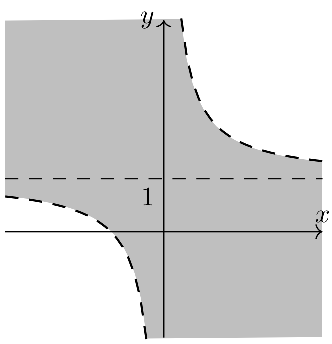
✎

La disequazione equivale a

$$x(y-1) < 1.$$

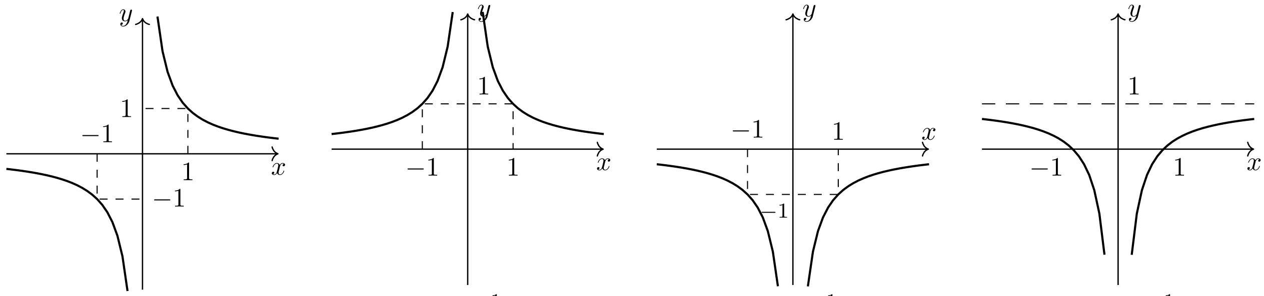
L'equazione corrispondente definisce un'iperbole con centro in $(0, 1)$ e asintoti paralleli agli assi cartesiani.

Dato che nel centro la disequazione è verificata, l'insieme delle soluzioni è la regione che, rispetto all'iperbole, contiene il centro. La frontiera, cioè i punti sull'iperbole, non è compresa. La regione è indicata in grigio nella figura qui sotto.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = 1 - \dfrac{1}{|x|}$

✎



$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto -\frac{1}{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto 1 - \frac{1}{|x|}$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{-x}}{e^x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{-x}}{e^x} = \frac{1-\sqrt{-(-\infty)}}{e^{-\infty}} = \frac{1-\sqrt{+\infty}}{0^+} = \frac{1-\infty}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{-x}\big(x + \sqrt{x}\big)$

✎

$$f'(x) = -e^{-x}\big(x + \sqrt{x}\big) + e^{-x}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int x\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(3+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{(3+x^2)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(3+x^2)^3} + c.$$

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{\ln y}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\ln y}\cdot 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\left(-\frac{1}{\ln^2 y}\cdot\frac{1}{y}\right) \qquad \text{e quindi} \qquad \nabla f = \left(\frac{1}{\ln y}\,,\, -\frac{x}{y\ln^2 y}\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/01/2023

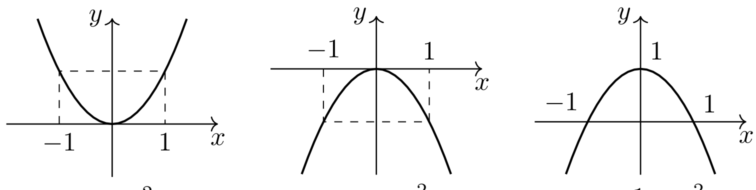
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \le 1 \\ -\ln x & x > 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si indichino i punti di massimo e di minimo di f nell'intervallo $[-1, e]$. Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$.

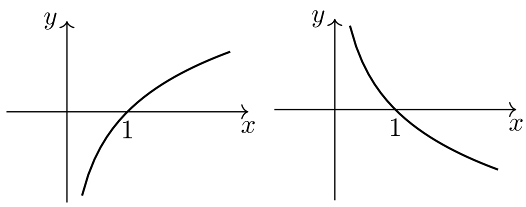
✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione polinomiale sono queste.



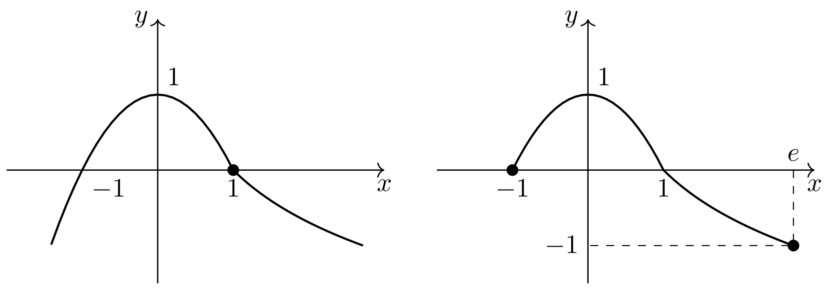
$x \mapsto x^2$ $\qquad$ $x \mapsto -x^2$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - x^2$

La trasformazione della funzione logaritmica è questa.



$x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $x \mapsto -\ln x$

Il grafico della funzione f è qui sotto a sinistra (per quello a destra si aspetti più avanti).



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 1. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 1 da sinistra, dato che in $x = 1$ e in un intorno sinistro di 1 coincide con la funzione polinomiale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 1$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra essa è una funzione logaritmica.

Si ha

$$f(1) = 1 - 1^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-\ln x) = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in 1, e quindi in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 1$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ -\frac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}(-1/x) = -1.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 1 (si ha un punto angoloso).

Per individuare i punti di massimo e di minimo di f nell'intervallo $[-1,e]$ è opportuno tornare al grafico, completandolo. Si veda il grafico sopra a destra.

Abbiamo il punto di massimo in $x_{\max} = 0$ (con valore massimo $f(0) = 1$) e il punto di minimo in $x_{\min} = e$ (con valore minimo $f(e) = -\ln e = -1$). Si può anche osservare che $x = -1$ è un punto di minimo locale non globale.

Passiamo all'ultima domanda, l'applicabilità del teorema di Rolle alla funzione nell'intervallo $[-1,1]$. Qui bisogna stare attenti alle ipotesi del teorema, che sono:

- funzione continua nell'intervallo chiuso $[-1,1]$
- funzione derivabile nell'intervallo aperto $(-1,1)$, cioè nei punti interni
- valori uguali agli estremi, cioè $f(-1) = f(1)$.

La terza ipotesi è banalmente verificata, con $f(-1) = f(1) = 0$. Per quanto riguarda le prime due occorre capire che in pratica significa che la continuità è richiesta anche agli estremi dell'intervallo, mentre la derivabilità no, è sufficiente nei punti interni.

Nel nostro caso è vero che la funzione non è derivabile in $x = 1$, ma questo è un estremo dell'intervallo che stiamo considerando. Pertanto le ipotesi sono verificate e il teorema di Rolle è applicabile.

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (1,-2,1) \quad , \quad v^2 = (-2,4,1) \quad , \quad v^3 = (1,-2,4)$$

si provi che non sono una base di $\mathbb{R}^3$. Qual è la dimensione del sottospazio da essi generato? Si sostituisca v^3 con un vettore u in modo che v^1, v^2, u formino una base di $\mathbb{R}^3$. Si trovi infine un vettore non nullo che sia ortogonale a v^1 e v^2.

✎

Per provare che i tre vettori non sono una base basta provare che sono linearmente dipendenti. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice quadrata

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di V (calcolato rispetto alla prima riga) è

$$\det V = 1 \cdot 18 + 2 \cdot (-9) + 1 \cdot 0 = 0.$$

I vettori sono quindi linearmente dipendenti e pertanto non possono essere una base $\mathbb{R}^3$.[2]

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori è uguale al rango della matrice V. Dato che il determinante è zero, possiamo dire che il rango non è 3. Possiamo dire che è 2 osservando che ad esempio la sottomatrice di V formata dalle prime due righe e dalle ultime due colonne ha determinante diverso da zero (-6).

Ora, dato che da quanto trovato possiamo affermare che v^3 dipende linearmente dai primi due, vogliamo sostituire v^3 con un vettore u (non necessariamente un vettore fondamentale) in modo che v^1, v^2, u formino una base di $\mathbb{R}^3$, e cioè in modo che risultino linearmente indipendenti. Basterà avere quindi un determinante diverso da zero. È comunque conveniente, per semplicità nei calcoli, pensare ad un vettore fondamentale. Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -6,$$

possiamo dire che $u = (1,0,0)$ risponde alla richiesta.

[2]Ricordo che una base di uno spazio è un insieme di vettori contemporaneamente linearmente indipendenti e generatori dello spazio stesso. In $\mathbb{R}^3$ le basi sono terne di vettori linearmente indipendenti.

Ultima domanda: trovare un vettore non nullo che sia ortogonale a v^1 e v^2. Indicando con (x, y, z) tale vettore, si tratta dei vettori soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \langle (x,y,z),(1,-2,1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z),(-2,4,1)\rangle = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -2x+4y+z=0 \end{cases}$$

Non si chiede di trovare tutte le soluzioni. Ponendo ad esempio $z = 0$, la prima equazione (equivalentre alla seconda) è $x = 2y$, e quindi un possibile vettore è $(2, 1, 0)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = x + y - \ln\big(xy\big)$$

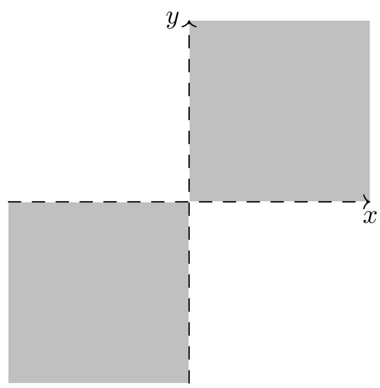
si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si trovi l'unico punto stazionario di f e si determini la sua natura con le condizioni del secondo ordine. Si scriva infine la restrizione di f alla curva di equazione $xy = 1$ e si dica qual è il segno della funzione lungo tale curva.

✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$xy > 0 \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x<0 \\ y<0. \end{cases}$$

Si tratta del 1° oppure del 3° quadrante, punti di frontiera, cioè assi cartesiani, esclusi. L'insieme è aperto, dato che appunto tutti i suoi punti di frontiera non appartengono all'insieme. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura qui sotto.



Cerchiamo ora questo unico punto stazionario. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{1}{xy}\cdot y = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{xy}\cdot x = 1 - \frac{1}{y}.$$

L'unico punto che risolve il sistema

$$\begin{cases} 1 - {}^1\!/_x = 0 \\ 1 - {}^1\!/_y = 0 \end{cases} \qquad \text{è chiaramente il punto } (1,1).$$

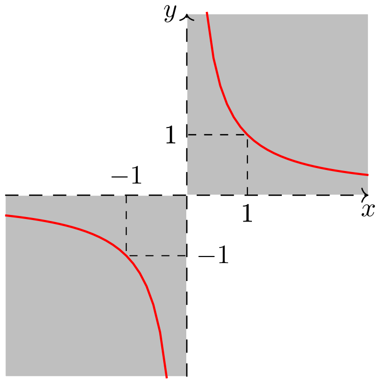
Ora determiniamo la natura di questo punto con le condizioni del secondo ordine. Servono le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}.$$

Pertanto la matrice Hessiana è

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} {}^1\!/_{x^2} & 0 \\ 0 & {}^1\!/_{y^2} \end{pmatrix} \text{ che, calcolata in } (1,1), \text{ diventa } \nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si tratta (banalmente) di una matrice simmetrica definita positiva, e quindi possiamo concludere che il punto stazionario $(1, 1)$ è un punto di minimo locale.



La restrizione di f alla curva di equazione $xy = 1$ (indicata in rosso nella figura sopra) è

$$f\Big|_{xy=1} = f\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x} - \ln 1 = x + \frac{1}{x}.$$

Il segno della funzione lungo la curva $xy = 1$ si può trovare studiando il segno della restrizione, cioè dell'espressione $x + \frac{1}{x}$, ma anche più semplicemente osservando che lungo tale curva il logaritmo si annulla e, dato che nel primo quadrante entrambe le variabili sono positive (ed entrambe negative nel terzo quadrante) il termine $x + y$ è quindi positivo nel primo e negativo nel terzo.

Si può osservare, peraltro non richiesto dalle domande, che questo risultato prova che il punto di minimo locale trovato prima, cioè il punto $(1, 1)$, non è di minimo globale: la funzione in $(1, 1)$ ha valore 2 e assume certamente valori minori di 2 dato che è negativa lungo il ramo inferiore dell'iperbole.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/02/2023

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{10+x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{x}{10+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{10+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(10+x^2)+c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+e^{2x})\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} (x+e^{2x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}\right|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}+e^2\right)-\left(\frac{1}{2}+e^{-2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right).$$

Domanda 3. Calcolare il prodotto interno (scalare) dei vettori $(10,-11,12)$ e $(-1,-1,-1)$

✎

$$\big\langle(10,-11,12),(-1,-1,-1)\big\rangle = 10\cdot(-1)+(-11)\cdot(-1)+12\cdot(-1) = -10+11-12 = -11.$$

Domanda 4. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, calcolare il prodotto $A\cdot A^T$

✎

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -32 \\ -32 & 77 \end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

✎

La matrice inversa esiste in quanto il determinante è -5, diverso da zero. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

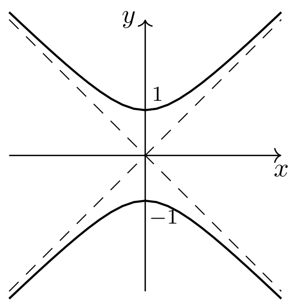
Domanda 6. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x,y) = x^2-y^2$

✎

Si tratta della curva del piano definita dall'equazione

$$f(x,y) = -1, \quad \text{cioè} \quad x^2-y^2 = -1.$$

È l'iperbole di centro l'origine e asintoti (obliqui) di pendenze ±1 (cioè le bisettrici dei quadranti), raffigurata qui a fianco.



Domanda 7. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x,y) = x^2 - xy + \dfrac{1}{4}y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Il determinate di A è zero. I minori principali di ordine 1 ($a_{11} = 1$ e $a_{22} = 1/4$) sono entrambi positivi e quindi la forma è semidefinita positiva.

Domanda 8. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = (x + \ln y)e^{-y}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-y} \cdot 1 = e^{-y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}e^{-y} + (x + \ln y)e^{-y} \cdot (-1) = e^{-y}\left(\frac{1}{y} - x - \ln y\right)$$

e quindi

$$\nabla f = e^{-y}\left(1\,,\, \frac{1}{y} - x - \ln y\right).$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 15/02/2023

ESERCIZIO

- Data la trasformazione lineare
$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2+x_3\\2x_2-x_3\end{pmatrix}$$

Si dica se essa è invertibile. Si indichi la dimensione e una base della sua immagine. È vero che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ ha una controimmagine attraverso T? Si provi che il vettore $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di T e si trovi una sua controimmagine.

- Data la funzione
$$f(x,y)=2x+3y+\ln\big(xy\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si trovi l'unico punto stazionario di f e si determini la sua natura con le condizioni del secondo ordine. Si scriva infine la restrizione di f alla curva di equazione $xy=1$ e si dica qual è il segno della funzione lungo tale curva. È vero che lungo la curva di equazione $xy=1$ non esistono punti in cui la funzione si annulla?

✎

- La trasformazione va da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, cioè $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. La matrice che la rappresenta è
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

La trasformazione è invertibile se e solo se $\det A\neq 0$, quindi calcoliamo il determinante di A, ad esempio sviluppandolo rispetto alla prima riga.
$$\det A = 1\cdot(1-2)-1\cdot(-1)=-1+1=0.$$

Pertanto T non è invertibile.

La dimensione dell'immagine di T ($\mathrm{Im}T$) è uguale al rango della matrice A, che non è 3 dato che il determinante si annulla. Possiamo dire che il rango è 2, ad esempio osservando che il minore formato dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna è diverso da zero. Quindi $\dim \mathrm{Im}T=2$.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

Coerentemente con il minore appena considerato possiamo dire che una base di $\mathrm{Im}T$ è data dalla 1^{a} e 3^{a} colonna di A.

Non è vero che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ ha una controimmagine attraverso T, dato che la trasformazione non è invertibile: infatti, essendo la $\dim\mathrm{Im}T=2$, l'immagine è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, e quindi un vettore che non appartiene a questo sottospazio non ha una controimmagine attraverso T. La trasformazione non è suriettiva.

Per provare che il vettore $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di T ci sono molti modi equivalenti. Faccio osservare che è richiesta anche una controimmagine di questo vettore e che non tutti i modi forniscono anche questa informazione.

Il modo più naturale per risolvere il problema è questo: si tratta di capire che esiste un vettore $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tale che $T(x)=(1,0,1)$, che equivale al sistema lineare
$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_2+x_3=0\\2x_2-x_3=1\end{cases}\qquad\text{con matrici}\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&-1&1&0\\0&2&-1&1\end{array}\right).$$

Sappiamo già che il rango di A è 2 ed è immediato verificare che anche il rango di $A|b$ è lo stesso (la terza riga di $A|b$ è la differenza delle prime due). Quindi il sistema ha soluzioni (teorema di Rouché-Capelli) e questo prova che c'è una controimmagine, o che $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di T. Risolvendo il sistema si trovano tutte le possibili controimmagini. Ancora coerentemente con il minore indicato sopra, e cioè eliminando la terza equazione e facendo diventare parametro y, si trova che le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo
$$\big(1-y,y,2y-1\big),\ \text{con } y\in\mathbb{R}.$$

Un altro modo possibile per rispondere ad entrambe le richieste è provare che $(1,0,1)$ si può scrivere come combinazione lineare della base dell'immagine trovata sopra, cioè dei due vettori $(1,1,0)$ e $(0,1,-1)$. Si scrive quindi (i vettori si possono scrivere in riga, è lo stesso)

$$(1,0,1) = a(1,1,0) + b(0,1,-1) \quad \text{cioè} \quad (1,0,1) = (a, a+b, -b) \quad \text{cioè} \quad a = 1, b = -1.$$

L'aspetto non immediato è che con questo non abbiamo solo provato che il vettore appartiene all'immagine, ma abbiamo anche trovato una delle possibili controimmagini. I coefficienti della combinazione lineare infatti sono le componenti di una controimmagine. Attenzione però: non è corretto dire che una controimmagine è $(1,-1)$, dato che questo vettore non sta in $\mathbb{R}^3$. La risposta corretta è il vettore $(1,0,-1)$ perché dobbiamo dare un coefficiente anche alla seconda colonna di A. Indicando con c_1, c_2, c_3 le tre colonne, quanto trovato significa che $(1,0,1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3$, come si verifica facilmente.[3]

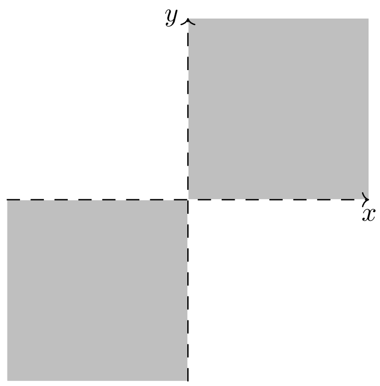
Un altro modo, che però prova soltanto l'appartenenza di $(1,0,1)$ all'immagine (e non fornisce una controimmagine) è provare che questo vettore dipende linearmente dai due vettori di base. Questo è immediato, usando il determinante. Si ha infatti (le prime due colonne sono i vettori di base e ho aggiunto $(1,0,1)$ quale terza colonna)

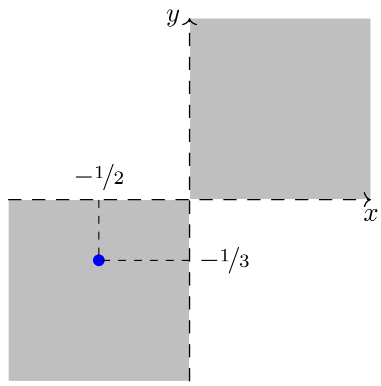
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

- La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$xy > 0 \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0. \end{cases}$$

Si tratta del 1° oppure del 3° quadrante, punti di frontiera, cioè assi cartesiani, esclusi. L'insieme è aperto, dato che tutti i suoi punti di frontiera non appartengono all'insieme stesso. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura a sinistra qui sotto.





Troviamo il punto stazionario: calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + \frac{1}{xy} \cdot y = 2 + \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 + \frac{1}{xy} \cdot x = 3 + \frac{1}{y}.$$

Si trova facilmente che le derivate parziali si annullano soltanto nel punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

Ora determiniamo la natura di questo punto stazionario con le condizioni del secondo ordine. Servono le derivate parziali seconde:

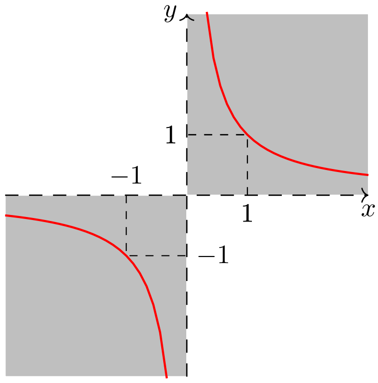
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

Pertanto la matrice Hessiana è

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 0 & -1/y^2 \end{pmatrix} \text{ che, calcolata in } (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}), \text{ diventa } \nabla^2 f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Si tratta (banalmente) di una matrice simmetrica definita negativa, e quindi possiamo concludere che il punto stazionario $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ è un punto di massimo locale.

[3] Si può osservare che la controimmagine trovata, $(1,0,-1)$, è una delle soluzioni del sistema considerato sopra, quella con $y = 0$.



La restrizione di f alla curva di equazione $xy = 1$ (indicata in rosso nella figura sopra) è

$$f\Big|_{xy=1} = f\Big|_{y=\frac{1}{x}} = 2x + \frac{3}{x} - \ln 1 = 2x + \frac{3}{x}.$$

Il segno della funzione lungo la curva $xy = 1$ si può trovare studiando il segno della restrizione, cioè dell'espressione $2x + \frac{3}{x}$, ma anche più semplicemente osservando che lungo tale curva il logaritmo si annulla e, dato che nel primo quadrante entrambe le variabili sono positive (ed entrambe negative nel terzo quadrante) il termine $2x + 3y$ è quindi positivo nel primo e negativo nel terzo.

L'ultima domanda (è vero che lungo la curva di equazione $xy = 1$ non esistono punti in cui la funzione si annulla?) ha risposta affermativa: lo si vede subito in quanto la restrizione trovata

$$2x + \frac{3}{x} = \frac{2x^2 + 3}{x}$$

non può annullarsi.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/02/2023

Domanda 1. Scomporre il polinomio $1 + x - x^2 - x^3$ in fattori non ulteriormente scomponibili

✎

Con un doppio raccoglimento si ha

$$\underbrace{1 + x}-\underbrace{x^2 - x^3} = 1 + x - x^2(1 + x) = (1 + x)(1 - x^2) = (1 + x)^2(1 - x).$$

Domanda 2. Nell'espressione $2xe^{2x} + 4x^2e^{-x}$ raccogliere $2xe^{2x}$ e semplificare

✎

$$2xe^{2x} + 4x^2e^{-x} = 2xe^{2x}\left(\frac{2xe^{2x}}{2xe^{2x}} + \frac{4x^2e^{-x}}{2xe^{2x}}\right) = 2xe^{2x}(1 + 2xe^{-3x}).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$10x = 7 - \frac{1}{x}$$

✎

$$(\text{con } x \neq 0) \quad 10x - 7 + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10x^2 - 7x + 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x^2 - 7x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7 \mp 3}{20}.$$

Le soluzioni sono quindi $\frac{1}{5}$ oppure $\frac{1}{2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln(1 - x) < 2$$

✎

La condizione di esistenza è $1 - x > 0$, quindi $x < 1$. La disequazione equivale a

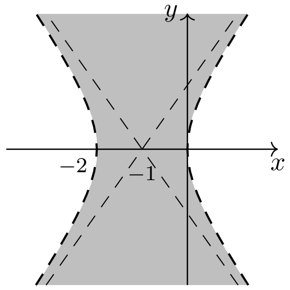
$$1 - x < e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 - e^2.$$

Quindi le soluzioni sono $1 - e^2 < x < 1$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $(x + 1)^2 - \dfrac{y^2}{2} < 1$

✎

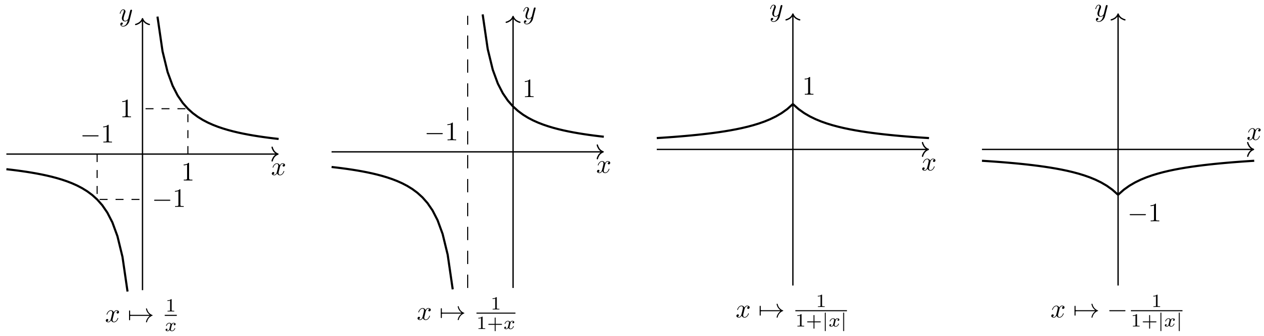
L'equazione corrispondente $(x + 1)^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ definisce un'iperbole con centro in $(-1, 0)$, asintoti obliqui e rami che stanno a destra e sinistra del centro. Le pendenze degli asisntoti sono $m = \pm\sqrt{2}$. Si può osservare che l'iperbole passa per l'origine e che l'altro punto di intersezione con l'asse orizzontale è $(-2, 0)$. La disequazione porta infine a dover considerare quali soluzioni i punti che stanno tra i rami dell'iperbole, cioè la regione che contiene il centro. Pertanto si ottiene quanto raffigurato qui sotto (i punti sull'iperbole sono esclusi). La regione è indicata in grigio.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = -\dfrac{1}{1+|x|}$

✎

Le trasformazioni sono indicate qui sotto.



Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln x}{x^2+\sqrt{x}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln x}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{0^+ + \ln 0^+}{0^+ + 0^+} = \frac{0^+ + (-\infty)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\big(2x - e^{-x}\big)$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot (2x - e^{-x}) + x(2 - e^{-x} \cdot (-1)) = 2x - e^{-x} + x(2 + e^{-x}).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{7+x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{x}{7+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{7+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(7+x^2) + c.$$

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = \big(y + \ln x\big)\,e^{-y}$

✎

Le due derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot e^{-y} = \frac{e^{-y}}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot e^{-y} + (y + \ln x)e^{-y} \cdot (-1) = e^{-y}(1 - y - \ln x)$$

e quindi

$$\nabla f = e^{-y}\left(\frac{1}{x}\,,\, 1 - y - \ln x\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 15/02/2023

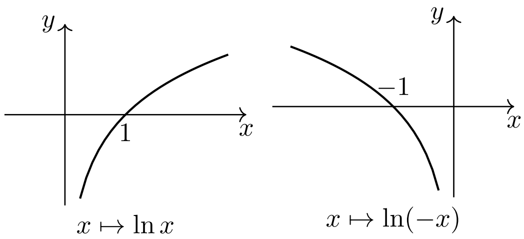
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x \le -1 \\ e^{-x} - e & x > -1, \end{cases}$$

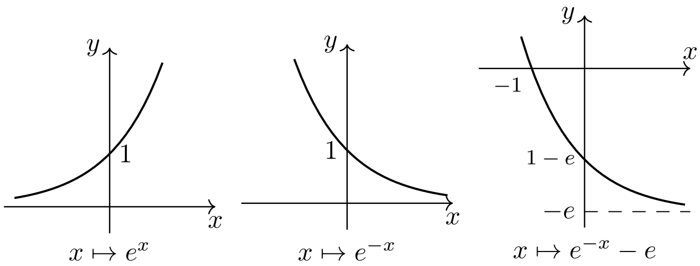
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica se alla funzione f è applicabile il teorema degli zeri nell'intervallo $[-e, 0]$.

✎

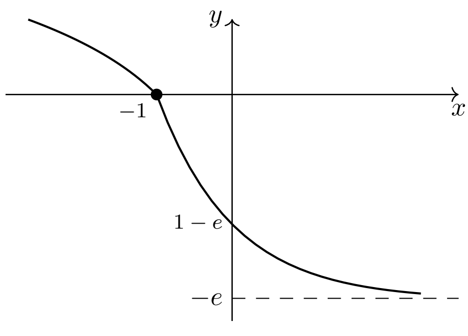
La trasformazione grafica elementare della funzione logaritmica è questa.



Le trasformazioni della funzione esponenziale sono queste.



Il grafico della funzione f è qui sotto.



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in -1. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in -1 da sinistra, dato che in $x = -1$ e in un suo intorno sinistro coincide con la funzione logaritmica. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = -1$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale.

Si ha

$$f(-1) = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (e^{-x} - e) = e - e = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in -1, e quindi in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq -1$, possiamo scrivere

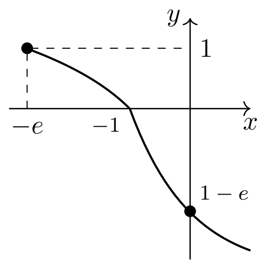
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x} \cdot (-1) & x < -1 \\ e^{-x} \cdot (-1) & x > -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < -1 \\ -e^{-x} & x > -1. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} 1/x = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (-e^{-x}) = -e.$$

Quindi la funzione non è derivabile in -1 (si ha un punto angoloso).

Passiamo all'ultima domanda, l'applicabilità del teorema degli zeri alla funzione nell'intervallo $[-e, 0]$: dobbiamo vedere se le ipotesi sono verificate nel caso in esame. Le ipotesi del teorema degli zeri sono che la funzione sia continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-e, 0]$ e abbia valori di segno opposto agli estremi, cosa che si può scrivere con $f(-e) \cdot f(0) < 0$. Qui a destra riporto la parte di grafico più significativa.



Abbiamo visto in precedenza che la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ e quindi lo è in particolare nell'intervallo (chiuso e limitato) $[-e, 0]$. I valori agli estremi sono

$$f(-e) = \ln e = 1 \qquad \text{e} \qquad f(0) = e^0 - e = 1 - e.$$

Dato che il primo è positivo e il secondo negativo, anche la seconda ipotesi è verificata, e quindi il teorema degli zeri è applicabile.

ESERCIZIO 2. Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Si dica se essa è invertibile. Si indichi la dimensione e una base della sua immagine. È vero che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ ha una controimmagine attraverso T? Si provi che il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di T e si trovi una sua controimmagine.

✎

La trasformazione va da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, cioè $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. La matrice che la rappresenta è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, quindi calcoliamo il determinante di A, ad esempio sviluppandolo rispetto alla prima riga.

$$\det A = 1 \cdot (1 - 2) - 1 \cdot (-1) = -1 + 1 = 0.$$

Pertanto T non è invertibile.

La dimensione dell'immagine di T ($\mathrm{Im}T$) è uguale al rango della matrice A, che non è 3 dato che il determinante si annulla. Possiamo dire che il rango è 2, ad esempio osservando che il minore formato dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna è diverso da zero. Quindi $\dim \mathrm{Im}T = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Coerentemente con il minore appena considerato possiamo dire che una base di $\mathrm{Im}T$ è data dalla 1ª e 3ª colonna di A.

Non è vero che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ ha una controimmagine attraverso T, dato che la trasformazione non è invertibile: infatti, essendo la $\dim \mathrm{Im}T = 2$, l'immagine è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, e quindi un vettore che non appartiene a questo sottospazio non ha una controimmagine attraverso T. La trasformazione non è suriettiva.

Per provare che il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di T ci sono molti modi equivalenti. Faccio osservare che è richiesta anche una controimmagine di questo vettore e che non tutti i modi forniscono anche questa informazione.

Il modo più naturale per risolvere il problema è questo: si tratta di capire che esiste un vettore $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che $T(x) = (1, 0, 1)$, che equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{con matrici} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Sappiamo già che il rango di A è 2 ed è immediato verificare che anche il rango di $A|b$ è lo stesso (la terza riga di $A|b$ è la differenza delle prime due). Quindi il sistema ha soluzioni (teorema di Rouché-Capelli) e questo prova che c'è una controimmagine, o che $(1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di T. Risolvendo il sistema si trovano tutte le possibili controimmagini. Ancora coerentemente con il minore indicato sopra, e cioè eliminando la terza equazione e facendo diventare parametro y, si trova che le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\big(1 - y, y, 2y - 1\big), \text{ con } y \in \mathbb{R}.$$

Un altro modo possibile per rispondere ad entrambe le richieste è provare che $(1, 0, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare della base dell'immagine trovata sopra, cioè dei due vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, -1)$. Si scrive quindi (i vettori si possono scrivere in riga, è lo stesso)

$$(1, 0, 1) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, -1) \quad \text{cioè} \quad (1, 0, 1) = (a, a + b, -b) \quad \text{cioè} \quad a = 1, b = -1.$$

L'aspetto non immediato è che con questo non abbiamo solo provato che il vettore appartiene all'immagine, ma abbiamo anche trovato una delle possibili controimmagini. I coefficienti della combinazione lineare infatti sono le componenti di una controimmagine. Attenzione però: non è corretto dire che una controimmagine è $(1, -1)$, dato che questo vettore non sta in $\mathbb{R}^3$. La risposta corretta è il vettore $(1, 0, -1)$ perché dobbiamo dare un coefficiente anche alla seconda colonna di A. Indicando con c_1, c_2, c_3 le tre colonne, quanto trovato significa che $(1, 0, 1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3$, come si verifica facilmente.[4]

Un altro modo, che però prova soltanto l'appartenenza di $(1, 0, 1)$ all'immagine (e non fornisce una controimmagine) è provare che questo vettore dipende linearmente dai due vettori di base. Questo è immediato, usando il determinante. Si ha infatti (le prime due colonne sono i vettori di base e ho aggiunto $(1, 0, 1)$ quale terza colonna)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

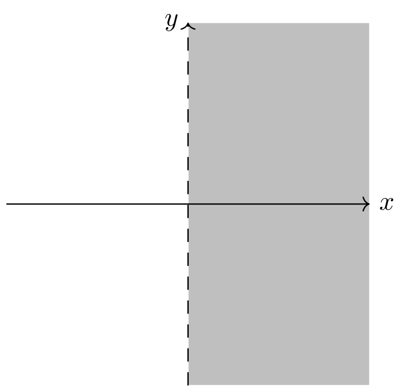
ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - \ln x$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si trovi l'unico punto stazionario di f e si determini la sua natura con le condizioni del secondo ordine. Si dica infine se lungo la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sugli assi cartesiani ci sono punti di massimo o di minimo vincolati.

✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da $x > 0$ e si tratta della regione che sta a destra dell'asse verticale, cioè del 1° oppure del 4° quadrante, punti di frontiera, cioè asse y, escluso. L'insieme è aperto, dato che tutti i suoi punti di frontiera non appartengono all'insieme. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura qui sotto.



Cerchiamo ora questo unico punto stazionario. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

[4] Si può osservare che la controimmagine trovata, $(1, 0, -1)$, è una delle soluzioni del sistema considerato sopra, quella con $y = 0$.

Ponendo uguali a zero le due derivate parziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2-1}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi i due punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, ma il primo non è accettabile per la condizione di esistenza. Quindi l'unico punto stazionario è $(1, 0)$.

Ora determiniamo la natura di questo punto con le condizioni del secondo ordine. Servono le derivate parziali seconde:

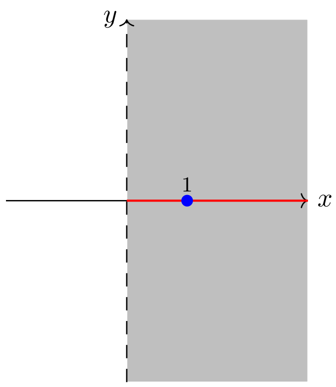
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Pertanto la matrice Hessiana (gradiente secondo) è

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 1 + 1/x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ che, calcolata in } (1,0), \text{ diventa } \nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si tratta (banalmente) di una matrice simmetrica definita positiva, e quindi possiamo concludere che il punto stazionario $(1, 0)$ è un punto di minimo locale.

Passiamo all'ultima domanda, che considera la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sugli assi cartesiani. Si tratta soltanto dei punti che stanno sul semiasse positivo delle x, con equazione quindi $y = 0$ (e $x > 0$). Questi punti sono indicati in rosso nella figura qui a fianco.



Tra questi punti c'è anche il punto di minimo locale trovato poco fa. Pertanto, banalmente, in questa restrizione c'è il punto di minimo vincolato $(1, 0)$.[5]

Per rispondere all'ultima domanda si poteva anche procedere nel modo generale: scrivere formalmente la restrizione e poi cercare punti stazionari vincolati annullando la sua derivata. L'espressione della restrizione è

$$f\big|_{y=0} = \frac{x^2}{2} - \ln x, \text{ la cui derivata è } x - \frac{1}{x}.$$

Questa si annulla se

$$\frac{x^2-1}{x} = 0, \text{ cioè se } x^2 - 1 = 0 \text{ ossia } x = \pm 1.^6$$

Si trova il punto stazionario vincolato $(1, 0)$ e attraverso il segno della derivata si trova che è un punto di minimo vincolato.

[5]Si ricordi che se un certo punto (x_0, y_0) è di massimo/minimo locale certamente è anche di massimo/minimo (locale) vincolato su qualunque restrizione passante per il punto stesso.

[6]Sono ovviamente gli stessi passaggi fatti sopra annullando la derivata parziale rispetto ad x.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 29/06/2023

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^3 - 4x$

✎

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

Domanda 2. Per quali valori di x è definita l'espressione $\dfrac{1}{\ln x}$?

✎

Le condizioni nelle quali l'espressione è definita sono (argomento del logaritmo e denominatore)

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Pertanto si tratta dell'insieme $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x^2 - 3 = 2x$$

✎

Portando tutto a sinistra, l'equazione equivale a $x^2 - 2x - 3 = 0$. Con la formula (ridotta) risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{1+3}}{1} = 1 \mp 2.$$

Le soluzioni sono pertanto $x = -1$ oppure $x = 3$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 + \ln x \leq 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x > 0$. Poi la disequazione si può scrivere come

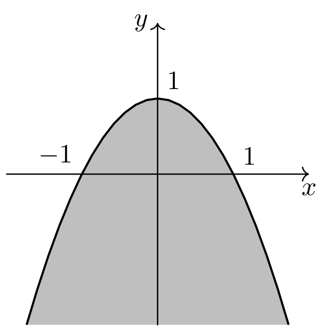
$$\ln x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{e}.$$

Pertanto le soluzioni sono $0 < x \leq \frac{1}{e}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + y \leq 1$

✎

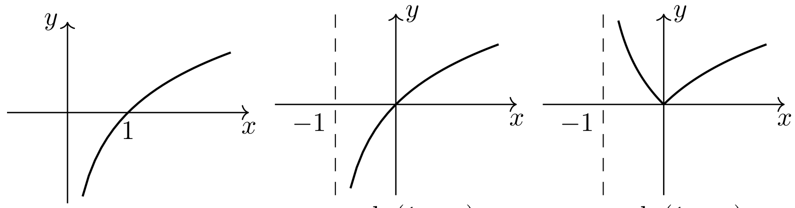
La disequazione equivale a $y \leq 1 - x^2$. L'equazione corrispondente definisce la parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso e vertice in $(0, 1)$. La disequazione ha per soluzioni quindi i punti del piano che stanno sulla parabola o al di sotto di essa. L'insieme è evidenziato in grigio nella figura qui sotto.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = \left|\ln(x+1)\right|$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto. La sequenza può essere $\ln x \to \ln(1+x) \to |\ln(1+x)|$.



$x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $x \mapsto \ln(1+x)$ $\qquad$ $x \mapsto \ln(1+x)$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1+e^x}{x^2}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1+e^x}{x^2} = \frac{1+e^{-\infty}}{(-\infty)^2} = \frac{1+0}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x(1+\ln x)$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot (1+\ln x) + x \cdot \left(0 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \ln x + 1 = 2 + \ln x.$$

Domanda 9. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

✎

Anzitutto la matrice inversa esiste in quanto $\det A = 4 - 6 = -2$, diverso da zero.
La matrice dei complementi algebrici di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi la matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per il determinante di A si trova che la matrice inversa è

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare la derivata parziale rispetto ad y della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{y \ln x}$

✎

Dato che si può scrivere $f(x,y) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{y}$, la derivata parziale di f rispetto ad y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2 \ln x}.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 29/06/2023

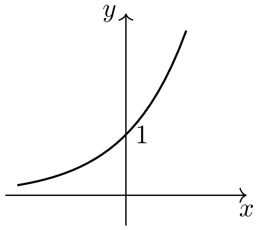
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 1 \\ 1/x & x > 1, \end{cases}$$

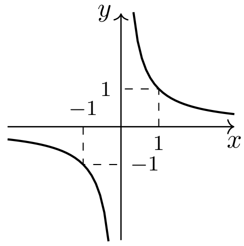
se ne disegni un grafico. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica se per la funzione f nell'intervallo $\big[0, 2\big]$ sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass. Si dica poi se è verificata la tesi del teorema. Infine si calcoli l'integrale di f nell'intervallo $\big[0, 2\big]$.

✎

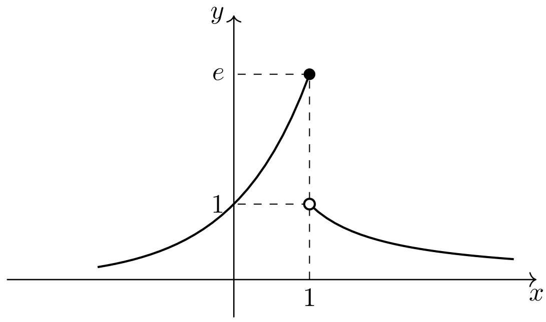
I grafici delle due funzioni e^x e $\frac{1}{x}$ sono immediati (a sinistra e al centro qui sotto). Il grafico della funzione f è pertanto quello qui a destra. Si osservi, per una rappresentazione corretta, che $f(1) = e$.



$x \mapsto e^x$



$x \mapsto \frac{1}{x}$



Il grafico mostra chiaramente che la funzione non è continua in $x = 1$. La definizione di continuità lo conferma:

$$f(1) = e^1 = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} 1/x = 1. \quad \text{C'è quindi un salto in } x = 1.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo dire subito che, non essendo f continua in $x = 1$, non è nemmeno derivabile in questo punto.[7]

Veniamo al teorema di Weierstrass. Le ipotesi non sono verificate, dato che l'intervallo $[0, 2]$ è chiuso e limitato, ma la funzione non è continua in questo intervallo. La rappresentazione grafica è all'inizio della pagina seguente.

La tesi del teorema è comunque verificata (ci si aiuti col grafico). Possiamo affermare che il punto di massimo è $x_M = 1$ (con valore massimo $f(x_M) = e$) e il punto di minimo $x_m = 2$ (con valore minimo $f(x_m) = 1/2$).

Concludiamo con il calcolo dell'integrale di f nell'intervallo $[0, 2]$. La funzione è definita a tratti in questo intervallo e quindi dobbiamo dividere il calcolo in due integrali distinti. Si ha

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e^x\Big|_0^1 + \ln x\Big|_1^2 = e - 1 + \ln 2.$$

[7] Attenzione qui: la verifica della derivabilità in $x = 1$ con il limite delle derivate è rischiosa in questi casi (di non continuità). Mi spiego svolgendo anche questa parte, non necessaria, dato che possiamo già affermare che f non è derivabile. Abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 1 \\ -1/x^2 & x > 1 \end{cases}$$

Quindi si ha

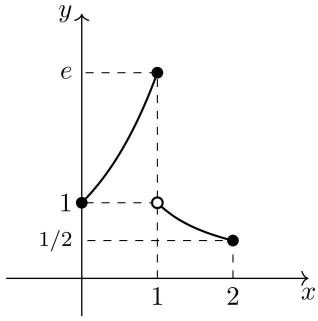
$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} e^x = e \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (-1/x^2) = -1.$$

In questo caso i limiti sono diversi e quindi non rischiamo di cadere in errore, ma se i limiti fossero uguali rischieremmo di concludere (errando) che f è derivabile, in contrasto con quanto trovato prima.

Fornisco un semplice esempio in cui si può cadere in errore:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0, \end{cases} \qquad \text{in cui si ha} \quad f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & x > 0. \end{cases}$$

I limiti delle derivate (cioè le derivate destra e sinistra) sono entrambi nulli, ma la funzione non è derivabile in $x = 0$ dato che non è continua in $x = 0$.



ESERCIZIO 2. Dati i tre vettori

$$v^1 = (-1, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0) \quad , \quad v^3 = (1, 3, 1)$$

si dica se essi sono linearmente indipendenti o dipendenti. Sono generatori di tutto $\mathbb{R}^3$? Se no, qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato? Il vettore fondamentale $(0, 0, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori dati?

✎

Per capire se i tre vettori sono linearmente indipendenti o dipendenti si può fare in due modi: con la definizione oppure scrivendo una matrice e calcolandone il rango. Seguiamo la via più veloce, la matrice. Mettendo i vettori in riga otteniamo la matrice (quadrata)

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo del determinante di questa matrice ci dà la risposta: si ha (calcolo ad esempio rispetto alla terza colonna)

$$\det V = 1 \cdot (3 - 1) + 1 \cdot (-1 - 1) = 2 - 2 = 0.$$

Dato che il determinante è uguale a zero (il rango non è 3) i vettori sono linearmente dipendenti.

Non sono quindi generatori di tutto $\mathbb{R}^3$. La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato è uguale al rango della matrice V. Il rango è 2, dato che ad esempio la sottomatrice di V formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero. Pertanto $\dim \mathcal{S} = 2$.

Passiamo all'ultima domanda, se il vettore fondamentale $(0, 0, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori dati.

Dei tre vettori dati al più due sono linearmente indipendenti e, sulla base della sottomatrice usata prima per dire che il rango è 2, possiamo dire che v^1 e v^2 sono l.i. Basta quindi capire se $(0, 0, 1)$ dipende da v^1 e v^2.

Se consideriamo allora la matrice

$$V' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{il suo determinante } (3^{\text{a}} \text{ riga}) \text{ è } 1 \cdot (-2) = -2 \neq 0.$$

Quindi il vettore $(0, 0, 1)$ non dipende da v^1 e v^2, cioè non si può scrivere come loro combinazione lineare.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = xy - \frac{x}{y}$$

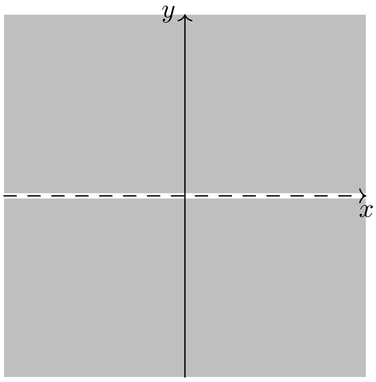
si determini e si disegni il suo dominio. In quali punti la funzione si annulla? Si calcoli il gradiente di f e trovino i suoi punti stazionari. È possibile stabilire se si tratta di punti di massimo/minimo con le condizioni del secondo ordine?

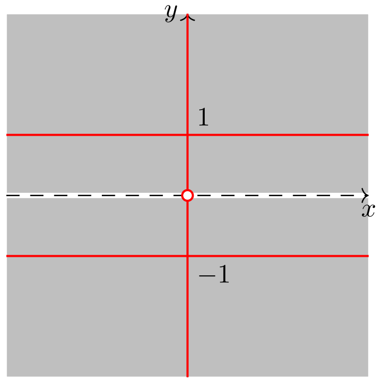
✎

L'unica condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$y \neq 0$$

e quindi il dominio della funzione è tutto il piano ad esclusione dei punti che stanno sull'asse x, tratteggiato nella figura qui sotto a sinistra.





La funzione si annulla se

$$xy - \frac{x}{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(y - \frac{1}{y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{y^2 - 1}{y} = 0.$$

Pertanto f si annulla sui punti delle rette di equazione $x = 0$ (asse y) e $y = \pm 1$, raffigurate in rosso nella figura qui sopra a destra.

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{1}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = x + \frac{x}{y^2}.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(y - \frac{1}{y}\ ,\ x + \frac{x}{y^2}\right).$$

Annulliamo le derivate parziali per trovare i punti stazionari.

$$\begin{cases} y - \frac{1}{y} = 0 \\ x + \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{y^2-1}{y} = 0 \\ x + \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \pm 1 \\ x + \frac{x}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione $y = \pm 1$ si ottiene comunque $x = 0$. I punti stazionari sono quindi $(0, -1)$ e $(0, 1)$.

Veniamo all'ultima domanda. Ci servono le derivate parziali seconde e la matrice Hessiana. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + \frac{1}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + \frac{1}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y^3}.$$

La matrice Hessiana è quindi

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{y^2} \\ 1 + \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Si può osservare subito che

$$\det \nabla^2 f = -\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2,$$

e quindi sempre negativo. La forma è sempre indefinita, in particolare nei due punti stazionari. Le condizioni del secondo ordine consentono allora di capire la loro: si tratta di punti di sella, cioè di punti né di massimo né di minimo.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/09/2023

Domanda 1. Dividere il polinomio $x^4 - 2x^2 + 1$ per il polinomio $x + 1$ usando la regola di Ruffini

✎

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

per cui possiamo scrivere $x^4 - 2x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1)$.

Domanda 2. Per quali valori di x è definita l'espressione $\dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}$?

✎

Le condizioni nelle quali l'espressione è definita sono (argomento della radice e denominatore)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Pertanto si tratta dell'insieme $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x^2 - 11 = 10x$$

✎

Portando tutto a sinistra, l'equazione equivale a $x^2 - 10x - 11 = 0$. Scomponendo in fattori il polinomio (somma/prodotto) si ha $(x + 1)(x - 11) = 0$ e quindi le soluzioni sono $x = -1$ oppure $x = 11$. Si poteva, alternativamente, usare la la formula (ridotta) risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$x = \frac{5 \mp \sqrt{25 + 11}}{1} = 5 \mp 6 = -1 \text{ oppure } 11.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$3 + \ln x \leq 0$$

✎

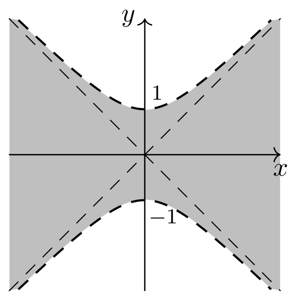
La condizione di esistenza è $x > 0$. Poi la disequazione si può scrivere come

$$\ln x \leq -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq e^{-3}.$$

Pertanto le soluzioni sono $0 < x \leq \frac{1}{e^3}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione
$x^2 - y^2 + 1 > 0$

✎



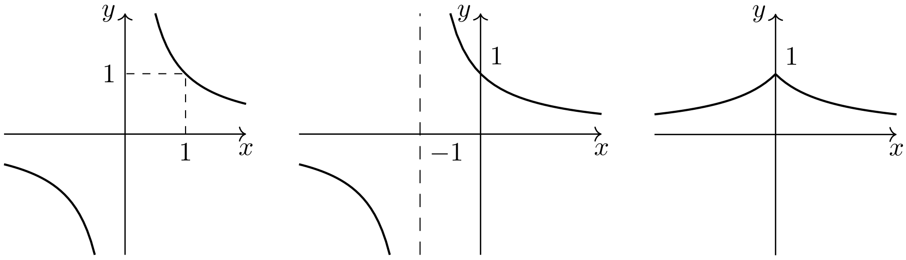
La disequazione equivale a $x^2 - y^2 > -1$. L'equazione corrispondente definisce l'iperbole di centro l'origine, asintoti obliqui di equazioni $y = \pm x$, con rami al di sopra e al di sotto del centro (con riferimento alle dispense è un'iperbole del 3° tipo).

Dato che il centro $(0, 0)$ soddisfa la disequazione $(0 > -1)$, la disequazione ha per soluzione la regione del piano che, rispetto ai rami dell'iperbole, contiene il centro. I punti sull'iperbole non sono soluzioni. L'insieme è evidenziato in grigio nella figura qui a fianco.

Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$

✎

L'unica sequenza corretta è $\frac{1}{x} \to \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{1+|x|}$. Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{1/x}}{\sqrt{x}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{1/x}}{\sqrt{x}} = \frac{1+e^{1/0^+}}{\sqrt{0^+}} = \frac{1+e^{+\infty}}{0^+} = \frac{1+\infty}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x + \dfrac{1}{\ln x}$

✎

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x\ln^2 x}.$$

Domanda 9. Nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
calcolare il complemento algebrico dell'elemento di posto $(2,1)$

✎

Ricordo che, in una matrice quadrata, il complemento algebrico A_{ij} dell'elemento di posto (i,j) è dato dal minore complementare M_{ij} dell'elemento stesso, cambiato di segno se il "posto è dispari". La formula è $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, dove il minore complementare è il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna. Nel nostro caso quindi

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -(18-24) = -(-6) = 6.$$

Domanda 10. Calcolare la derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x,y) = \dfrac{y+y^2}{1+xy}$

✎

Si consideri che, dovendo derivare rispetto ad x, il numeratore $y+y^2$ è costante e, dato che possiamo scrivere

$$f(x,y) = (y+y^2)\cdot\frac{1}{1+xy}, \quad \text{si ha (come funzione composta)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (y+y^2)\cdot\left(-\frac{1}{(1+xy)^2}\cdot y\right) = -\frac{y^2(1+y)}{(1+xy)^2}.$$

Derivando invece, alternativamente, come quoziente si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{0\cdot(1+xy)-(y+y^2)\cdot y}{(1+xy)^2} = -\frac{y^2(1+y)}{(1+xy)^2}.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/09/2023

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & x \le 1 \\ -1/x & x > 1, \end{cases}$$

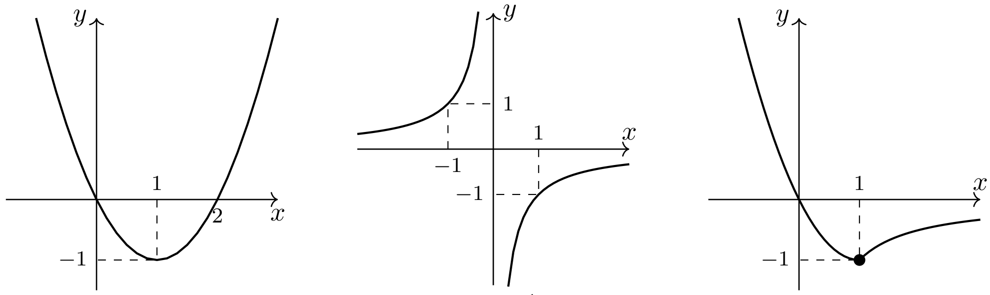
se ne disegni un grafico. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Quali sono gli estremi (inferiore e superiore) di f? Si dica se per la funzione nell'intervallo $\big[-1,2\big]$ sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri. Infine si calcoli l'integrale di f nell'intervallo $\big[0,2\big]$.

✎

La funzione $x \mapsto x(x-2) = x^2 - 2x$ ha per grafico una parabola con concavità rivolta verso l'alto e passante per i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 2$. La raffigurazione su tutto $\mathbb{R}$ è sotto a sinistra.

Il grafico della funzione $\mapsto -\frac{1}{x}$ si ottiene invece con una semplice trasformazione elementare di $\mapsto \frac{1}{x}$, facendone cioè l'opposto. La raffigurazione è sotto al centro.

Il grafico della funzione f è quello qui sotto a destra. Si osservi, per una rappresentazione corretta, che $f(1) = -1$.



$x \mapsto x(x-2)$ $\qquad$ $x \mapsto -\frac{1}{x}$ $\qquad$ $x \mapsto f(x)$

Il grafico mostra chiaramente che la funzione è continua in $x = 1$. La definizione di continuità lo conferma:

$$f(1) = 1 \cdot (1-2) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} (-1/x) = -1.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, possiamo intanto scrivere che

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & x < 1 \\ 1/x^2 & x > 1. \end{cases}$$

Le derivate, sinistra e destra, sono pertanto

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} (2x-2) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} 1/x^2 = 1.$$

Quindi concludiamo che la funzione non è derivabile in $x = 1$ (c'è un punto angoloso).

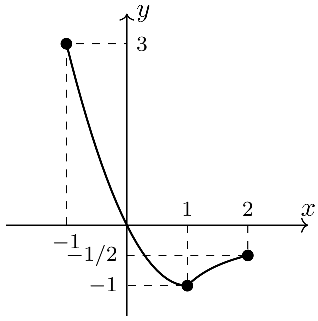
Dal grafico ricaviamo facilmente gli estremi della funzione: l'estremo superiore non c'è (oppure è $+\infty$, è lo stesso); l'estremo inferiore è il valore che la funzione ha in $x = 1$, cioè $f(1) = -1$ e questo è anche il minimo di f.

Veniamo all'applicabilità del teorema degli zeri nell'intervallo $[-1,2]$, cioè al fatto che siano verificate le sue ipotesi.

Nella pagina seguente è riportato il grafico della funzione nell'intervallo $[-1,2]$. Le ipotesi del teorema sono che l'intervallo in cui la funzione è definita (o considerata) sia chiuso e limitato, e questo è vero. Poi che la funzione sia continua in tale intervallo, e anche questo lo abbiamo verificato. Infine che i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo siano di segno opposto. Vediamo.

$$f(-1) = -1 \cdot (-1-2) = 3 \quad \text{e} \quad f(2) = -1/2.$$

Quindi anche la terza ipotesi è verificata. Il teorema è dunque applicabile. Non è richiesto nulla in merito alla tesi del teorema.



Concludiamo con il calcolo dell'integrale di f nell'intervallo $[0, 2]$. La funzione è definita a tratti in questo intervallo e quindi dobbiamo dividere il calcolo in due integrali distinti negli intervalli $[0, 1]$ e $[1, 2]$. Si ha

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right\rvert_0^1 - \ln x\Big\rvert_1^2 = \frac{1}{3} - 1 - \ln 2 = -\frac{2}{3} - \ln 2.$$

ESERCIZIO 2. Dati i tre vettori

$$v^1 = (1, 3, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0) \quad , \quad v^3 = (-1, 1, 1)$$

si dica se essi sono linearmente indipendenti o dipendenti. Sono generatori di tutto $\mathbb{R}^3$? Se no, qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato? Il vettore $(0, 2, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori dati?

✎

Per capire se i tre vettori sono linearmente indipendenti o dipendenti si può fare in due modi: con la definizione oppure scrivendo una matrice e calcolandone il determinante/rango. È sicuramente più comoda e veloce la seconda strada, ma vediamole entrambe.

Scriviamo una generica c.l. dei tre vettori e poniamola uguale al vettore nullo.

$$a\,(1, 3, 1) + b\,(1, 1, 0) + c\,(-1, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

che equivale a

$$(a + b - c\,,\ 3a + b + c\,,\ a + c) = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b - c = 0 & (1^{\mathrm{a}}) \\ 3a + b + c = 0 & (2^{\mathrm{a}}) \\ a + c = 0. & (3^{\mathrm{a}}) \end{cases}$$

Per la ricerca della soluzione procediamo con la sostituzione, ricavando c dalla terza:

$$\begin{cases} c = -a & (3^{\mathrm{a}}) \\ a + b + a = 0 & (1^{\mathrm{a}}) \\ 3a + b - a = 0 & (2^{\mathrm{a}}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -a \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b = 0. \end{cases}$$

Ci sono due equazioni uguali e quindi il sistema si riduce a

$$\begin{cases} c = -a \\ 2a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -a \\ b = -2a. \end{cases}$$

È chiaro che il sistema ha soluzioni non banali, ad esempio $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Vediamo la via più veloce, la matrice. Mettendo i vettori in riga otteniamo la matrice (quadrata)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo del determinante di questa matrice ci dà la risposta: si ha (calcolo ad esempio rispetto alla terza colonna)

$$\det V = 1 \cdot (1 + 1) + 1 \cdot (1 - 3) = 2 - 2 = 0.$$

Dato che il determinante è uguale a zero (il rango non è 3) i vettori sono linearmente dipendenti.

Non sono quindi generatori di tutto $\mathbb{R}^3$. La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato è uguale al rango della matrice V. Il rango è 2, dato che ad esempio la sottomatrice di V formata dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne ha determinante diverso da zero. Pertanto $\dim \mathcal{S} = 2$.

Passiamo all'ultima domanda, se il vettore $(0, 2, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori dati.

Anche qui abbiamo almeno due strade possibili. Usare la definizione di combinazione lineare e cercare di scrivere $(0, 2, 1)$ come c.l. dei tre vettori. Però possiamo risparmiare qualche calcolo osservando che i tre vettori sono dipendenti, e quindi è inutile considerarli tutti e tre. Conviene considerare solo due vettori indipendenti e vedere se $(0, 2, 1)$ è c.l. di questi due. Prima, per dire che il rango è 2 abbiamo usato le ultime due righe e quindi certamente v^2 e v^3 sono l.i. Allora possiamo scrivere

$$(0, 2, 1) = a\,(1, 1, 0) + b\,(-1, 1, 1),$$

che equivale a

$$(a - b\ ,\ a + b\ ,\ b) = (0, 2, 1) \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 2 \\ b = 1, \end{cases}$$

che ha evidentemente la (UNICA) soluzione $a = b = 1$.[8]

Si poteva alternativamente arrivare al risultato usando le matrici. Anche in questo caso però non conviene usare tutti e tre i vettori, ma solo una coppia di vettori indipendenti (manteniamo v^2 e v^3).[9]

Se consideriamo allora la matrice

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{il suo determinante } (3^{\text{a}} \text{ colonna}) \text{ è } -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0.$$

Quindi il vettore $(0, 2, 1)$ dipende da v^2 e v^3, cioè si può scrivere come loro combinazione lineare.[10]

ESERCIZIO 3. Data la funzione

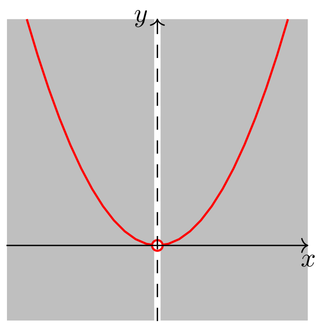
$$f(x, y) = x - \frac{y}{x}$$

si determini e si disegni il suo dominio. In quali punti la funzione si annulla? Si calcoli il gradiente di f e si dica se essa ha punti stazionari. Si determini infine in quale regione la funzione è positiva.

✎

L'unica condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$x \neq 0$$



e quindi il dominio della funzione è tutto il piano ad esclusione dei punti che stanno sull'asse y, tratteggiato nella figura qui a fianco.

La funzione si annulla se

$$x - \frac{y}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - y}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2.$$

Pertanto f si annulla sui punti di una parabola con vertice nell'origine, raffigurata in rosso sempre nella figura a fianco. Si osservi che dalla parabola dobbiamo escludere l'origine, in cui la funzione non esiste.

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{y}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}.$$

[8]Era chiaro che il vettore $(0, 2, 1)$ è semplicemente la somma di v^2 e v^3, ma ho voluto mostrare come si possa procedere in generale e risolvere il problema con la definizione limitandosi a considerare i vettori indipendenti.

[9]Usando tutti e tre i vettori dati e aggiungendo come quarta riga il nuovo vettore, non si può più usare il determinante, dato che la matrice non è quadrata: occorre vedere se, aggiungendo il nuovo vettore, il rango della matrice aumenta rispetto al rango precedente oppure resta lo stesso. Nel primo caso il nuovo vettore è indipendente dagli altri tre, nel secondo è dipendente.

[10]Si osservi, banalmente, che i due metodi non sono equivalenti (nel caso di dipendenza): il secondo ci permette solo di dire che c'è una dipendenza, mentre il primo ci permette anche di trovare qual è la c.l. che fornisce il vettore richiesto. Pertanto, se la domanda dell'esercizio fosse del tipo "trovare la c.l che fornisce un certo vettore", conviene usare subito il primo dei due metodi, dato che comunque lo si deve fare. Se invece la domanda fosse, come nel nostro caso, "dire se quel certo vettore si può scrivere come c.l. degli altri", allora conviene certamente usare le matrici.

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(1 + \frac{y}{x^2}\ ,\ -\frac{1}{x}\right).$$

Annulliamo le derivate parziali per trovare i punti stazionari.

$$\begin{cases} 1 + \frac{y}{x^2} = 0 \\ -\frac{1}{x} = 0. \end{cases}$$

È evidente che la seconda componente non può annullarsi e che quindi non ci sono punti stazionari.

Veniamo all'ultima domanda. La funzione risulta positiva se

$$x - \frac{y}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - y}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - y < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

e cioè se

$$\begin{cases} y < x^2 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y > x^2 \\ x < 0. \end{cases}$$

La figura qui sotto evidenzia in grigio le regioni in cui la funzione risulta positiva. Tutti i punti di frontiera sono esclusi.