PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 16/11/2023

Domanda 1. Completare il quadrato nel polinomio $x^2 + 3x - \frac{1}{4}$

✎

$$x^2 + 3x - \frac{1}{4} = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{10}{4}.$$

Domanda 2. Determinare in quale insieme è definita l'espressione $\dfrac{x}{\frac{1}{2} + \ln x}$

✎

Le condizioni per cui è definita l'espressione sono

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{2} + \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1/2}. \end{cases}$$

L'insieme si può scrivere come $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione $\dfrac{1}{x} - x = -1$

✎

Con la condizione $x \neq 0$ l'equazione equivale a

$$\frac{1}{x} - x + 1 = 0 \quad ; \quad \frac{1 - x^2 + x}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad ; \quad x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione $e^{2x+3} \geq 4$

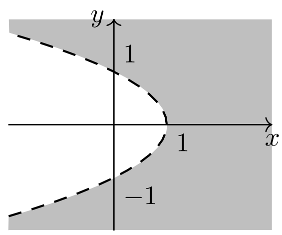
✎

Non ci sono condizioni di esistenza. La disequazione equivale a

$$e^{2x+3} \geq e^{\ln 4} \quad ; \quad 2x + 3 \geq \ln 4 \quad ; \quad x \geq \frac{\ln 4 - 3}{2}.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x + y^2 - 1 > 0$

✎



La disequazione equivale a $x > 1 - y^2$. L'equazione corrispondente definisce una parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso sinistra e vertice nel punto $(1, 0)$ (la parabola incontra l'asse y in ± 1). La regione individuata dalla disuguaglianza è quella a destra della parabola, parabola esclusa, rappresentata qui a fianco in grigio.

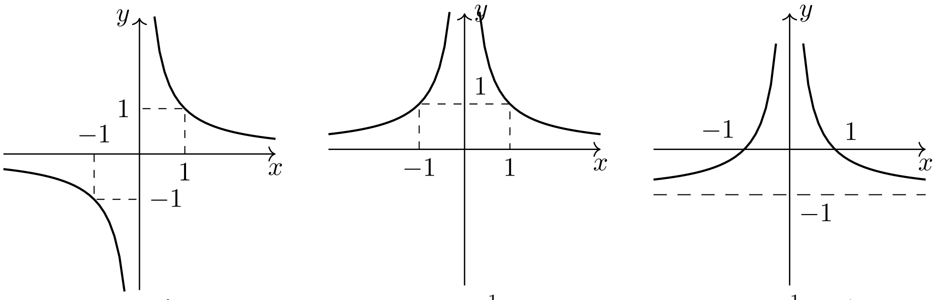
Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{|x|} - 1$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\frac{1}{x} \quad \to \quad \frac{1}{|x|} = \left|\frac{1}{x}\right| \quad \to \quad \frac{1}{|x|} - 1.$$

I grafici sono nella pagina seguente.



$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ $\qquad$ $x \mapsto \frac{1}{|x|} - 1$

Domanda 7. Si trovi l'espressione della funzione inversa di $f(x) = 1 - \ln(x+1)$

✎

Scrivendo $y = 1 - \ln(x+1)$, dobbiamo ricavare x in funzione di y.

$$\ln(x+1) = 1 - y \quad ; \quad x + 1 = e^{1-y} \quad ; \quad x = e^{1-y} - 1.$$

Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x^2}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{e^{-\infty} - 1}{(-\infty)^2} = \frac{0-1}{+\infty} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \ (0^-).$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $\quad f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

✎

Possiamo derivare la funzione in due modi, o come quoziente o come composta. Come quoziente si ha

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (1 + \ln x) - 1 \cdot 1/x}{(1 + \ln x)^2} = -\frac{1}{x(1 + \ln x)^2}.$$

Come composta (reciproco di $1 + \ln x$) si ha direttamente

$$f'(x) = -\frac{1}{(1 + \ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Domanda 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $\quad f(x) = 2\ln x - 3x$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = \frac{2}{x} - 3$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$\frac{2}{x} - 3 = 0 \quad ; \quad \frac{2}{x} = 3 \quad ; \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{(accettabile nella condizione di esistenza } x > 0\text{)}.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 16/11/2023

ESERCIZIO 1. Data la funzione

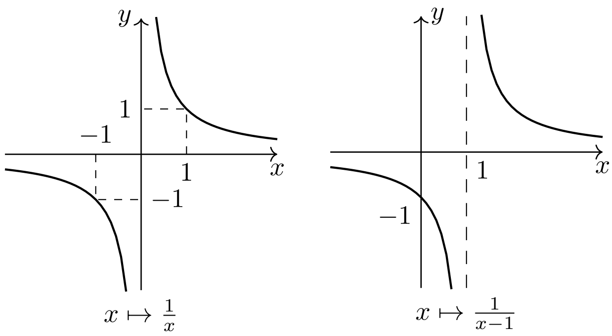
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ \ln(x+1) - 1 & x > 0 \end{cases}$$

se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Sulla base del grafico, si dica qual è l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume.

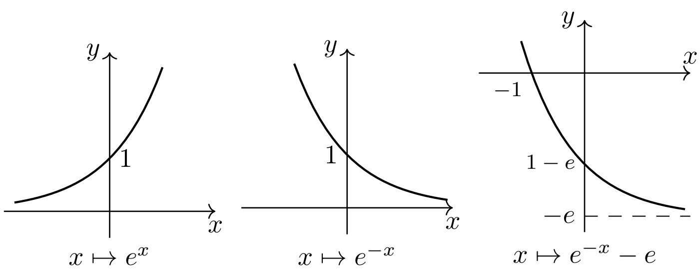
Si dica se la funzione è continua in tutto l'insieme di definizione. Si dica poi se la funzione f è derivabile in tutto l'insieme di definizione.

Si indichi infine, se esiste, un intervallo in cui alla funzione è applicabile il teorema degli zeri.

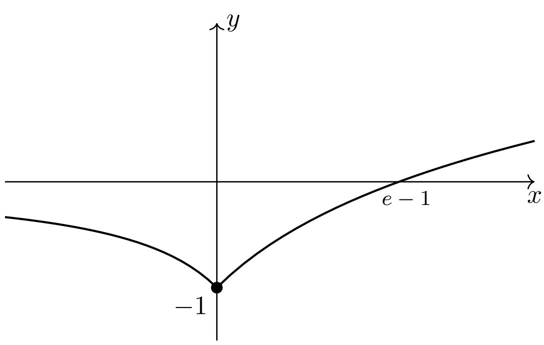
Le trasformazioni grafiche per la funzione $\frac{1}{x-1}$ sono:



Le trasformazioni della funzione esponenziale sono queste.



Il grafico della funzione f è questo.



Dal grafico possiamo dire che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, è l'intervallo $[-1, +\infty)$, dato che si ha

$$f(0) = -1 \text{ e il } \lim_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - 1) = +\infty.$$

Sempre dal grafico possiamo ricavare che la funzione è continua anche in $x = 0$. Verifichiamolo con la definizione.

$$f(0) = \frac{1}{0-1} = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (\ln(x+1) - 1) = \ln 1 - 1 = -1.$$

Vediamo la derivabilità: il punto da studiare è $x = 0$, dove la funzione, essendo continua, potrebbe essere anche derivabile. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & x > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0 (punto angoloso).

Passiamo ora all'ultima domanda, sul teorema degli zeri. Si chiede di indicare, se esiste, un intervallo in cui alla funzione è applicabile il teorema degli zeri. Attenzione che non si chiede di dire se il teorema è applicabile alla funzione nell'intervallo in cui è definita, cioè in $(-\infty, +\infty)$.

Il grafico può aiutare a rispondere. Il teorema è applicabile se sono verificate le sue ipotesi, e cioè di avere un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione è continua e in cui la funzione cambia segno, il che significa che in un estremo ha un certo segno e nell'altro il segno opposto. Vediamo che ad esempio in $x = 0$ la funzione è negativa e che basta allora trovare un punto in cui è positiva (f è continua dappertutto e quindi la continuità non è un problema in questo caso). Il secondo estremo dell'intervallo può essere un qualunque punto a destra del punto in cui f si annulla. Per trovare quest'ultimo basta porre

$$\ln(x+1) - 1 = 0 \quad ; \quad \ln(x+1) = 1 \quad ; \quad x + 1 = e \quad ; \quad x = e - 1 \ (\approx 1.72)$$

Quindi prendendo ad esempio come secondo estremo $x = 2$ siamo certi che $f(2) > 0$ (la calcolatrice fornisce $f(2) = \ln 3 - 1 \approx 0.0986$). Un possibile intervallo in cui il teorema degli zeri è applicabile è quindi $[0, 2]$.

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 16/11/2023

Domanda 1. Completare il quadrato nel polinomio $x^2 + x - \frac{1}{4}$

✎

$$x^2 + x - \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Domanda 2. Determinare in quale insieme è definita l'espressione $\dfrac{x}{\frac{1}{3} + \ln x}$

✎

Le condizioni per cui è definita l'espressione sono

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{3} + \ln x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1/3}. \end{cases}$$

L'insieme si può scrivere come $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, +\infty)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione $x - \dfrac{1}{x} = -1$

✎

Con la condizione $x \neq 0$ l'equazione equivale a

$$x - \frac{1}{x} + 1 = 0 \quad ; \quad \frac{x^2 - 1 + x}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione $e^{4x+3} \geq 2$

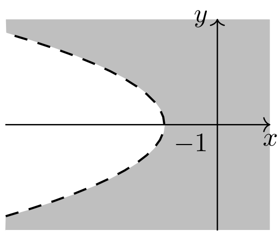
✎

Non ci sono condizioni di esistenza. La disequazione equivale a

$$e^{4x+3} \geq e^{\ln 2} \quad ; \quad 4x + 3 \geq \ln 2 \quad ; \quad x \geq \frac{\ln 2 - 3}{4}.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x + y^2 + 1 > 0$

✎



La disequazione equivale a $x > -y^2 - 1$. L'equazione corrispondente definisce una parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso sinistra e vertice nel punto $(-1, 0)$ (la parabola non incontra l'asse y). La regione individuata dalla disuguaglianza è quella a destra della parabola, parabola esclusa, rappresentata qui a fianco in grigio.

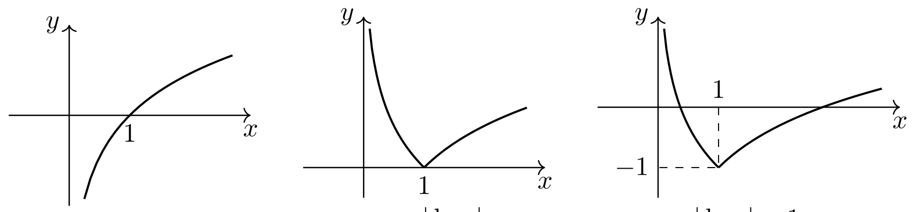
Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = |\ln x| - 1$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\ln x \quad \to \quad |\ln x| \quad \to \quad |\ln x| - 1.$$

I grafici sono nella pagina seguente.



$x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $x \mapsto |\ln x|$ $\qquad$ $x \mapsto |\ln x| - 1$

Domanda 7. Si trovi l'espressione della funzione inversa di $f(x) = \ln(x-1) - 1$

✎

Scrivendo $y = \ln(x-1) - 1$, dobbiamo ricavare x in funzione di y.

$$\ln(x-1) = y + 1 \quad ; \quad x - 1 = e^{y+1} \quad ; \quad x = 1 + e^{y+1}.$$

Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x-1} = \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}-1} = \frac{+\infty}{0-1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty.$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $\displaystyle f(x) = \frac{1}{1-\ln x}$

✎

Possiamo derivare la funzione in due modi, o come quoziente o come composta. Come quoziente si ha

$$f'(x) = \frac{0\cdot(1-\ln x) - 1\cdot(-1/x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}.$$

Come composta (reciproco di $1 - \ln x$) si ha direttamente

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-\ln x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(1-\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}.$$

Domanda 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = 3\ln x - 2x$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = \frac{3}{x} - 2$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$\frac{3}{x} - 2 = 0 \quad ; \quad \frac{3}{x} = 2 \quad ; \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{(accettabile nella condizione di esistenza } x > 0\text{)}.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 16/11/2023

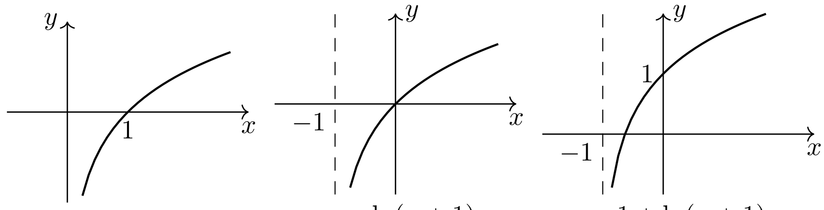
ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Sulla base del grafico, si dica qual è l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume.

Si dica se la funzione è continua in tutto l'insieme di definizione. Si dica poi se la funzione f è derivabile in tutto l'insieme di definizione.

Si indichi infine, se esiste, un intervallo in cui alla funzione è applicabile il teorema degli zeri.

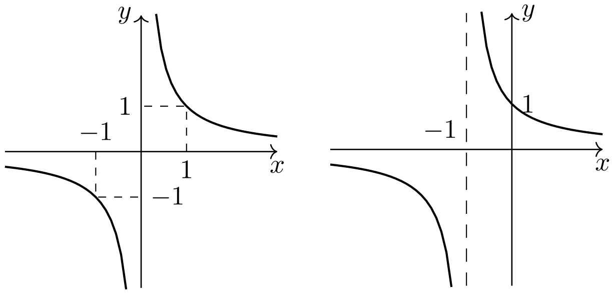
✎

Le trasformazioni per la funzione logaritmica sono:



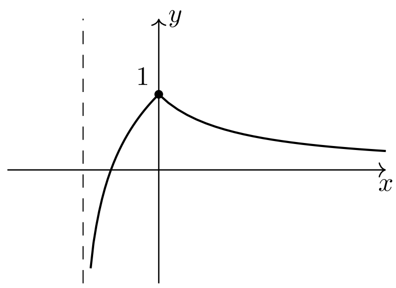
$x \mapsto \ln x$ $\quad$ $x \mapsto \ln(x+1)$ $\quad$ $x \mapsto 1 + \ln(x+1)$

Le trasformazioni grafiche per la funzione $\frac{1}{x+1}$ sono:



$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

Il grafico della funzione f è questo.



Dal grafico possiamo dire che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, è l'intervallo $(-\infty, 1]$, dato che si ha
$$f(0) = 1 \text{ e il } \lim_{x \to (-1)^+} 1 + \ln(x+1) = -\infty.$$

Sempre dal grafico possiamo ricavare che la funzione è continua anche in $x = 0$. Verifichiamolo con la definizione.
$$f(0) = 1 + \ln(0+1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Vediamo la derivabilità: il punto da studiare è $x = 0$, dove la funzione, essendo continua, potrebbe essere anche derivabile. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & x > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{(x+1)^2} = -1.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0 (punto angoloso).

Passiamo ora all'ultima domanda, sul teorema degli zeri. Si chiede di indicare, se esiste, un intervallo in cui alla funzione è applicabile il teorema degli zeri. Attenzione che non si chiede di dire se il teorema è applicabile alla funzione nell'intervallo in cui è definita, cioè in $(-1, +\infty)$.

Il grafico può aiutare a rispondere. Il teorema è applicabile se sono verificate le sue ipotesi, e cioè di avere un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione è continua e in cui la funzione cambia segno, il che significa che in un estremo ha un certo segno e nell'altro il segno opposto. Vediamo che ad esempio in $x = 0$ la funzione è positiva e che basta allora trovare un punto in cui è negativa (f è continua dappertutto e quindi la continuità non è un problema in questo caso). Il primo estremo dell'intervallo può essere un qualunque punto compreso tra -1 e il punto in cui f si annulla. Per trovare quest'ultimo basta porre

$$1 + \ln(x + 1) = 0 \quad ; \quad \ln(x + 1) = -1 \quad ; \quad x + 1 = e^{-1} \quad ; \quad x = \frac{1}{e} - 1 \ (\approx -0.63)$$

Quindi prendendo ad esempio come primo estremo $x = -0.7$ siamo certi che $f(-0.7) < 0$ (la calcolatrice fornisce $f(-0.7) = 1 + \ln 0.3 \approx -0.204$). Un possibile intervallo in cui il teorema degli zeri è applicabile è quindi $[-0.7, 0]$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 26/01/2024

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2}\bigg|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Domanda 3. Calcolare il prodotto interno (scalare) dei vettori $(-1, 2, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, -1, 2)$

✎

$$\left\langle(-1, 2, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, -1, 2)\right\rangle = -\tfrac{1}{2} - 2 + 1 = -\tfrac{3}{2}.$$

Domanda 4. Calcolare il complemento algebrico di posto $(2, 3)$ nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

✎

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -(-1) = 1.$$

Domanda 5. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

✎

La matrice inversa esiste in quanto il determinante è 6, diverso da zero. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

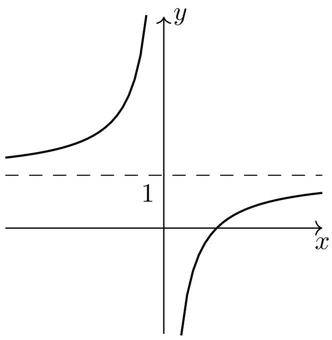
Domanda 6. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x, y) = x(y - 1)$

✎

Si tratta della curva del piano definita dall'equazione

$$f(x, y) = -1, \text{ cioè } x(y - 1) = -1.$$

È un'iperbole di centro $(0, 1)$, asintoti paralleli agli assi e con rami che stanno nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. La curva è rappresentata nella pagina seguente.



Domanda 7. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -\frac{1}{3}x^2 + 2xy - 3y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il determinate di A è zero. I minori principali di ordine 1 ($a_{11} = -1/3$ e $a_{22} = -3$) sono entrambi negativi e quindi la forma è semidefinita negativa.

Domanda 8. Calcolare la derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{x}$

✎

La derivata parziale è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{xy} \cdot y \cdot x - e^{xy} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{xy}}{x^2}(xy - 1).$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/01/2024

ESERCIZIO

Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\x-y+z\\-x+2y\end{pmatrix}$$

si dica tra quali spazi opera e se è invertibile. Si indichi la dimensione e una base della sua immagine. Si provi che il vettore $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di T e si trovi una sua controimmagine.

Si provi infine che i vettori dell'immagine di T sono gli (a,b,c) in cui $b=a-c$.

✎

La trasformazione va da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, cioè $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. La matrice che la rappresenta è

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}.$$

La trasformazione è invertibile se e solo se $\det A\neq 0$, quindi calcoliamo il determinante di A, ad esempio sviluppandolo rispetto alla prima riga.

$$\det A=-1\cdot 1+1\cdot 1=0.$$

Pertanto T non è invertibile.

La dimensione dell'immagine di T (ImT) è uguale al rango della matrice A, che non è 3 dato che il determinante si annulla. Possiamo dire che il rango è 2, ad esempio osservando che il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è diverso da zero. Quindi $\dim \mathrm{Im}T=2$.

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

Coerentemente con il minore appena considerato possiamo dire che una base di ImT è data dalla 1ª e 2ª colonna di A.

Per provare che il vettore $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di T si può procedere in molti modi. Si può ad esempio provare che l'equazione

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{, cioè il sistema lineare }\begin{cases}y+z=1\\x-y+z=0\\-x+2y=1\end{cases}$$

ha soluzioni. Oppure, e presento questa modalità, si può verificare che il vettore $(1,0,1)$ si può scrivere come combinazione lineare della base appena trovata sopra. Questo significa che

$$(1,0,1)=a(0,1,-1)+b(1,-1,2)$$

e si verifica facilmente che questo avviene con $a=b=1$. (Il vettore è quindi la somma dei due vettori di base.)

Così, senza risolvere l'intero sistema, abbiamo anche trovato una controimmagine di $(1,0,1)$: si tratta del vettore $(1,1,0)$.

Per provare infine che i vettori dell'immagine di T sono gli (a,b,c) in cui $b=a-c$ possiamo scrivere i vettori dell'immagine (combinazioni lineari dei vettori della base trovata) e verificare che per questi vale la condizione data, cioè che la seconda componente è la differenza della prima e della terza. I vettori dell'immagine sono i vettori del tipo

$$a(0,1,-1)+b(1,-1,2)=(b,a-b,-a+2b).$$

È immediato verificare che la seconda componente $(a-b)$ è la differenza della prima (b) e della terza $(-a+2b)$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 26/01/2024

Domanda 1. Scomporre il polinomio $x^3 + x^2 - 6x$ in fattori non ulteriormente scomponibili

✎

Raccogliendo intanto x si ha

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6).$$

Poi (ad esempio con la tecnnica "somma-prodotto") si ha

$$x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3).$$

Domanda 2. Riscrivere l'espressione $x^2e^{-2x} + xe^x$ raccogliendo x^2e^x

✎

$$x^2e^{-2x} + xe^x = x^2e^x\left(\frac{x^2e^{-2x}}{x^2e^x} + \frac{xe^x}{x^2e^x}\right) = x^2e^x\left(e^{-3x} + \frac{1}{x}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

✎

Si può fare ad esempio con un cambio di variabile. Ponendo $x^2 = t$ l'equazione diventa

$$t^2 - t - 2 = 0, \text{ cioè } (t + 1)(t - 2) = 0, \text{ che ha per soluzioni } t = -1 \text{ oppure } t = 2$$

Tornando alla variabile x, $x^2 = -1$ non dà soluzioni, mentre $x^2 = 2$ dà le soluzioni $x = \pm\sqrt{2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\log_2(1 + 2x) < 3$$

✎

Tenendo conto della condizione di esistenza ($1 + 2x > 0$), la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1 + 2x > 0 \\ 1 + 2x < 2^3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{7}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi date dall'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy - x < 0$

✎

La disequazione equivale a

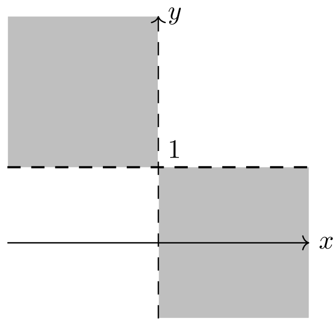
$$x(y - 1) < 0.$$

e quindi a

$$\begin{cases} x > 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$$

cioè

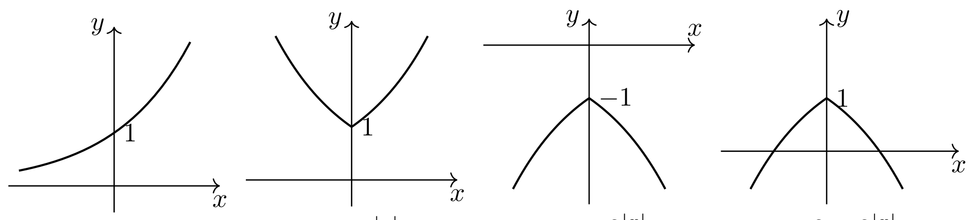
$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 1. \end{cases}$$



Si tratta della regione indicata in grigio nella figura qui a fianco.

Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = 2 - 2^{|x|}$

✎



$x \mapsto 2^x$ $x \mapsto 2^{|x|}$ $x \mapsto -2^{|x|}$ $x \mapsto 2 - 2^{|x|}$

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 - e^{1/x}}{\ln(1+x)}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 - e^{1/x}}{\ln(1+x)} = \dfrac{1 - e^{1/0^-}}{\ln(1+0^-)} = \dfrac{1 - e^{-\infty}}{\ln(1^-)} = \dfrac{1-0}{0^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

✎

Ricordando che $\ln^2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\ln(x + \frac{1}{x})\right)^2$, si ha

$$f'(x) = 2\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)e^x \,\mathrm{d}x$

✎

Risolviamo intanto l'integrale indefinito (l'insieme delle primitive di $(x+1)e^x$):

$$\int (x+1)e^x \,\mathrm{d}x \text{ (per parti) } = (x+1)e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = (x+1)e^x - e^x + c = xe^x + c.$$

Quindi

$$\int_{-1}^{1} (x+1)e^x \,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_{-1}^{1} = e + \frac{1}{e}.$$

Domanda 10. Calcolare il complemento algebrico di posto $(3,2)$ nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

✎

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -(-1) = 1.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/01/2024

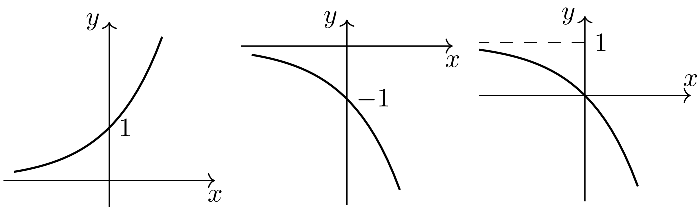
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x \le 0 \\ (x-1)^2 - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 2]$ e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.

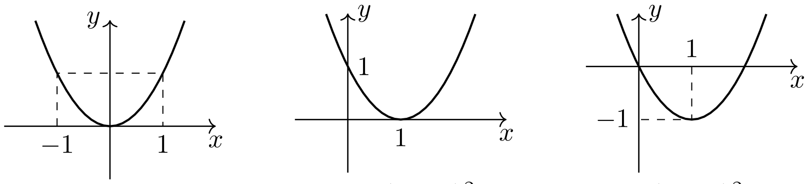
✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono queste.



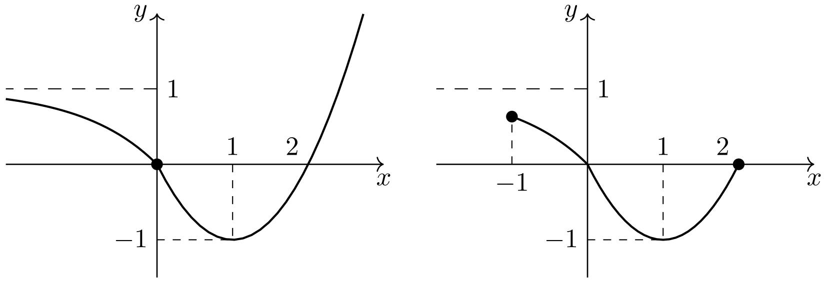
$x \mapsto e^x$ $\quad$ $x \mapsto -e^x$ $\quad$ $x \mapsto 1 - e^{-x}$

Le trasformazioni per la funzione polinomiale sono:



$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto (x-1)^2$ $\quad$ $x \mapsto (x-1)^2 - 1$

Il grafico della funzione f è qui sotto a sinistra (per quello a destra si aspetti più avanti).



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale, mentre a destra essa è una funzione polinomiale.

Si ha

$$f(0) = 1 - e^0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ((x-1)^2 - 1) = 1 - 1 = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in 0, e quindi in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \ne 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x & x < 0 \\ 2(x-1) & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(-e^x) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0 (si ha un punto angoloso).

Dal grafico possiamo dire che l'estremo superiore della funzione ($\sup f$) è $+\infty$ (o non esiste), mentre l'estremo inferiore ($\inf f$) è -1, che è anche il minimo della funzione.

Possiamo dire che il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $[-1,2]$ in quanto si tratta di un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua in tale intervallo.

La tesi del teorema è che esistono in $[-1,2]$ un punto di massimo e un punto di minimo. Dal grafico (vedi figura sopra a destra) si vede che il punto di massimo è $x_{\max} = -1$ (con valore massimo $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$) e il punto di minimo è $x_{\min} = 1$ (con valore minimo $f(1) = -1$).

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (0,1,-1,0) \quad , \quad v^2 = (-1,0,0,1) \quad , \quad v^3 = (1,1,-1,-1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ (di $\mathbb{R}^4$) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di $\mathcal{S}$? Si dica se il vettore $(-2,-1,1,2)$ appartiene a tale sottospazio $\mathcal{S}$.

✎

Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice (non quadrata)

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Non possiamo parlare di determinante di V. Dobbiamo usare il concetto di rango. I tre vettori sono linearmente indipendenti se il rango di V è 3, e invece sono dipendenti se il rango è minore di 3. Qui ci sono due modi di procedere: o cercare qualche dipendenza evidente oppure calcolare il rango attraverso il calcolo dei minori della matrice.

Non è difficile accorgersi che la prima riga è somma delle altre due e che quindi i tre vettori sono dipendenti. Alternativamente, il calcolo di tutti i minori del 3° ordine (che sono 4) porterebbe a trovare che sono tutti nulli e a concludere che il rango non è massimo.

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori è uguale al rango della matrice V. Il rango non è 3 e possiamo facilmente dire che è 2 osservando che (ad esempio) il minore del 2° ordine in alto a sinistra è diverso da zero. Quindi si ha $\dim \mathcal{S} = 2$.

Ora passiamo alla domanda "È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di $\mathcal{S}$?". Significa: si ottiene una base con tutte le possibilità di scelta di 2 vettori dei 3, cioè v^1, v^2, oppure v^1, v^3, oppure v^2, v^3? La condizione da verificare (sulla matrice) è se 2 righe hanno sempre rango 2. La cosa si verifica facilmente, osservando che in ogni caso nelle 2 righe c'è sempre un minore del 2° ordine diverso da zero.

Ultima domanda: il vettore $(-2,-1,1,2)$ appartiene a tale sottospazio $\mathcal{S}$? Molti modi per rispondere: cercare di scrivere questo nuovo vettore come combinazione lineare dei tre; meglio: cercare di scriverlo come combinazione lineare dei due vettori della base indicata sopra; formare una nuova matrice con (ad esempio) v^1, v^2 e il nuovo vettore. Vediamo quest'ultima modalità: scrivo la matrice

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo evitare di calcolare il rango: si vede facilmente che il nuovo vettore è $2v^2 - v^1$, quindi la risposta è affermativa.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = y - \sqrt{-xy}$$

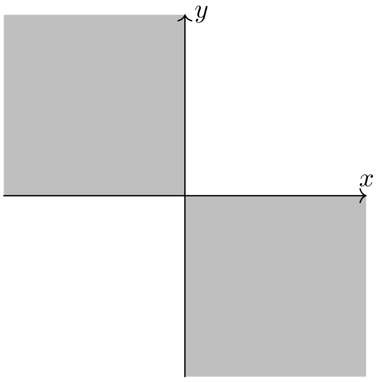
si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. È corretto affermare che la restrizione di f alla curva di equazione $x^3 + y = 0$ è il polinomio $-x^3 - x^2$? Si calcoli il gradiente di f. Si trovi infine in quali punti la funzione si annulla.

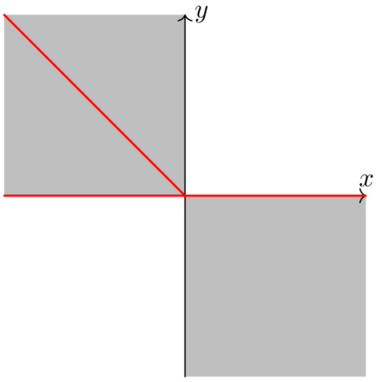
✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$-xy \geq 0 \quad \text{che equivale a} \quad xy \leq 0.$$

Si tratta del 2° oppure del 4° quadrante, punti di frontiera, cioè assi cartesiani, inclusi. L'insieme è chiuso, dato che appunto tutti i suoi punti di frontiera appartengono all'insieme. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura qui sotto a sinistra.





Troviamo la restrizione di f alla curva di equazione $x^3 + y = 0$. L'equazione si può esplicitare in $y = -x^3$. Quindi la restrizione è

$$f\Big|_{y=-x^3} = f(x, -x^3) = -x^3 - \sqrt{-x \cdot (-x^3)} = -x^3 - \sqrt{x^4} = -x^3 - x^2.$$

Quindi è vero, si tratta del polinomio $-x^3 - x^2$.

Le due derivate parziali di f sono

$$f'_x = -\frac{1}{2\sqrt{-xy}} \cdot (-y) = \frac{y}{2\sqrt{-xy}}$$

e

$$f'_y = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-xy}} \cdot (-x) = 1 + \frac{x}{2\sqrt{-xy}},$$

e quindi il gradiente è $\nabla f = (\frac{y}{2\sqrt{-xy}}\ ,\ 1 + \frac{x}{2\sqrt{-xy}})$.

Troviamo infine dove la funzione si annulla.[1]

$$y - \sqrt{-xy} = 0 \quad ; \quad y = \sqrt{-xy}. \quad ; \quad y^2 = -xy \quad ; \quad y^2 + xy = 0 \quad ; \quad y(y+x) = 0.$$

Le due alternative possibili sono quindi $y = 0$ oppure $y + x = 0$. Dobbiamo però verificare se queste sono accettabili. $y = 0$ certamente lo è dato che, sostituendo ad esempio nella seconda forma dell'equazione qui sopra, otteniamo $0 = 0$. Con $y + x = 0$, cioè $x = -y$, sostituendo si ottiene

$$y = \sqrt{y^2},$$

che è vera solo per $y \geq 0$. Quindi i punti accettabili della bisettrice del 2° e 4° quadrante sono solo quelli del 2° quadrante, come rappresentato in rosso nella figura sopra a destra.

[1] Attenzione qui: nei passaggi che seguono eleviamo al quadrato per eliminare la radice, ma così facendo potremmo modificare le soluzioni e quindi alla fine dovremo controllare che quelle trovate siano accettabili come soluzioni.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/02/2024

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^{1/2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} x\,e^x\,\mathrm{d}x$

✎

Risolviamo intanto l'integrale indefinito (per parti):

$$\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int_{-1}^{1} x\,e^x\,\mathrm{d}x = \Big(xe^x - e^x\Big|_{-1}^{1} = (e - e) - (-e^{-1} - e^{-1}) = \frac{2}{e}.$$

Domanda 3. Per quale valore di a i due vettori $(a, 1, -1)$ e $(-1, 2, 1)$ sono ortogonali?

✎

Il prodotto interno dei due vettori deve essere zero, quindi

$$\langle (a, 1, -1)\ ,\ (-1, 2, 1) \rangle = -a + 2 - 1 = 0, \text{ da cui } a = 1.$$

Domanda 4. Calcolare il prodotto (righe per colonne) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

✎

La matrice inversa esiste in quanto il determinante è -1, diverso da zero.

La matrice dei complementi algebrici è $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice aggiunta è $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

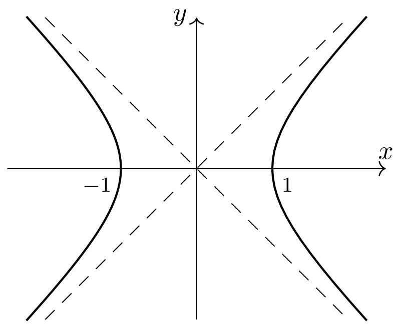
La matrice inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1. \end{pmatrix}$$

Domanda 6. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$

✎

Si tratta delle soluzioni dell'equazione $x^2 - y^2 = 1$, cioè i punti dell'iperbole raffigurata qui sotto.



Domanda 7. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + xy - y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinate di A è $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$. Il minore principale di NO di ordine 1 ($a_{11} = -\frac{1}{2}$) è negativo e quindi la forma è definita negativa.

Domanda 8. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = \dfrac{\ln(xy)}{y}$

✎

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{xy} \cdot x \cdot y - \ln(xy) \cdot 1}{y^2} = \frac{1 - \ln(xy)}{y^2}.$$

Quindi il gradiente è $\nabla f = (\frac{1}{xy}\ ,\ \frac{1-\ln(xy)}{y^2})$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 12/02/2024

ESERCIZIO Dati i vettori

$$v^1 = (1, 0, -1, 0) \quad , \quad v^2 = (0, -1, 1, 0) \quad , \quad v^3 = (0, 0, 0, 1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ (di $\mathbb{R}^4$) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di $\mathcal{S}$? Si dica se il vettore $(1, 1, 1, 1)$ appartiene a tale sottospazio $\mathcal{S}$.

✎

Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice (non quadrata)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Non possiamo parlare di determinante di V. Dobbiamo usare il concetto di rango. I tre vettori sono linearmente indipendenti se il rango di V è 3, e invece sono dipendenti se il rango è minore di 3.

Calcoliamo il rango di V. Se consideriamo il minore che si ottiene con le prime 3 colonne troviamo che è zero. Attenzione che non possiamo ancora concludere nulla. Se consideriamo il minore che si ottiene con le ultime 3 colonne troviamo che non è zero, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Quindi il rango di V è 3 e quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ generato dei tre vettori è uguale al rango della matrice V. Quindi si ha $\dim \mathcal{S} = 3$.

Ora passiamo alla domanda "È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di $\mathcal{S}$?". Significa: si ottiene una base con tutte le possibilità di scelta di 2 vettori dei 3, cioè v^1, v^2, oppure v^1, v^3, oppure v^2, v^3? La condizione da verificare (sulla matrice) è se 2 righe hanno sempre rango 2. La cosa si può verificare facilmente, osservando che in ogni caso nelle 2 righe c'è sempre un minore del 2° ordine diverso da zero.

Ultima domanda: il vettore $(1, 1, 1, 1)$ appartiene a tale sottospazio $\mathcal{S}$? Più modi per rispondere: cercare di scrivere questo nuovo vettore come combinazione lineare dei tre oppure formare una nuova matrice con i quattro vettori. Vediamo entrambe le modalità.

Attraverso le combinazioni lineari:

$$(1, 1, 1, 1) = a(1, 0, -1, 0) + b(0, -1, 1, 0) + c(0, 0, 0, 1), \text{ che equivale al sistema lineare } \begin{cases} a = 1 \\ -b = 1 \\ -a + b = 1 \\ c = 1, \end{cases}$$

che è evidentemente impossibile. Il nuovo vettore non si può scrivere come c.l. degli altri.

Con la matrice.

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante (sviluppo rispetto alla terza riga) è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1)) = 3.$$

Pertanto i quattro vettori sono linearmente indipendenti e quindi l'ultimo non dipende dai primi tre.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/02/2024

Domanda 1. Completare il quadrato nel polinomio $x^2 - 3x + 2$

✎

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Domanda 2. Riscrivere l'espressione $\dfrac{x}{e^x} + e^x$ raccogliendo $\dfrac{e^x}{x}$

✎

$$\frac{x}{e^x} + e^x = \frac{e^x}{x}\left(\frac{x/e^x}{e^x/x} + \frac{e^x}{e^x/x}\right) = \frac{e^x}{x}\left(\frac{x}{e^x}\cdot\frac{x}{e^x} + e^x\cdot\frac{x}{e^x}\right) = \frac{e^x}{x}\left(x^2e^{-2x} + x\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

✎

Con un raccoglimento e poi una scomposizione in fattori, l'equazione equivale a

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0 \quad \text{cioè} \quad x(x+1)(x-3) = 0$$

e quindi le soluzioni sono $x = 0 \ \vee \ x = -1 \ \vee \ x = 3$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{x}{x+1} < 1$$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq -1$, la disequazione equivale a

$$\frac{x}{x+1} - 1 < 0 \quad ; \quad \frac{x - x - 1}{x+1} < 0 \quad ; \quad -\frac{1}{x+1} < 0 \quad ; \quad \frac{1}{x+1} > 0.$$

Pertanto le soluzioni sono $x > -1$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + x < 0$

✎

La disequazione equivale a

$$x(y+1) < 0$$

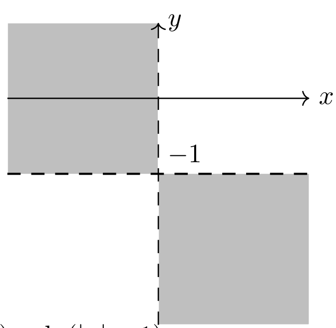
e quindi a

$$\begin{cases} x > 0 \\ y + 1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > -1. \end{cases}$$

L'insieme è rappresentato in grigio qui a fianco.



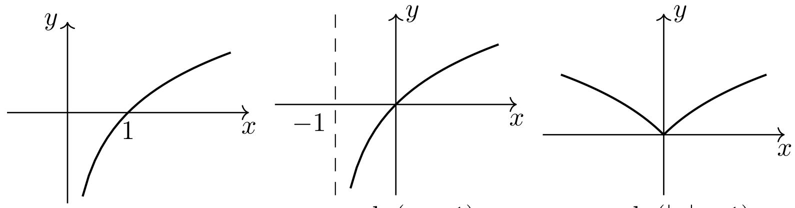
Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = \ln(|x| + 1)$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è questa:

$$\ln x \quad \to \quad \ln(x+1) \quad \to \quad \ln(|x|+1).$$

I grafici corrispondenti sono nella pagina seguente.



$x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $x \mapsto \ln(x+1)$ $\qquad$ $x \mapsto \ln(|x|+1)$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1+e^x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1+e^x} = \frac{\ln(1+\frac{1}{-\infty})}{1+e^{-\infty}} = \frac{\ln(1+0)}{1+0} = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$

✎

Ricordando che $D(\frac{1}{x^2}) = D(x^{-2}) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$, si ha

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(0 + \frac{2}{x^3}\right) = \frac{4}{x^3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^e x\,\ln x\,\mathrm{d}x$

✎

Risolviamo intanto l'integrale indefinito (per parti):

$$\int x\,\ln x\,\mathrm{d}x = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Quindi

$$\int_1^e x\,\ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Domanda 10. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

✎

La matrice inversa esiste in quanto il determinante è -1, diverso da zero. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/02/2024

Domanda 1. Scrivere il polinomio $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ come un quadrato

✎

Direttamente
$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$$
oppure
$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Domanda 2. Riscrivere l'espressione $\dfrac{e^{-x}}{x} + \dfrac{x^2}{e^x}$ raccogliendo $\dfrac{x}{e^x}$

✎

$$\frac{e^{-x}}{x} + \frac{x^2}{e^x} = \frac{x}{e^x}\left(\frac{e^{-x}/x}{x/e^x} + \frac{x^2/e^x}{x/e^x}\right) = \frac{x}{e^x}\left(\frac{e^{-x}}{x}\cdot\frac{e^x}{x} + \frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x^2} + x\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

✎

Con un raccoglimento e poi una scomposizione in fattori, l'equazione equivale a
$$x(x^2 - x - 2) = 0 \quad \text{cioè} \quad x(x+1)(x-2) = 0$$
e quindi le soluzioni sono $x = 0 \ \vee \ x = -1 \ \vee \ x = 2$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione
$$e^{2x} - e^x - 2 < 0$$

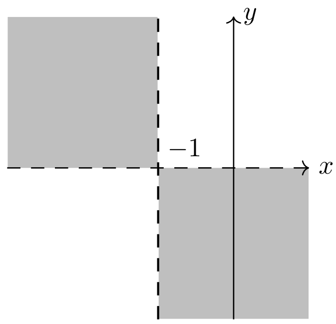
✎

Si può ricondurla ad una di secondo grado con un cambio di variabile. Ponendo $e^x = t$ la disequazione diventa
$$t^2 - t - 2 < 0, \text{ cioè } (t+1)(t-2) < 0, \text{ che ha per soluzioni } -1 < t < 2.$$
Tornando alla variabile x si ha $-1 < e^x < 2$. Dato che $e^x > -1$ è sempre vera, resta $e^x < 2$, che ha per soluzioni $x < \ln 2$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + y < 0$

✎

La disequazione equivale a
$$(x+1)y < 0$$
e quindi a
$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$
cioè
$$\begin{cases} x > -1 \\ y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ y > 0. \end{cases}$$
L'insieme è rappresentato in grigio qui a fianco.



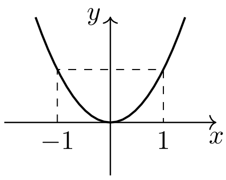
Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = (|x| + 1)^2$

✎

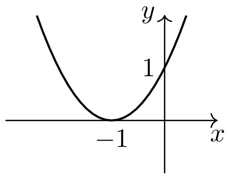
Una sequenza corretta di trasformazioni è questa:

$$x^2 \quad \to \quad (x+1)^2 \quad \to \quad (|x|+1)^2.$$

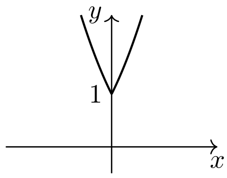
Ecco i grafici corrispondenti.



$x \mapsto x^2$



$x \mapsto (x+1)^2$



$x \mapsto (|x|+1)^2$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x} - 1}{\ln(1+x)}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x} - 1}{\ln(1+x)} = \frac{e^{-1/0^+} - 1}{\ln(1+0^+)} = \frac{e^{-\infty} - 1}{\ln(1^+)} = \frac{0-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \left(1 - e^{-x^2}\right)^2$

✎

$$f'(x) = 2\left(1 - e^{-x^2}\right) \cdot \left(0 - (e^{-x^2}) \cdot (-2x)\right) = 4xe^{-x^2}\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\, e^x \,\mathrm{d}x$

✎

Risolviamo intanto l'integrale indefinito (per parti):

$$\int x\, e^x \,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int_{-1}^{1} x\, e^x \,\mathrm{d}x = \left(xe^x - e^x\right|_{-1}^{1} = (e - e) - (-e^{-1} - e^{-1}) = \frac{2}{e}.$$

Domanda 10. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

✎

La matrice inversa esiste in quanto il determinante è -1, diverso da zero. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{La matrice aggiunta è} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1. \end{pmatrix}$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 12/02/2024

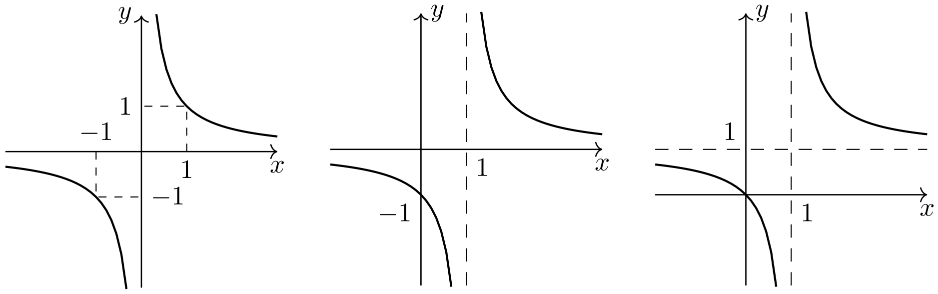
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x-1} & x \le 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$ e si dica se comunque la tesi è vera.

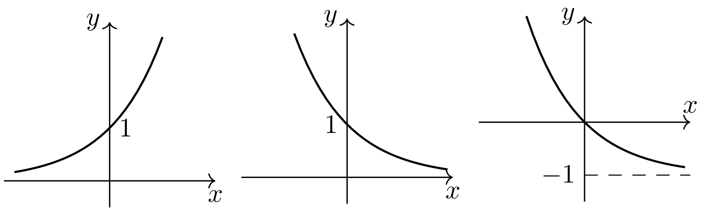
✎

Le trasformazioni grafiche per la funzione potenza sono:



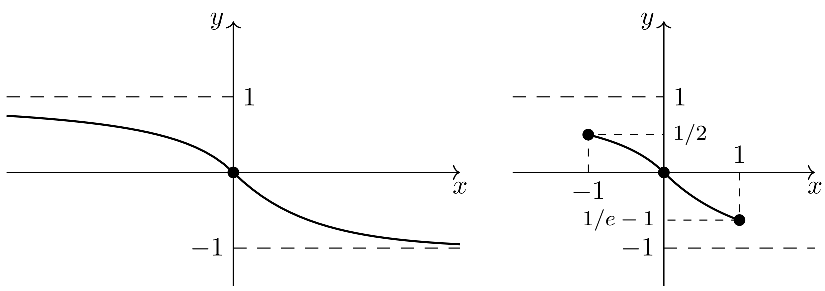
$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1}$

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono queste.



$x \mapsto e^x$ $\qquad$ $x \mapsto e^{-x}$ $\qquad$ $x \mapsto e^{-x} - 1$

Il grafico della funzione f è qui sotto a sinistra (per quello a destra si aspetti più avanti).



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione potenza. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione potenza, mentre a destra essa è una funzione esponenziale.

Si ha

$$f(0) = 1 + \frac{1}{0-1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^{-x} - 1) = e^0 - 1 = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in 0, e quindi in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \\ -e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\tfrac{1}{(x-1)^2}\right) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-e^{-x}) = -1.$$

Quindi la funzione è derivabile anche in 0.

Dal grafico possiamo dire che l'estremo superiore della funzione ($\sup f$) è 1, mentre l'estremo inferiore ($\inf f$) è -1. Non si tratta né di massimo né di minimo dato che la funzione non assume questi valori.

Possiamo dire che il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $[-1, 1]$ in quanto si tratta di un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua in tale intervallo.

La tesi del teorema è che esistono in $[-1, 1]$ un punto di massimo e un punto di minimo. Dal grafico (vedi figura sopra a destra) si vede che il punto di massimo è $x_{\max} = -1$ (con valore massimo $f(-1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$) e il punto di minimo è $x_{\min} = 1$ (con valore minimo $f(1) = \frac{1}{e} - 1$).

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se il sistema ha soluzioni, in base al teorema di Rouché-Capelli. In caso affermativo si trovino tutte le soluzioni. Si risolva poi il sistema omogeneo associato e si indichino la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

✎

Abbiamo già le matrici del sistema che, per esteso, con variabili x, y, z, t, può essere scritto come

$$\begin{cases} t = 1 \\ x - z = 1 \\ -y + z = 1. \end{cases}$$

Il teorema di Rouché-Capelli dice che il sistema ha almeno una soluzione se e solo se il rango della matrice A è uguale al rango della matrice $A|b$.

Calcoliamo il rango di A. Se consideriamo il minore che si ottiene con le prime 3 colonne troviamo che è zero. Attenzione che non possiamo ancora concludere nulla. Se consideriamo il minore che si ottiene con le ultime 3 colonne troviamo che non è zero, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Quindi il rango di A è 3. A questo punto è immediato dire che anche il rango di $A|b$ è 3, dato che aggiungendo una colonna ad A il rango non può aumentare.[2] Pertanto, in base al teorema di Rouché-Capelli, possiamo affermare che il sistema ha soluzioni.

È richiesto ora di trovare tutte le soluzioni del sistema. Data la presenza di molti zeri nella matrice A, anziché utilizzare il metodo generale basato sulla riduzione del sistema ad un sistema di Cramer con parametri, possiamo più rapidamente risolvere il sistema per sostituzione.

$$\begin{cases} t = 1 \\ x - z = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 + z \\ y = z - 1, \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare che le soluzioni sono tutti i vettori del tipo

$$\big(1 + z, z - 1, z, 1\big), \text{ con } z \in \mathbb{R}.$$

[2] Si ricordi che in generale $r(A|b) \geq r(A)$, dato che aggiungendo una colonna il rango non può diminuire. Si osservi anche che i minori di A sono anche minori di $A|b$.

Passiamo al sistema omogeneo associato al sistema $Ax = b$: si tratta del sistema $Ax = 0$. Per sisolverlo non c'è bisogno di rifare quanto appena fatto, dato che le soluzioni del sistema non omogeneo "contengono" sempre anche quelle dell'omogeneo associato. Se scriviamo le soluzioni appena trovate come

$$\big(1+z, z-1, z, 1\big) = \big(1, -1, 0, 1\big) + z\big(1, 1, 1, 0\big),$$

il vettore $(1, -1, 0, 1)$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo e i vettori $z(1, 1, 1, 0)$, con $z \in \mathbb{R}$, sono tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

La dimensione di questo spazio è 1 (un solo vettore le genera tutte) e una base è data dal vettore $(1, 1, 1, 0)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

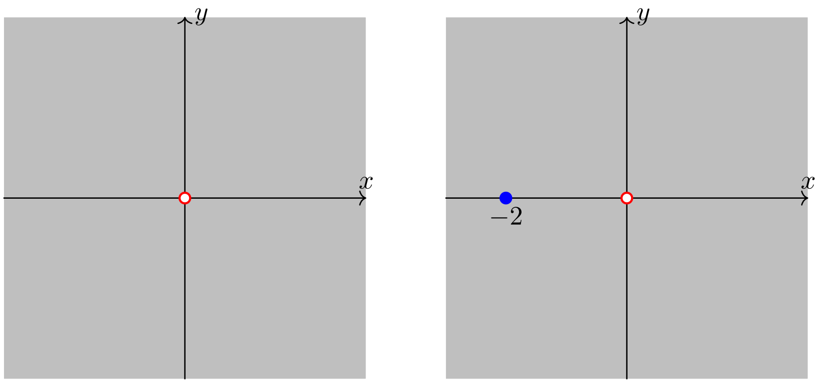
$$f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f e si trovi l'unico punto stazionario. Si scriva la restrizione all'asse y, dove possibile, e si trovino i punti sull'asse dove la funzione si annulla.

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$x^2 + y^2 > 0 \quad \text{che, attenzione, equivale a} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Si tratta quindi di tutto il piano ad eccezione dell'origine. L'insieme è aperto, dato che l'unico punto di frontiera (l'origine) non appartiene all'insieme. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura qui sotto a sinistra.



Il gradiente di f. Le due derivate parziali sono

$$f'_x = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad f'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

e quindi il gradiente è $\nabla f = \left(1 + \frac{2x}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$.

Troviamo l'unico punto stazionario, ponendo le due derivate parziali uguali a zero.

$$\begin{cases} 1 + \frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ \frac{2y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata solo con $y = 0$ e, sostituendo nella prima, si ha

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 + \frac{2x}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 1 + \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Il punto stazionario è quindi $(-2, 0)$ (accettabile nel dominio), indicato in blu nella figura sopra a destra.

Successiva domanda: la restrizione di f all'asse y, dove possibile. Osservando che non tutto l'asse y è contenuto nel dominio, possiamo scrivere

$$f\Big|_{x=0} = \ln(y^2) = 2\ln|y|, \text{ con } y \neq 0.$$

Ultima domanda: troviamo i punti sull'asse (y) dove la funzione si annulla. Dobbiamo anbnullare la restrizione appena calcolata, cioè

$$\ln(y^2) = 0, \text{ cioè } y^2 = 1, \text{ cioè } y = \pm 1 \text{ e quindi si tratta dei punti } (0, 1) \text{ e } (0, -1).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 12/02/2024

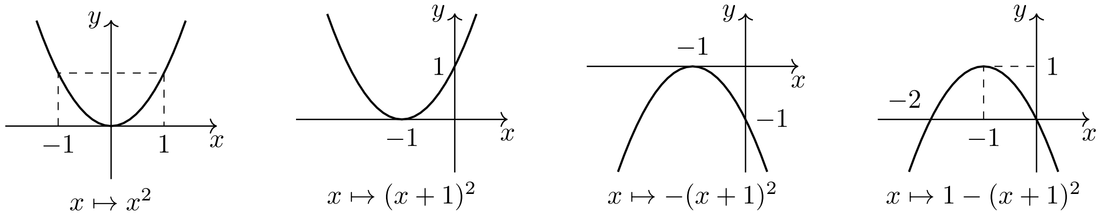
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x+1)^2 & x \le 0 \\ \frac{1}{x+1} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

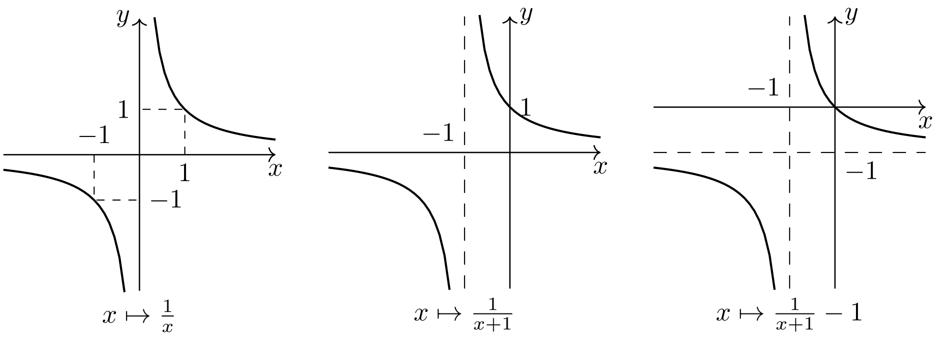
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 1]$ e si dica se comunque la tesi è vera.

✎

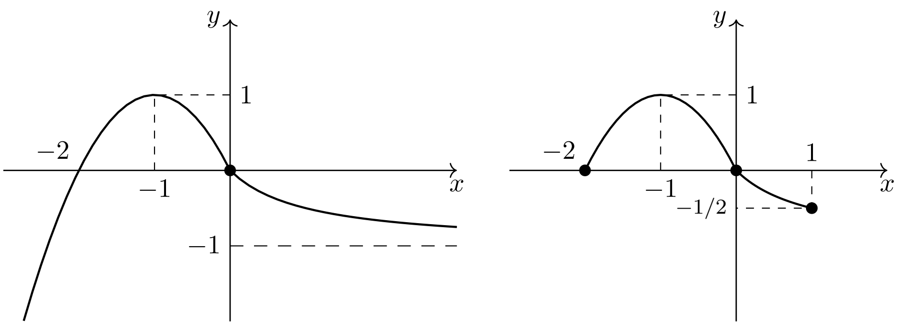
Le trasformazioni grafiche per la funzione polinomiale sono:



Le trasformazioni grafiche per la funzione potenza sono:



Il grafico della funzione f è qui sotto a sinistra (per quello a destra si aspetti più avanti).



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione potenza. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra essa è una funzione potenza.

Si ha

$$f(0) = 1-(0+1)^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\tfrac{1}{x+1} - 1) = \tfrac{1}{0+1} - 1 = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in 0, e quindi in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & x < 0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2(x+1)) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-\tfrac{1}{(x+1)^2}) = -1.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0.

Dal grafico possiamo dire che l'estremo superiore della funzione ($\sup f$) è 1, che è anche massimo, mentre l'estremo inferiore ($\inf f$) è $-\infty$.

Il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $[-2, 1]$ in quanto si tratta di un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua in tale intervallo.

La tesi del teorema è che esistono in $[-2, 1]$ un punto di massimo e un punto di minimo. Dal grafico (vedi figura sopra a destra) si vede che il punto di massimo è $x_{\max} = -1$ (con valore massimo $f(-1) = 1$) e il punto di minimo è $x_{\min} = 1$ (con valore minimo $f(1) = \frac{1}{1+1} - 1 = -\frac{1}{2}$).

ESERCIZIO 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva l'espressione della trasformazione lineare T rappresentata da A. Si dica se T è invertibile. Si trovi la dimensione dell'immagine di T e si indichi una sua base. Si trovino infine tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ in cui T si annulla.

✎

L'espressione della trasformazione lineare T rappresentata da A è

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ -y + z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{e possiamo precisare che } T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3.$$

T non è invertibile: le sole trasformazioni lineari che possono essere invertibili sono quelle che operano da uno spazio in se stesso, e quindi quelle che hanno una matrice di rappresentazione quadrata.

La dimensione dell'immagine di T è data dal rango della matrice di rappresentazione, cioè il rango di A. Se consideriamo il minore che si ottiene con le prime 3 colonne troviamo che è zero. Attenzione che non possiamo ancora concludere nulla. Se consideriamo il minore che si ottiene con le ultime 3 colonne troviamo che non è zero, infatti

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1, \text{ quindi il rango di } A\text{, cioè la dimensione dell'immagine di } T\text{, è 3.}$$

Dato che il codominio è $\mathbb{R}^3$, si tratta di *tutto* lo spazio $\mathbb{R}^3$.

Per indicare una base dell'immagine di T la cosa più semplice è dire: la base fondamentale di $\mathbb{R}^3$, cioè

$$u^1 = (1, 0, 0)\ ,\ u^2 = (0, 1, 0)\ ,\ u^3 = (0, 0, 1).$$

Si poteva però anche rispondere ad esempio con le ultime 3 colonne di A.

Infine tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ in cui T si annulla. Basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ t = 0, \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare che le soluzioni sono tutti i vettori del tipo

$$\big(z, -z, z, 0\big), \text{ con } z \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = xy + \ln(-xy)$$

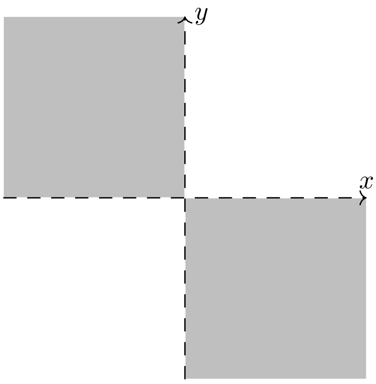
si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f e si trovino tutti i punti stazionari, provando che sono infiniti. Si verifichi che la funzione è costante su tutti i punti stazionari. Si dica infine se nel punto stazionario $(-1, 1)$ le condizioni del 2º ordine sono sufficienti per stabilire la sua natura.

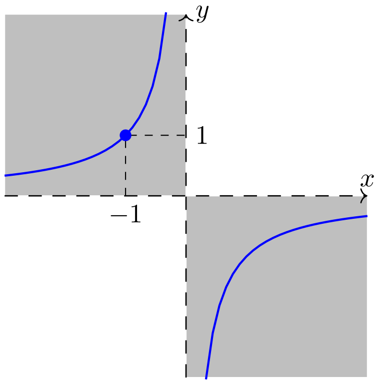
✎

La sola condizione per l'esistenza della funzione f è data da

$$-xy > 0 \quad \text{che equivale a} \quad xy < 0.$$

Si tratta del 2º oppure del 4º quadrante, punti di frontiera, cioè assi cartesiani, esclusi. L'insieme è aperto, dato che i suoi punti di frontiera, cioè i punti sugli assi, non appartengono all'insieme. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella figura qui sotto a sinistra.





Il gradiente di f. Le due derivate parziali sono

$$f'_x = y + \frac{1}{-xy} \cdot (-y) = y + \frac{1}{x}$$

e

$$f'_y = x + \frac{1}{-xy} \cdot (-x) = x + \frac{1}{y},$$

e quindi il gradiente è $\nabla f = (x + \frac{1}{y}\ ,\ y + \frac{1}{x})$.
Troviamo i punti stazionari, ponendo le due derivate parziali uguali a zero.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 0 \\ y + \frac{1}{x} = 0. \end{cases}$$

Entrambe le equazioni portano all'unica equazione $xy + 1 = 0$, cioè $xy = -1$. Si tratta dell'equazione di un'iperbole e pertanto i punti stazionari sono infiniti. Sono indicati in blu nella figura sopra a destra.

Verifichiamo ora che la funzione è costante su tutti i punti stazionari trovati. Basta scrivere la restrizione di f ai punti dell'iperbole.

$$f\Big|_{xy=-1} = -1 + \ln 1 = -1, \text{ quindi la funzione è costante su tali punti.}$$

Ora viene chiesto di studiare la natura di uno dei punti stazionari trovati, il punto $(-1, 1)$. Dobbiamo usare le condizioni del 2º ordine, cioè il gradiente secondo (matrice Hessiana). Calcoliamolo:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 1 \\ 1 & -1/y^2 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \nabla^2 f(-1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una matrice simmetrica semidefinita negativa (determinante nullo e minori principali del 1º ordine negativi). Il fatto che sia semidefinita non consente di concludere nulla, quindi le condizioni del 2º ordine non sono sufficienti per stabilire la natura del punto.