Cognome		
Nome		
Matricola	VR	

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA

Vicenza, 10/02/2017

II parte

Questa è la II parte della prova conclusiva scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

Esercizio 1 (punti 5). Data la funzione

$$f(x) = xe^{2x}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $[0,1]$. Si calcoli infine, con la definizione, l'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 2 (punti 5). Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -x+y=3 \\ x-y-2z=1 \\ -2x+2y+2z=2. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esercizio 3 (punti 5). Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1-e^x} + \ln y$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se i punti di frontiera appartengono o no al dominio stesso. Si calcoli il gradiente di f e si dica se possono esserci punti stazionari. Si dica se il punto $(0,1)$ sta sulla curva di livello 1 di f.

Quesito 1. Quali proprietà di una funzione reale f garantiscono la sua integrabilità (secondo Riemann) in un intervallo $[a,b]$?

Quesito 2. Si enunci un criterio di convergenza per integrali generalizzati.

Quesito 3. Che cosa significa che una trasformazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare?

Quesito 4. Si enunci il teorema di Cramer.

Quesito 5. Si dia la definizione di derivata parziale di una funzione $f(x,y)$ rispetto ad x nel punto (x_0,y_0).