COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 19/01/2018
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & -\ln 2 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 & 0 < x \leq 2, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile nell'intervallo $(-\ln 2, 2)$ (si verifichi anche con la definizione se c'è la continuità nel punto critico). Si dica se è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f nell'intervallo $[-\ln 2, 2]$ e si dica comunque, sulla base del grafico, se la tesi è vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+z \\ x-y \end{pmatrix}$$

si provi che essa è invertibile e si trovi l'espressione della trasformazione inversa. Si trovino tutti i vettori v tali che $T(v) = u^1$, dove u^1 è il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$. Si dica se esistono in $\mathbb{R}^3$ vettori non nulli che T trasforma nel vettore nullo.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\big(1-y\big) \cdot \ln\big(1-xy\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla e in quali è positiva. Si dica infine se l'origine è punto stazionario per la funzione f.

QUESITO 1. Si enunci il teorema degli zeri.

QUESITO 2. Si commenti l'affermazione: se f è continua in x_0 allora f è derivabile in x_0. (Si dica se l'affermazione è vera o falsa e, nel secondo caso, si fornisca un controesempio.)

QUESITO 3. Si dia la definizione di funzione integrale di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$.

QUESITO 4. Si dia una definizione di sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

QUESITO 5. Che cosa significa per definizione che una forma quadratica è definita positiva?