

COGNOME																
NOME																
MATRICOLA												VR				

**ESAME DI MATEMATICA**  
**Vicenza, 05/02/2018**  
**II parte**

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = 2x + \ln(1 - x)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di  $f$  e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di  $f$ . È vero che la retta tangente al grafico di  $f$  nel punto di ascissa  $x_0 = 0$  è la bisettrice del primo e terzo quadrante?

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y^2) + \ln(y - 2x)$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si dica se nel punto  $(-1, -1)$  la funzione si annulla e se il punto è stazionario. Si scriva infine la restrizione di  $f$  alla parte di assi cartesiani contenuti nel dominio.

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: una funzione  $f : A \rightarrow B$  è iniettiva se ad ogni elemento dell'insieme  $A$  essa associa un unico elemento dell'insieme  $B$ . (Si dica se l'affermazione è vera o falsa e, nel secondo caso, si fornisca un controesempio.)

QUESITO 2. Si enunci il teorema di Lagrange.

QUESITO 3. Si indichino almeno due proprietà che garantiscono l'integrabilità secondo Riemann di una funzione in un intervallo  $[a, b]$ .

QUESITO 4. Che cosa significa che i vettori  $v^1, v^2, \dots, v^k$  sono linearmente indipendenti?

QUESITO 5. Si indichi una condizione sufficiente per poter affermare che un punto stazionario  $(x_0, y_0)$  è di massimo per una funzione di due variabili.