COGNOME | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | |

MATRICOLA VR | | | | | | |

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA

Vicenza, 05/02/2018

II parte

Questa è la II parte della prova conclusiva scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = x\, e^{-x^2}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x$. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $[-1, 1]$. Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x$ converge o diverge.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(1 - x^2 + y^2\right) + \ln\left(y - 2x\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio, precisando se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Si dica se nel punto $(-1, -1)$ la funzione si annulla e se il punto è stazionario. Si scriva infine la restrizione di f alla parte di assi cartesiani contenuti nel dominio.

QUESITO 1. Si indichino almeno due proprietà che garantiscono l'integrabilità secondo Riemann di una funzione in un intervallo $[a, b]$.

QUESITO 2. Si enunci un teorema di confronto per la convergenza di un integrale di Riemann generalizzato.

QUESITO 3. Che cosa significa che i vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono linearmente indipendenti?

QUESITO 4. Si enunci il teorema di Rouché-Capelli.

QUESITO 5. Si indichi una condizione sufficiente per poter affermare che un punto stazionario (x_0, y_0) è di massimo per una funzione di due variabili.