COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 03/09/2018
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & -2 \le x \le 0 \\ e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari e si dica qual è l'immagine della funzione. Si indichino i possibili punti in cui la funzione non è derivabile e lo si dimostri analiticamente. Si dica infine, sulla base del grafico, quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ e le si determinino analiticamente.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = \big(1, 0, -1, 0\big) \quad , \quad v^2 = \big(-1, 1, 0, 0\big) \quad \text{e} \quad v^3 = \big(0, 1, -1, 1\big).$$

Si verifichi, usando la definizione, che essi sono linearmente indipendenti. Si trovi conferma del risultato precedente utilizzando il concetto di rango. Detto S il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori, si dica qual è la dimensione di S. Si dica infine se il vettore $v = (1, 0, -1, 1)$ appartiene o no ad S.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\big(1 - x^2 - y\big) + \ln\big(y + 1\big),$$

si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si trovi il punto stazionario di f. Si verifichi che f non è mai positiva sugli assi cartesiani. (Suggerimento: si scrivano le restrizioni di f agli assi e si ricordi che $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.) Si dimostri che f non è positiva in nessun punto del dominio.

QUESITO 1. Qual è la condizione per poter dire che tra due insiemi A e B è definita una funzione f ? (Cioè per poter scrivere $f : A \to B$.)

QUESITO 2. Che cosa si intende con punto di minimo locale di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

QUESITO 3. Si enunci uno dei teoremi sulle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.

QUESITO 4. Che cosa afferma il teorema di Cramer?

QUESITO 5. Che cosa è per definizione la derivata parziale rispetto ad y di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_0, y_0) ?