COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 18/01/2019
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x+1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ e^x - 1 & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile nell'intervallo $(-2, 1)$. Si dica se è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f nell'intervallo $[-2, 1]$ e si dica comunque, sulla base del grafico, se la tesi è vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2z \\ y-z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

si provi che essa non è invertibile. Si determini la dimensione e una possibile base della sua immagine. Si dica se esistono vettori v tali che $T(v) = u^3 - u^2$, dove questi ultimi sono il secondo e il terzo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$. Si scriva infine l'espressione della trasformazione composta di T con se stessa, cioè della trasformazione $T(T(v))$.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{1+xy}{1-y^2}\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si provi che c'è un solo punto stazionario di f e lo si determini. Attraverso lo studio del segno di f si stabilisca la natura del punto stazionario, cioè se è di massimo, di minimo o né di massimo né di minimo.

QUESITO 1. Si enunci il teorema degli zeri.

QUESITO 2. Si commenti l'affermazione: se f è continua in x_0 allora f è derivabile in x_0. (Si dica se l'affermazione è vera o falsa e, nel secondo caso, si fornisca un controesempio.)

QUESITO 3. Si dia la definizione di primitiva di una funzione $f(x)$ in un intervallo.

QUESITO 4. Si dia una definizione di sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

QUESITO 5. Che cosa significa per definizione che una forma quadratica è definita positiva?