COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 25/08/2021
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -\ln x & x > 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica perché è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f nell'intervallo $\left[-1, e\right]$ e infine, aiutandosi anche con il grafico ottenuto in precedenza, si dica in quali punti è verificata la tesi del teorema.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

si provi che $(0, 1, 0, -1)$ e $(0, 0, -1, -1)$ sono due soluzioni del sistema. Si dica perché si può allora affermare che ci sono infinite soluzioni. Si determini poi la dimensione del sottospazio delle soluzioni. Si indichi infine una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{xy - 1}{x}\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio e in quali punti la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di f e si dica se esistono punti stazionari. Si scriva infine la restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio.

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: "una funzione continua in x_0 può non essere derivabile in x_0" e si fornisca un esempio pertinente.

QUESITO 2. Si dia il significato geometrico di derivata di una funzione f in un punto x_0.

QUESITO 3. Si dica che cosa significa che la funzione g è primitiva della funzione f in un certo intervallo.

QUESITO 4. Si commenti la seguente affermazione: il rango di una matrice A (quadrata) $n \times n$ è $n - 1$ se il determinante di A si annulla.

QUESITO 5. Si fornisca una condizione che permette di affermare che una forma quadratica in due variabili è semidefinita positiva.