COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 11/02/2022
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Si indichi un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f. Si dica se la tesi del teorema è vera (e in quali eventuali punti) nell'intervallo $[-2, 1]$.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y - 3z - t = 1 \end{cases}$$

si dica, in base al teorema di Rouché–Capelli, se ha soluzioni oppure no. Si dica poi se il vettore $(1, 2, 2, -3)$ è oppure no una delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si trovino infine tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato, indicando una base delle soluzioni stesse.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x \ln\big(1 + xy\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si trovino i punti stazionari di f, provando che sono infiniti; qual è il valore di f lungo tali punti? Si studi il segno della funzione e da questo si deduca la natura dei punti stazionari trovati in precedenza.

QUESITO 1. Si enunci il teorema di Lagrange (del valor medio).

QUESITO 2. Si dica in che cosa consiste la regola (teorema) di De L'Hôpital.

QUESITO 3. Perché l'integrale indefinito di una funzione deve prevedere una costante arbitraria?

QUESITO 4. Si dica quando possiamo affermare che il rango di una matrice 3×4 è 2.

QUESITO 5. Fornire le condizioni sui minori della matrice per dire che una forma quadratica di 3 variabili è semidefinita positiva.