COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 26/01/2023
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -\ln x & x > 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si indichino i punti di massimo e di minimo di f nell'intervallo $[-1, e]$. Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i vettori

$$v^1 = (1, -2, 1) \quad , \quad v^2 = (-2, 4, 1) \quad , \quad v^3 = (1, -2, 4)$$

si provi che non sono una base di $\mathbb{R}^3$. Qual è la dimensione del sottospazio da essi generato? Si sostituisca v^3 con un vettore u in modo che v^1, v^2, u formino una base di $\mathbb{R}^3$. Si trovi infine un vettore non nullo che sia ortogonale a v^1 e v^2.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x + y - \ln\big(xy\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si trovi l'unico punto stazionario di f e si determini la sua natura con le condizioni del secondo ordine. Si scriva infine la restrizione di f alla curva di equazione $xy = 1$ e si dica qual è il segno della funzione lungo tale curva.

QUESITO 1. Si enunci il teorema degli zeri.

QUESITO 2. Si fornisca l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f (una variabile) in un punto x_0.

QUESITO 3. Si dica come avviene in generale il calcolo di un integrale del tipo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

QUESITO 4. Che cosa è una base di uno spazio vettoriale?

QUESITO 5. Che cosa è la funzione Lagrangiana e per quale problema viene utilizzata?