Cognome											
Nome											
MATRICOLA					VR						

ESAME DI MATEMATICA Vicenza, 15/02/2023 II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x \le -1 \\ e^{-x} - e & x > -1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} . Si dica se alla funzione f è applicabile il teorema degli zeri nell'intervallo [-e, 0].

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Si dica se essa è invertibile. Si indichi la dimensione e una base della sua immagine. È vero che ogni vettore di \mathbb{R}^3 ha una controimmagine attraverso T? Si provi che il vettore (1,0,1) appartiene all'immagine di T e si trovi una sua controimmagine.

Esercizio 3 (punti 5). Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - \ln x$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si trovi l'unico punto stazionario di f e si determini la sua natura con le condizioni del secondo ordine. Si dica infine se lungo la restrizione di f ai punti del dominio che stanno sugli assi cartesiani ci sono punti di massimo o di minimo vincolati.

QUESITO 1. Quale relazione sussiste tra le proprietà di continuità e derivabilità delle funzioni di una variabile?

Quesito 2. Si enunci il teorema di Lagrange (del valor medio).

QUESITO 3. Che cosa si intende con funzione integrale di una funzione f in un intervallo [a, b]?

QUESITO 4. Che cosa significa che i vettori v^1, v^2, \dots, v^k sono generatori di uno spazio vettoriale?

QUESITO 5. Sia dia la definizione formale di derivata parziale rispetto ad y nel punto (x_0, y_0) di una funzione reale f(x, y).